

文章编号: 0253-2239(2001)03-0257-05

# 加性噪声对激光一级相变类比的影响\*

胡 静 朱士群

(苏州大学理学院物理系, 苏州 215006)

**摘要:** 从单模激光场的增益-噪声模型出发, 导出了激光场定态强度分布函数, 研究了定态分布函数的极值点随加性噪声、乘性噪声和注入信号的变化情况。结果表明, 乘性噪声是使激光系统出现一级相变类比的关键因素, 注入信号使相变行为减弱, 而加性噪声却使得定态分布中极值点的数量和位置出现来回跳跃式变化。

**关键词:** 一级相变类比; 加性噪声; 乘性噪声; 注入信号

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

## 1 引 言

从理论和实验上研究由噪声在非线性动力学系统中诱发的非平衡相变是近年来国际学术界十分活跃的课题之一<sup>[1-3]</sup>。非线性系统的随机理论的重要应用实例之一就是激光场理论。一般说来, 在描述激光场运动的非线性朗之万方程中含有两种不同性质的噪声, 一种是表征自发辐射的量子噪声, 即加性噪声, 另一种是描述环境扰动引起的抽运涨落, 即乘性噪声。在研究染料激光系统的性质时, 人们发现了染料激光不规则的统计性质的变化<sup>[4]</sup>, 与在阈值附近的二级相变类比不同的是, 这里观测到的是由抽运涨落引起的一级相变类比<sup>[5]</sup>, 定态分布函数的极值点随序参数出现了不连续的变化。在文献[6]的工作中, 没有重视注入信号和加性噪声对激光一级相变类比的影响。本文从含有加性噪声、乘性噪声和注入信号的一维激光场增益-噪声模型出发, 导出激光场强度的定态分布表达式, 分析了一级相变发生的条件, 讨论了乘性噪声的作用, 并考虑到注入信号、加性噪声对极值点和相变区域的影响。

## 2 理论模型和定态分布函数

含有加性噪声和注入信号的单模激光场的增益-噪声模型, 满足朗之万方程<sup>[7,8]</sup>:

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2FI}{1 + AI/F} + P + \frac{2I}{1 + AI/F} p(t) + 2q(t) \sqrt{I} + I_0, \quad (1)$$

式中,  $I$  为激光光强,  $K$  为空腔衰减常数,  $F$  为增益参量,  $F = a + K$ ,  $a$  为抽运参量,  $A$  为自饱和系数,  $I_0$  为注入信号。加性噪声  $q$  和乘性噪声  $p$  满足:

$$\left. \begin{aligned} \langle q(t) \rangle &= \langle p(t) \rangle = 0, \\ \langle q^*(t)q(t') \rangle &= 2P\delta(t-t'), \\ \langle p^*(t)p(t') \rangle &= 2P'\delta(t-t'). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里,  $P$  和  $P'$  分别是加性和乘性噪声强度。在(1)式中, 抽运参量  $a$  的大小表示激光工作状态。当  $a < 0$  时, 激光处在阈值以下, 这时激光腔中主要是热光子输出; 当  $a > 0$  时, 激光处在阈值以上, 这时激光腔中才有激光输出; 当  $a = 0$  时, 激光处于阈值, 系统的增益和衰减相等。

同(1)式和(2)式相对应的激光强度分布函数  $Q(I, t)$  满足福克-普朗克方程<sup>[9]</sup>:

$$\frac{\partial Q(I, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial I} [D_1(I)Q(I, t)] + \frac{\partial^2}{\partial I^2} [D_2(I)Q(I, t)], \quad (3)$$

式中的漂移系数  $D_1(I)$  和扩散系数  $D_2(I)$  满足:

$$\left. \begin{aligned} D_1(I) &= -2KI + \frac{2FI}{1 + AI/F} + 2P + I_0 + \frac{2P'I}{(1 + AI/F)^3}, \\ D_2(I) &= \frac{2P'I^2}{(1 + AI/F)^2} + 2PI. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 系统趋向于定态, 从(3)式和(4)式可得到激光场的定态强度分布函数<sup>[10]</sup>:

$$Q_s(I) = N(1 + \alpha_0 I)(1 + \alpha_1 I)^{\beta_1} (1 + \alpha_2 I)^{\beta_2} \times \exp(-\beta_3 I) I^{\beta_4}, \quad (5)$$

\* 国家自然科学基金(19874046)资助项目。

收稿日期: 1999-06-24; 收到修改稿日期: 1999-12-06

其中,各个参量可表示为:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{A}{F}, \\
 \alpha_1 &= \frac{A}{F} \left[ 1 + \frac{FP'}{2PA} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4AP}{FP'}} \right) \right], \\
 \alpha_2 &= \frac{A}{F} \left[ 1 + \frac{FP'}{2PA} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4AP}{FP'}} \right) \right], \\
 \beta_1 &= \frac{F^2}{2PA} \left[ \left( 1 + \frac{KP'}{AP} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + 4AP/FP'}} \times \right. \\
 &\quad \left. \left( 1 + \frac{KP'}{AP} + \frac{2K}{F} + \frac{PA}{F^2} + \frac{AI_0}{F^2} \right) \right] - \frac{1}{2}, \\
 \beta_2 &= \frac{F^2}{2PA} \left[ \left( 1 - \frac{KP'}{AP} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + 4AP/FP'}} \times \right. \\
 &\quad \left. \left( 1 + \frac{KP'}{AP} + \frac{2K}{F} + \frac{PA}{F^2} + \frac{AI_0}{F^2} \right) \right] - \frac{1}{2}, \\
 \beta_3 &= \frac{K}{P}, \\
 \beta_4 &= \frac{I_0}{2P}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

### 3 一级相变类比

由噪声引起的激光场非平衡一级相变类比,可通过定态强度分布函数的极值点的数量和大小来分析.定态强度分布函数  $Q_s(I)$  的极值点满足方程  $dQ_s(I)/dI = 0$ , 经过计算化简后可得:

$$I^4 + \lambda_3 I^3 + \lambda_2 I^2 + \lambda_1 I + \lambda_0 = 0, \tag{7}$$

各项系数为无量纲参数,其表达式为:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_3 &= \frac{F}{A} \left[ 3 - \frac{F}{K} \right] - \frac{I_0}{2K}, \\
 \lambda_2 &= \left[ \frac{F}{A} \right]^2 \left[ 3 - \frac{2F}{K} \right] - \frac{3FI_0}{2AK}, \\
 \lambda_1 &= \left[ \frac{F}{A} \right]^3 \left[ 1 + \frac{P'}{K} - \frac{F}{K} \right] - \frac{3F^2 I_0}{2A^2 K}, \\
 \lambda_0 &= -\frac{F^3 I_0}{2A^3 K}.
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

令无量纲参数

$$\nu = \frac{F}{K}, \quad \xi = \frac{K}{A}, \quad \eta = \frac{P'}{K}, \quad \omega = \frac{I_0}{2K},$$

(7)式可化为:

$$\begin{aligned}
 &I^4 + [\xi\nu(3-\nu) - \omega]I^3 + \\
 &[(\xi\nu)^2(3-2\nu) - 3\xi\nu\omega]I^2 + \\
 &[(\xi\nu)^3(1-\nu+\eta) - 3(\xi\nu)^2\omega]I - (\xi\nu)^3\omega = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

当注入信号  $I_0$  为零时,  $I = 0$  将总是(9)式的一个解,其它的解满足:

$$\begin{aligned}
 &I^3 + \xi\nu(3-\nu)I^2 + (\xi\nu)^2(3-2\nu)I + \\
 &(\xi\nu)^3(1-\nu+\eta) = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

当注入信号  $I_0 = 0$  时,从(10)式可得到参量  $\eta$ (即抽运噪声)和  $\nu$ (即增益参量)之间的关系.

图1是  $\eta$ 随  $\nu$ 变化的情况.从图1可以看出,在A区域,定态分布  $Q_s(I)$  只有一个极值点,  $Q_s(I)$  随着  $I$  的增大单调减小,峰出现在  $I = 0$  处.在B区域,  $Q_s(I)$  有三个极值点,除了在  $I = 0$  处仍保持一个峰外,在  $I > 0$  处出现一相对极大和极小.区域A和B之间的边界由曲线  $\eta = \frac{4}{27}\nu^3$  所决定,当选取线上的参数值时,定态分布  $Q_s(I)$  在  $I > 0$  处将有一拐点.在C区域,  $Q_s(I)$  有一个极值点,在  $I > 0$  处有一单峰.区域B和C之间的边界由直线  $\eta = \nu - 1$  所决定.从图1还可以看出,当参量  $\eta$ 和  $\nu$ 从区域A变化到区域D时,  $Q_s(I)$  极值点的个数也应该从一个变化到三个,即区域D也应是相变发生区域,但是理论计算表明,其极值点在  $I < 0$  处.由于激光强度  $I$  必须满足  $I \geq 0$ , 所以  $I < 0$  处的极值点没有实际的物理意义.这样,在D区域,定态分布函数  $Q_s(I)$  仍然是随着  $I$  的增大而单调减小,其峰出现在  $I = 0$  处.

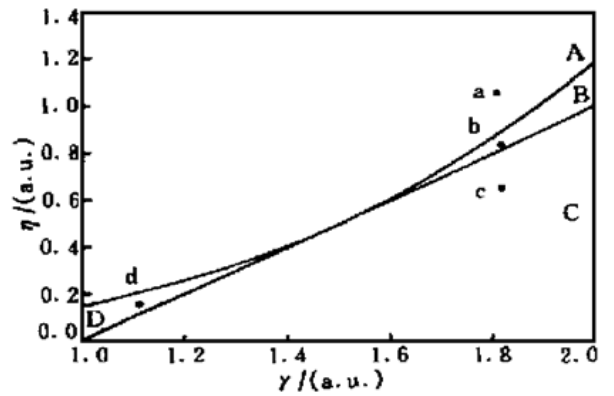


Fig. 1 Parameter plane ( $\eta, \nu$ ) of the first-order like transition. The parameters are  $K = 50, A = 1, I_0 = 0$ . Region A: single extremum at  $I_m = 0$ , Region B: three extrema at  $I_m \geq 0$ , Region C: single extremum at  $I_m > 0$ , Region D: three extrema at  $I_m \leq 0$

根据(5)式,图2画出了定态分布函数  $Q_s(I)$  随抽运噪声  $P'$ (即  $\eta$ )而变化的曲线.图中曲线 a、b、c 和 d 的参量分别同图1中 a、b、c 和 d 四点处相对应,对于 a、b、c 三点,  $\nu = 1.8$ ,  $\eta$  分别等于 1.0、0.84 和 0.76,而在 d 点,  $\nu = 0.8, \eta = 0.2$ .从图2可以看出,当激光场的定态分布函数  $Q_s(I)$  中的参量  $\eta$  沿  $\nu = 1.8$  的直线变化时,  $Q_s(I)$  从  $I = 0$  处出现单峰(处于A区域,只有一个极值点),变到  $Q_s(I)$  出现两个极大值和一个极小值(处于B区域,有三个极值点),再

变到  $Q_s(I)$  在  $I > 0$  处出现单峰(处于C区域, 有一个极值点), 在D区域处,  $Q_s(I)$  在  $I = 0$  处又出现单峰。

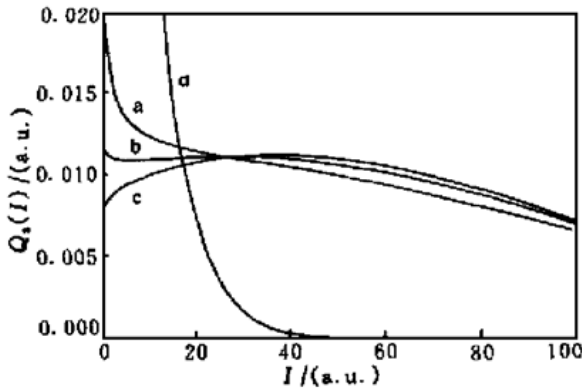


Fig. 2 Steady state intensity distribution function  $Q_s(I)$  for different pump noise  $P'$ . Curves a, b, c and d are corresponding to parameters of points at a, b, c and d in Fig. 1. The parameters are  $K = 50$ ,  $P = 2$ ,  $I_0 = 0$ . (a)  $\eta = 1.0$ ,  $\gamma = 1.8$ ; (b)  $\eta = 0.8$ ,  $\gamma = 1.8$ ; (c)  $\eta = 0.76$ ,  $\gamma = 1.8$ ; (d)  $\eta = 0.15$ ,  $\gamma = 1.1$

图3所示为激光定态分布函数  $Q_s(I)$  的极值点  $I_m$  随乘性噪声强度  $P'$  而变化的情况。这里画出了  $P'$  沿图1中  $\gamma = 1.8$ , 即过 a, b, c 三点的直线取值时  $I_m$  的曲线。

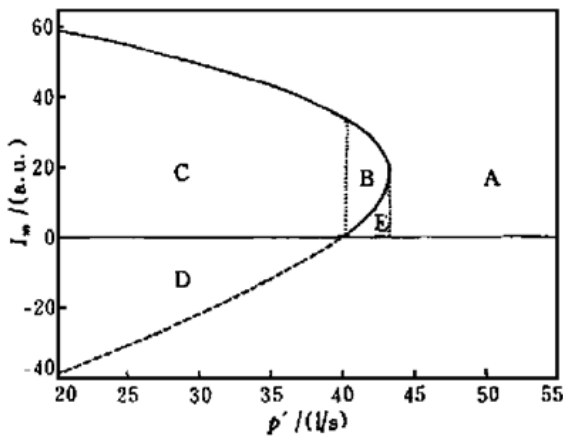


Fig. 3 The extrema  $I_m$  as a function of pump noise  $P'$ . A, C, D are corresponding to region A, C, D in Fig. 1 and B, E are corresponding to region B in Fig. 1.  $K = 50$ ,  $F = 90$ ,  $A = 1$

从图3可见, 当  $P' > 43.2$  时,  $Q_s(I)$  只有一个极值点  $I_m = 0$  (处在A区域)。当  $40 < P' < 43.2$  时,  $Q_s(I)$  有三个极值点  $I_m$ , 而且  $I_m \geq 0$  (处在B区域和E区域)。  $P' = 43.2$  是一个突变点。当  $P' < 40$  时,  $Q_s(I)$  在  $I_m > 0$  处出现极值点(处在C区域), 取适当的  $\gamma$  值时,  $Q_s(I)$  将在  $I_m = 0$  处出现极值点(处在D区域)。

从图1~图3可见, 随着参数  $\eta$  和  $\gamma$  的变化, 激光定态强度分布函数极值点的数量和位置都在变化, 出现了由乘性噪声诱导的一级相变类比特有的

现象。

#### 4 加性噪声和注入信号的影响

加性噪声  $P$  在(7)式中不出现, 但是, 未经化简的方程  $dQ_s(I)/dI = 0$  的分母及因式中含有加性噪声的, 不能忽略加性噪声  $P$  对定态强度分布函数  $Q_s(I)$  极值点  $I_m$  的数量及位置的影响。在非线性和随机过程中, 朗之万方程(1)式中  $I = 0$  是确定性部分与随机项的共同奇点, 该模型符合双奇异随机系统的定义, 因而当随机项强度取足够小的值时, 确定性部分与随机项的共同作用将使加性噪声的作用增强, 从而引入丰富的相变机制<sup>[3]</sup>。

图4所示为在加性噪声  $P$  取远小于1的值时,  $Q_s(I)$  随加性噪声  $P$  而变化的曲线。从图4可见, 当加性噪声增大时,  $Q_s(I)$  极值点的位置也在作急剧变化。当  $P = 0.01$  时,  $Q_s(I)$  的峰出现在  $I = 0$  处, 并随  $I$  作单调减小; 当  $P = 0.011$  时,  $Q_s(I)$  呈单峰函数, 峰值出现在  $I = 200$  处; 当  $P = 0.013$  时,  $Q_s(I)$  的峰又返回到  $I = 0$  处, 并仍随  $I$  作单调减小。当  $P = 0.014$  时,  $Q_s(I)$  的极值点有三个, 两个峰值分别出现在  $I = 0$  和  $I = 55$  处, 一个谷出现在  $I = 2$  处; 当  $P = 0.015$  时,  $Q_s(I)$  的峰又返回到  $I = 0$  处, 并仍随  $I$  作单调减小; 当  $P = 0.017$  时,  $Q_s(I)$  又呈现三个极值点, 两个峰值分别出现在  $I = 0$  和  $I = 40$  处, 而谷出现在  $I = 5$  处。

这些表明, 定态强度分布函数  $Q_s(I)$  极值点的数量和位置随加性噪声  $P$  的增加而在图1所示的区域A、B和C之间作“振荡”。尽管  $K$ 、 $F$ 、 $P'$ 、 $A$  和  $I_0$  等参量的值固定不变, 但  $Q_s(I)$  随  $P$  的变化十分有趣。当  $P$  增加时,  $Q_s(I)$  从图1的区域A跳跃到区域C, 然后又返回到区域A, 当  $P$  继续增加时,  $Q_s(I)$  又从图1的区域B跳入到区域A, 然后又返回到区域B。由此可见, 在(1)式所描述的激光系统中, 加性噪声取远小于1的值时, 会对该系统的一级相变类比产生了重要的影响。

当  $I_0 \neq 0$  时, 从(9)式得到的参数曲线方程很复杂, 所以本文从  $I_0 = 0$  的特殊情况出发, 找到极值点  $I_m$  后, 再分析注入信号  $I_0$  对一级相变类比的影响。

图5为定态分布函数  $Q_s(I)$  随不同注入信号  $I_0$  而变化的情况。从图5可见, 外加信号  $I_0$  的注入, 不仅使得  $Q_s(I)$  在  $I = 0$  处的峰消失, 而且使得  $I = 0$  处的峰变成很陡的谷, 并且在  $I > 0$  处出现了一个谷

和两个峰。当注入信号  $I_0$  继续增大时,除了在  $I = 0$  处的很陡的谷变化不大外,在  $I > 0$  处的谷消失,两个峰合并成一个峰。可见,注入信号  $I_0$  使得  $Q_s(I)$  在

$I = 0$  处的峰变为很陡的谷,并且使得  $Q_s(I)$  在  $I > 0$  处峰的相对高度降低,使得一级相变类比变得不明显。

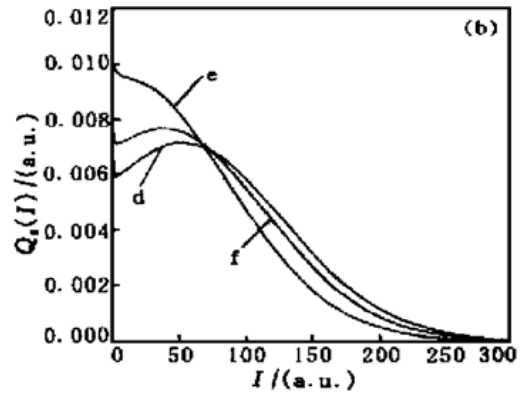
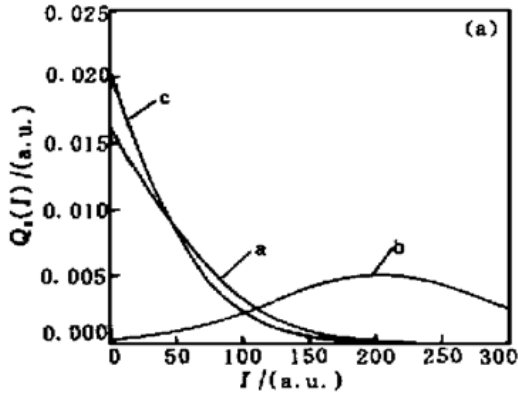


Fig. 4 Steady state intensity distributions  $Q_s(I)$  as a function of quantum noise  $P$ . The parameters are  $K = 50, F = 90, P' = 42, I_0 = 0$ . (a) a:  $P = 0.01$ , b:  $P = 0.011$ , c:  $P = 0.013$ ; (b) d:  $P = 0.014$ , e:  $P = 0.015$ , f:  $P = 0.017$

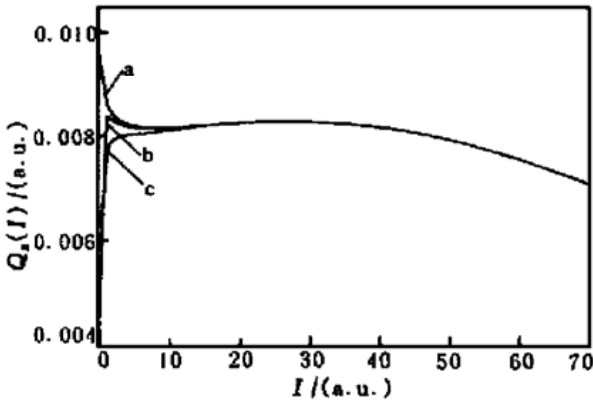


Fig. 5 Steady state intensity distributions  $Q_s(I)$  as a function of  $I$  with different injected signal  $I_0$ . The parameters are  $K = 50, F = 90, P = 2, P' = 42$ . a:  $I_0 = 0$ , b:  $I_0 = 1$ , c:  $I_0 = 5$

### 5 讨 论

从含有加性噪声、乘性噪声和注入信号的单模激光场模型出发,导出了激光场强度定态分布  $Q_s(I)$ ,从理论上得出了在增益参量和乘性噪声控制下发生一级相变类比的参数区域。

乘性噪声在一级相变类比中起了决定性的作用。在定量的参数范围内,乘性噪声的增大,使得定态分布  $Q_s(I)$  峰值点的位置,经历了从  $I > 0$  跳跃到  $I = 0$  的变化过程,并使  $Q_s(I)$  极值点的数量经历了从一个( $I > 0$ ) 突变到三个( $I \geq 0$ ) 再突变到一个( $I = 0$ ) 的相变过程。但是,当加性噪声取远小于1的值时,加性噪声的变化导致了定态分布  $Q_s(I)$  极值点的数量和位置来回在不同的参数区域跳跃;可见,加性噪声取远小于1的值时,会对激光系统的一级相变类比有着重要影响,使定态分布出现更加激烈丰

富的相变现象。

注入信号的作用是使得定态分布  $Q_s(I)$  在  $I = 0$  处的峰变为很陡的谷,并使得  $Q_s(I)$  在  $I > 0$  处峰的相对高度降低,使得一级相变类比行为有所减弱。总之,在激光系统的一级相变类比中,乘性噪声起主要作用,相比之下,加性噪声和注入信号起次要作用,但在适当的参数范围内,加性噪声和注入信号的影响不可忽略。

### 参 考 文 献

- [1] Horsthemke W. *Noise-induced Transitions*. New York: Springer, 1984. 120~ 320
- [2] 于 淦,郝柏林. 相变和临界现象. 北京: 科学出版社, 1984. 148~ 237
- [3] 胡 岗. 随机力与非线性系统. 上海: 上海科技教育出版社, 1994. 150~ 183
- [4] Kaminishi K, Roy R, Short S *et al.*. Investigation of photon statistics and correlations of a dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1981, **24**(1): 370~ 378
- [5] Short R, Mandel L, Roy R. Correlation functions of a dye laser: Comparison between theory and experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**(9): 647~ 650
- [6] Lin Ling, Cao Li, Wu Dajin. First-order-like transition for colored noise saturation models of dye lasers. *Phys. Rev. (A)*. 1993. **48**(1): 739~ 743
- [7] Zhu Shiqun. Multiplicative colored noise in a dye laser at steady state. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(6): 3441~ 3443
- [8] Litter I, Balle S, Bergmann K *et al.*. Detection of weak signals via the decay of an unstable state: Initiation of an injection seeded laser. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(7): 4131 ~ 4135
- [9] Risken H. *Fokker-Planck Equation*. Berlin: Springer, 1984. 50~ 56
- [10] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series and Products*. New York: Academic, 1980. 68, 296

## Effects of Additive Noise on First-Order-Like Phase Transition in a Laser System

Hu Jing Zhu Shiqun

(*Department of Physics, College of Sciences, Suzhou University, Suzhou 215006*)

(Received 24 June 1999; revised 6 December 1999)

**Abstract:** The steady state intensity distribution function is derived from a single mode gain-noise laser model. The extrema of the steady state distribution function is investigated as the additive noise, multiplicative noise and injected signal are changing. It is shown that the multiplicative noise plays a key role in the first-order-like phase transition in a laser system. The injected signal can reduce the phase transition. The additive noise causes the number and locations of the extrema in the steady state distribution function jumping back and forth.

**Key words:** first-order-like phase transition; quantum noise; pump noise; injected signal