

文章编号 : 0253-2239(2001)12-1458-05

光束成丝的非线性理论^{*}

文双春 范滇元

(高功率激光物理国家实验室, 上海 201800
中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘要: 在考虑调制场和本底场之间有能量交换的情况下, 研究了小尺度调制场的非线性演化过程。结果表明, 受到小尺度调制的光束在传输过程中有可能经历周期性成丝过程。通过与 Bespalov-Talanov (B-T) 关于成丝的线性理论比较, 发现 B-T 理论给出的最快增长频率和临界频率等结果在非线性的演化过程中仍然是适用的, 但其给出的调制增长率只在调制场的初始增长阶段与本文的非线性理论一致, 此后, 调制场的增长速度低于指数形式的增长率, 达到某个最大值后将经历周期性变化过程。

关键词: 小尺度自聚焦; 成丝; B 积分; 非线性传输
中图分类号: O437.5 文献标识码: A

1 引 言

强激光通过非线性介质时会出现自聚焦现象^[1]。对于较细的光束, 自聚焦效应将导致光束最终形成一根强度非常高的细丝。如果细丝的强度超过介质的破坏阈值, 将导致激光介质的破坏。对于光斑尺寸较大的光束, 另一类自聚焦效应即小尺度自聚焦将是使光束质量下降和导致激光介质破坏的主要因素。因为叠加在大光束之上的小尺度(小于光束的尺寸)调制场有可能随传输距离指数增大, 最终将整个光束分裂成许多根强度非常高的细丝, 这种过程通常也称为光束成丝。在用于惯性约束聚变的大型激光器中, 光束成丝现象是阻碍激光驱动器负载的提高和使光束质量变差的重大实际问题。因此, 从理论上探索强激光束成丝的过程, 为实际工作提供安全判据显得尤为重要。

Bespalov 和 Talanov^[2]关于小尺度自聚焦的经典理论对成丝现象给出了比较简单而清晰的解释。该理论给出了小尺度扰动的最快增长频率、最大增长系数及 B 积分等著名结果。目前, B 积分已成为强激光系统设计的重要判据之一, 用以衡量小尺度非线性效应的程度。如在美国国家点火装置(NIF)的设计中, 认为当光束的 B 积分值达到 2 时, 光束将会因为小尺度自聚焦效应而分裂成细丝。通常, B 积分的取值是根据实际经验来确定。能不能从

理论上预言光束和细丝的强度随 B 积分的变化呢? 显然 B-T 理论无法正确预言光束和细丝的长期行为。这主要是因为: 第一, B-T 理论是线性理论, 它始终假设小尺度调制场的强度远远小于本底场强度, 这种假设只在调制场的初始增长阶段是合理的; 第二, B-T 理论没有考虑到调制场与本底场之间的能量交换, 即它假设本底场的强度在传输过程中保持不变而调制场指数增长。这显然不符合能量守恒定律。本文在考虑调制场和本底场之间有能量交换并不作弱调制假设的情况下, 研究了调制场和本底场的非线性演化过程。研究发现, 调制场的演化规律与 B-T 理论有较大差别, 在介质的损坏阈值足够高的情况下, 光束在传输过程中将经历周期性成丝过程。

2 本底场和小尺度调制场的非线性演化方程

作为研究出发点的准稳态波动方程为^[1,2]:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 E + k^2 \frac{n_2}{n_0} |E|^2 E = 0, \quad (1)$$

式中 $k = n_0 \omega / c = n_0 k_0$, $\nabla_{\perp}^2 = \omega^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 是横向拉普拉斯(Laplace)算符, 电场 E 已分离了光频快变部分 $\exp[i(kz - \omega t)]$, 并作了行波坐标变换; n_0 和 n_2 分别为介质的线性和非线性折射率。

研究小尺度自聚焦或成丝问题通常是首先假设(1)式的稳态解受到小的调制, 然后再找出调制波随传输距离及调制频率的变化关系。一般地, 受调制

^{*} 国家 863 高技术计划(863-416-5-1-11)资助课题。

收稿日期: 2000-09-11; 收到修改稿日期: 2000-10-16

的稳态波解取下列形式：

$$E(x, y, z) = E_0(z) + E_1(z) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) + E_{-1}(z) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad (2)$$

式中 $E_0(z)$ 为稳态波解(本底光场), $E_1(z)$ 和

$E_{-1}(z)$ 为调制光场的复振幅, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ 为调制的横向波矢, $\mathbf{r}(x, y)$

将(2)式代入(1)式, 得本底场和调制场演化的耦合方程组：

$$-2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = k^2 \frac{n_2}{n_0} [(|E_0|^2 + 2|E_1|^2 + 2|E_{-1}|^2)E_0 + 2E_0^* E_1 E_{-1}], \quad (3a)$$

$$-2ik \frac{\partial E_1}{\partial z} = k^2 \frac{n_2}{n_0} [(|E_1|^2 + 2|E_0|^2 + 2|E_{-1}|^2)E_1 + E_0^* E_{-1}] - q^2 E_1, \quad (3b)$$

$$-2ik \frac{\partial E_{-1}}{\partial z} = k^2 \frac{n_2}{n_0} [(|E_{-1}|^2 + 2|E_0|^2 + 2|E_1|^2)E_{-1} + E_0^* E_1] - q^2 E_{-1}. \quad (3c)$$

(3)式并没有作“弱调制” $|E_1|$ 、 $|E_{-1}| \ll |E_0|$ 的假设, 也没有对 $|E_1|$ 、 $|E_{-1}|$ 线性化。如果按照 B-T 理论^[2]利用“弱调制”条件作线性化处理, 则由(3)式可得到调制场的指数增长率^[2]：

$$g = (q/2k) \sqrt{k^2(2n_2/n_0)I_0 - q^2}. \quad (4)$$

由(4)式得调制增长的截止频率 $q_c = \sqrt{k^2 \frac{2n_2}{n_0} I_0}$;

最快增长频率 $q_m = q_c/\sqrt{2}$; 最大增长率 $g_m =$

$k \frac{n_2}{2n_0} I_0$; B 积分 $B(z) = k \frac{n_2}{2n_0} I_0 z$, 其中 $I_0 =$

$|E_0(0)|^2$ 是平面波的初始光强。图 1 所示的谱图给出了调制的归一化增长率 $\alpha = g/g_m$ 随归一化空间

频率 $\kappa = q^2/q_c^2$ 的变化。令

$$E_j = |E_j| \exp(i\varphi_j), \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_{-1} - 2\varphi_0, \quad j = 0, 1, -1.$$

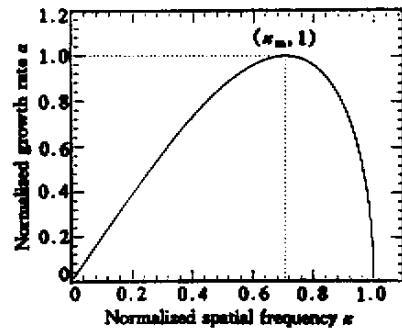


Fig.1 Gain spectrum for small-scale modulations (3a)式两边同乘以 E_0^* 然后减去其复共轭, 得

$$\frac{d|E_0|^2}{dz} = -2k \frac{n_2}{n_0} |E_0|^2 |E_1| |E_{-1}| \sin\varphi. \quad (5a)$$

(3b) $\times |E_0|^2 |E_{-1}|^2 + (3c) \times |E_0|^2 |E_1|^2 - (3a) \times 2|E_1|^2 |E_{-1}|^2$, 利用实、虚部分别相等, 得 φ 满足的方程：

$$2k \frac{d\varphi}{dz} = k^2 \frac{n_2}{n_0} [2|E_0|^2 - |E_1|^2 - |E_{-1}|^2 + \left(\frac{|E_0|^2 |E_{-1}|}{|E_1|} + \frac{|E_0|^2 |E_1|}{|E_{-1}|} - |E_1| |E_{-1}| \right) \cos\varphi] - 2q^2. \quad (5b)$$

(5a) 和 (5b) 分别反映了本底场的强度以及调制场与本底场之间的相位差随传输距离的演化。在 B-T 理论中, 本底场强度保持不变, 而自洽的理论应该是, 调制场的放大是以本底场的能量损失为代价的, 本底场与调制场的能量总和才是守恒量。所以, 应有如下表达式：

$$|E_0|^2 + |E_1|^2 + |E_{-1}|^2 = |E_0(0)|^2 + |E_1(0)|^2 + |E_{-1}(0)|^2 = P_0 \quad (6)$$

P_0 为常数。一般地, 初始调制场的强度相对于本底场来说非常小, 即 $|E_1(0)|^2$ 、 $|E_{-1}(0)|^2 \ll$

$|E_0(0)|^2$, 所以有 $P_0 \approx I_0$ 。

为方便起见, 令 $|E_1| = |E_{-1}|$ 。利用能量守恒并引进新的变量,

$$\eta = \frac{|E_0|^2}{P_0}, \quad \xi = \frac{n_2}{2n_0} k P_0 z,$$

方程(5a)和(5b)化成

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -2\eta(1-\eta)\sin\varphi, \quad (7a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = 3\eta + \chi(2\eta - 1)\cos\varphi - 1 - 4\kappa^2, \quad (7b)$$

考虑到 $P_0 \approx I_0$ 所以 $\xi(z) \approx B(z)$ (7a) 可看作是归一化本底场强随 B 积分 (注意是 B-T 理论中定义的本底场强不随传输距离变化情形下的 B 积分) 的演化方程。由能量守恒表达式可知归一化调制场强度为 $(1 - \eta)\lambda$

3 数值分析

用四阶变步长 Runge-Kutta 法求解 (7) 式来研究调制场和本底场的非线性演化过程。假设 φ 的初值恒为 0, 这与如上所述的 B-T 理论是相符的; η 的初值 η_0 决定了调制场与本底场的相对强度 $\varepsilon_0 = (1 - \eta_0)\eta_0$; 此外, 归一化空间频率 κ 的取值根据 B-T 理论的谱图 (如图 1 所示) 来选取, 这一方面是因为 B-T 理论至少在调制增长的初始阶段正确地预言了调制场的演化, 另一方面我们也想了解 B-T 理论的谱图在非线性演化阶段的正确程度。按 B-T 理论, 归一化最快增长频率 $\kappa_m \approx 0.707$ 所对应的调制是最危险的成分, 应予以重点关注, 所以以下除非特别说明, 一般情况下取 $\kappa = \kappa_m \approx 0.707$ 。

图 2 所示是调制场与本底场的初始相对强度 $\varepsilon_0 = 1\%$ 时, 本底场和调制场强度随无量纲传输距离或 B 积分的变化。为比较起见, B-T 理论给出的调制场随 B 积分的指数变化关系也示于图中。由图看到, 一般情况下, 调制场和本底场强度随 B 积分作周期性变化, 在初始阶段, 调制场不断从本底场中提取能量获得放大, 放大到一定程度后, 调制场又将能量释放给本底场, 此后又从本底场中提取能量, 如此循环下去, 这说明光束在传输过程中有可能经历先成丝, 再复原, 再成丝, 再复原的周期性过程。

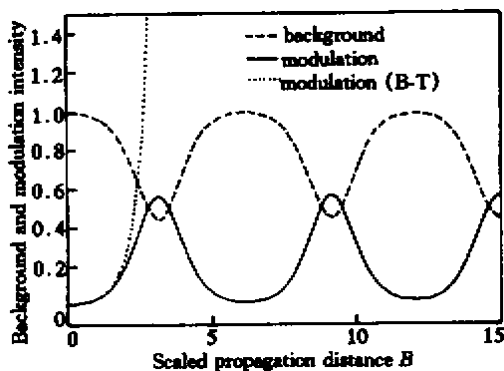


Fig. 2 Variation of intensity of the modulational field with B integral. The relative intensity of the modulation field to the background field is 1% , and the spatial frequency of modulation corresponds to the fastest growing frequency $\kappa = \kappa_m \approx 0.707$

在早期的研究中, Fermi 等人^[5]在用数值方法研究非线性晶格振动时发现叠加在均匀波解之上的不稳定调制将首先指数增长, 但最终将解调制并回到近均匀状态。他们并解释为这是由于原来主要集中在低阶模中的能量将由于非线性不稳定性而逐渐扩散到较高阶模中去, 其后这些被扩散的能量将重新聚集到原来的低阶模中去。这种过程随时间周期性重现, 但这种重现可能并不是完全重现。这种现象被称作 Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 重现。后来, Yuen 等人^[6,7]用数值方法发现一维和二维非线性薛定谔方程也存在这种周期性重现现象。在三波混频参变放大中, 也有抽运光和信号光之间周期性交换能量的过程^[8], 而小尺度自聚焦现象从本质上讲是一种调制不稳定性现象, 这种现象与三波混频过程非常相似。在高功率固体激光器中常常观察到介质的细丝破坏痕迹^[4], 并未观察到这种周期性重现现象, 主要原因可能是介质破坏阈值不高, 光束在第一次成丝时已将介质破坏。在高功率固体激光器的设计中, 一般将光束通过相邻两个空间滤波器之间的放大介质所积累的 B 积分值限定在 2 以内, 如美国国家点火装置取 $B = 1.8$, 实验经验表明, 当 B 积分值超过这个限定值时, 介质可能遭到细丝的破坏。由图 2 可以看到, $B = 1.8$ 时, 小尺度调制增长大约 14 倍, 其与本底场的相对强度约为 18% ; 而当 $B = 2$ 时, 小尺度调制增长大约 20 倍, 其与本底场的相对强度约为 26% ; 当 B 积分继续增大到 3.14 时, 归一化调制场强度甚至超过本底场强度, 达最大值约 0.6。

图 2 还清楚地表明, 当 B 大约小于 1 时, B-T 线性理论与非线性理论符合较好, 而当 $B > 1$ 时, 两者的差距逐步拉大。这说明小尺度调制场只在初始阶段如 B-T 线性理论所预言的那样指数增长, 此后它将逐渐低于指数增长, 达到一最大值后再经历周期性变化过程。

图 3 给出了与本底场的初始相对强度分别为 1.5% 、 1% 、 0.5% 的小尺度调制场的强度随 B 积分的变化。可以看到, 在调制场的首次增长阶段, 对于相同的 B 积分, 初始强度高的调制场其增长后的强度也高。这说明 B 积分的选取还与调制场的初始水平有关。

根据 B-T 理论, 如图 1 所示, 只有归一化空间频率 κ 在 $0 < \kappa < \kappa_c (= 1)$ 范围内的小尺度调制才能获得增长, 而 $\kappa \approx 0.7$ 对应的调制场增长最快。这些结论在非线性增长情形仍然适用, 这一点从图 4

可以看出,其中给出了 κ 分别等于 0.2、0.7、0.9、1.0 时调制场强度随 B 积分的变化。很明显,在调制场的首次增长阶段, $\kappa = 0.7$ 对应的调制场增长最快,而 $\kappa = 1$ 对应的调制场已经没有增长。需要注意的是,由图 1 知, $\kappa = 0.2$ 对应的调制场应该比 $\kappa = 0.9$ 对应的调制场增长慢,而事实正好相反,如图 4 所示。这是由于在调制场与本底场相互作用过程中,低频调制的谐波也获得放大的缘故^[7]。由图 1 知,当 $0 < \kappa < \kappa_c/2 = 0.5$ 时,低频调制的二次谐波 2κ 甚至三次谐波 3κ 等仍然可能小于 1,从而获得放大,而当 $0.5 < \kappa < 1$ 时,其最低阶谐波 2κ 都已超过临界增长频率 1 从而不能获得放大。

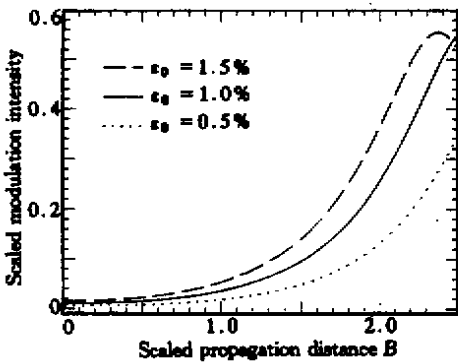


Fig.3 Variation of intensity of the modulatory field with B integral for various relative input intensity of the modulatory field to the background field. The spatial frequency of modulation is $\kappa = \kappa_m \approx 0.707$

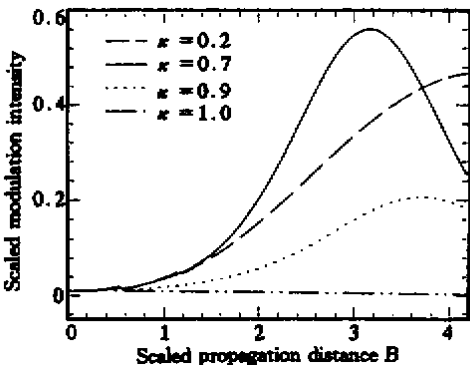


Fig.4 Variation of intensity of the modulation fields with various frequencies with B integral. The relative input intensity of the modulatory field to the background field is 1%

结论 在考虑本底场与调制场之间有能量交换的情况下,研究了小尺度调制的非线性演化过程。小尺度调制场在光束的传输过程中,有可能从本底场中提取能量迅速获得放大,从而将初始均匀的本底场分裂成许多根细丝。但是,如果介质的破坏阈值足

够高,那么细丝将会把从本底场中提取的能量返还给本底场,光束将再次变得均匀。

在高功率激光器中,一般认为 $B \approx 2$ 时光束将因为小尺度自聚焦效应对介质造成损坏,如果按 B-T 理论计算,这时调制强度被放大到大约 10 倍左右。而我们的结果表明,具有最快增长频率的调制场将要被放大到超过 50 倍后才开始释放能量,所以在此之前早已将介质破坏,因此很难在实验上观察到周期性成丝现象。若能寻找到破坏阈值非常高的固体介质材料,那么就能从根本上解决高功率固体激光器中的细丝破坏问题。

B-T 线性理论所预言的最快增长频率和临界频率等结果在调制场的非线性演化过程中仍然是正确的。但其给出的调制场增长率只在调制场初始增长阶段与我们的非线性理论一致,此后,调制场的增长速度低于指数形式地增长,达到某个最大值后将经历周期性变化过程。

在高功率激光系统设计中, B 积分判据是国际上普遍采用的总体设计准则。对一个实际系统的 B 积分值的确定还取决于调制场的初始水平。初始调制水平越低即光场越干净,则系统的 B 积分可以取得越大。

参 考 文 献

- [1] Shen Y R. *The Principles of Nonlinear Optics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984. Chp.17
- [2] Bepalov V I, Talanov V I. Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids. *JETP Lett.*, 1966, **3**(12): 307 ~ 310
- [3] Williams W, Renard P A, Manes K R et al.. *Modeling of Self-Focusing Experiments by Beam Propagation Codes*. LLNL Laser Program Quarterly Report. 1996. UCRL-LR-105821-96-1: 1 ~ 8
- [4] Williams W, Trenholme J, Orth C. *NIF Design Optimization*. LLNL Laser Program Quarterly Report. 1996. UCRL-LR-105821-96-4: 181 ~ 191
- [5] Fermi E, Pasta J, Ulam S. *Collected Papers of Enrico Fermi*. Edited by Segre E. Chicago: University of Chicago Press, 1965, Vol.2. 978
- [6] Yuen H C, Ferguson W E. Relationship between benjamin-feir instability and recurrence in the nonlinear schrodinger equation. *Phys. Fluids*, 1978, **21**(8): 1275 ~ 1278
- [7] Martin D U, Yuen H C. Quasi-recurring energy leakage in the two-space-dimensional nonlinear Schrodinger equation. *Phys. Fluids*, 1980, **23**(5): 881 ~ 883
- [8] Chen Y, Snyder A W. Four-photon parametric mixing in optical fibers: Effect of pump depletion. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(1): 87 ~ 89

Nonlinear Theory of Filamentation of Intense Laser Beams

Wen Shuangchun Fan Dianyuan

(*National Laboratory on High Power Laser and Physics , Shanghai 201800*
Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics , The Chinese Academy of Sciences , Shanghai 201800)

(Received 11 September 2000 ; revised 16 October 2000)

Abstract : Nonlinear evolution of filaments is investigated by taking into consideration of the energy exchange between background and modulational field. It is found that a modulated beam may experience a periodical filamentation. Bespalov-Talanov (B-T) theory gave the same results of the fastest growing frequency and the cutoff frequency as the nonlinear theory ; but a different result of the fastest growth rate. Initially , the modulations grow exponentially , and afterwards , they grow slower than exponential.

Key words : small-scale self-focusing ; filamentation ; B integral ; nonlinear propagation