

文章编号 : 0253-2239(2001)12-1432-06

微小孔近场衍射的能量传输

邓小玖 吴本科 肖 苏

(合肥工业大学物理系 , 合肥 230009)

摘要 : 用标量衍射理论研究了圆孔近场衍射中的能量传输 , 计算了透射系数及轴线上衍射场的能流密度。在微小孔衍射的情况下 , 讨论了矢量衍射理论对能量传输问题标量处理的修正。

关键词 : 圆孔衍射 ; 能量传输 ; 透射系数 ; 能流密度矢量

中图分类号 : O436.1 文献标识码 : A

1 引 言

随着近场光学显微术、近场光谱技术的发展 , 近场光学在生物、单分子探测及计算机存储等领域得到了广泛重视^[1~4]。微小孔近场衍射作为对近场光学显微镜中光纤探针的模拟 , 其能量传输问题的研究对近场光学的理论和实际应用都具有重要意义。目前常用的有电磁理论^[5~7]和角谱法等标量衍射理论^[8~12] , 其中角谱法较为直观、简便。现有文献在微小孔近场衍射的标量处理中 , 常用光场复振幅的绝对值平方作为光场强度的定义来描述光场的能量传输 , 实际上这只是对傍轴标量光场的近似描述。对微小孔的近场衍射 , 不能采用傍轴近似 , 而必须通过引入标量光场的能流密度矢量^[13~15]

$$\mathbf{J} = \text{Re} \left[\frac{1}{ik} \phi^*(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) \right], \quad (1)$$

来描述光场的能量传输 , 式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波矢量的大小。

本文运用角谱衍射理论 , 计算平面孔的衍射场 $\phi(\mathbf{r})$ 通过对能流密度矢量 \mathbf{J} 在观察面上的积分 , 计算平面孔的透射系数。限于篇幅 , 我们用光轴上衍射光场的能流密度矢量作为近轴衍射光场能量传输的近似描述。还讨论了在微小孔衍射的情况下矢量衍射理论对能量传输问题标量处理的修正。

2 标量衍射场的能量传输

由标量波动方程 ,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2)$$

利用(1)式可以证明

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3)$$

即(1)式定义的能流密度矢量 \mathbf{J} 满足无源场的能量守恒定律。下面利用(1)式计算观察面上的总能流 $I_{\text{tot}}(z)$ 。

$$I_{\text{tot}}(z) = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{-\infty}^{\infty} J_z dx dy, \quad (4)$$

其中

$$J_z = \text{Re} \left[\frac{1}{ik} \phi^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial z} \phi(\mathbf{r}) \right], \quad (5)$$

为垂直于光束传输轴的横截面上光强的精确定义^[14]。

由角谱衍射理论 , 衍射光场可表示为^[16]

$$\phi(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y, z) \exp[i(xk_x + yk_y)] dk_x dk_y, \quad (6)$$

其中

$$A(k_x, k_y, z) = A_0(k_x, k_y) \exp(iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}), \quad (7)$$

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, 0) \exp[-i(xk_x + yk_y)] dx dy, \quad (8)$$

$\phi(x, y, 0)$ 为 $z = 0$ 处(衍射平面)的衍射场。将(6)式代入(5)式 , 由(4)式可求得

$$I_{\text{tot}}(z) = \frac{4\pi^2}{k} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} |A_0(k_x, k_y)|^2 \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} dk_x dk_y. \quad (9)$$

由上式可知 , 观察面上的总能流 $I_{\text{tot}}(z)$ 与观察面距衍射平面的距离 z 无关 , 这正是能量守恒的表现。

入射到衍射孔 Σ 上的总能量 E 为

$$E = \iint_{\Sigma} J_{\lambda z} dx dy, \quad (10)$$

其中

$$J_{\lambda z} = \text{Re} \left[\frac{1}{ik} \phi_{\lambda}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial z} \phi_{\lambda}(\mathbf{r}) \right]_{z=0}, \quad (11)$$

则平面衍射孔 Σ 的透射系数为

$$T = \frac{I_{\text{tot}}}{E} = \frac{4\pi^2}{Ek} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} |A_0(k_x, k_y)|^2 \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} dk_x dk_y. \quad (12)$$

以单色平面波的圆孔衍射为例计算透射系数。不失一般性，设入射光场 $\phi_{\lambda}(\mathbf{r})$ 为

$$\phi_{\lambda}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (13)$$

其中 $\mathbf{k}_0 = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$ 为入射波波矢。采用第一类瑞利-索末菲边界条件近似，则

$$\mathcal{A}(x, y, \rho) = \begin{cases} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}) & x^2 + y^2 \leq \rho_0^2, \\ 0 & x^2 + y^2 > \rho_0^2, \end{cases} \quad (14)$$

其中 ρ_0 为衍射圆孔的半径。利用(10)(13)式可求得

$$E = \pi \rho_0^2 \cos \alpha, \quad (15)$$

利用(14)(8)式可求得

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho_0^2} \exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\rho}] dx dy = \frac{\rho_0}{2\pi k \xi} J_1(\rho_0 k \xi), \quad (16)$$

式中 $\xi = (\sin^2 \theta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \theta \sin \alpha \cos \phi)^{1/2}$ J_1 为一阶贝塞尔函数。将(15)(16)式代入(12)式可求得平面波圆孔衍射的透射系数

$$T = \frac{1}{k \pi \cos \alpha} \times \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} \frac{1}{(k \xi)^2} J_1^2(\rho_0 k \xi) \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} dk_x dk_y. \quad (17)$$

在正入射的条件下 $\alpha = 0$ ，透射系数为

$$T = \frac{2}{k} \int_0^k \frac{1}{k_{\rho}} J_1^2(\rho_0 k_{\rho}) \sqrt{k^2 - k_{\rho}^2} dk_{\rho}, \quad (18)$$

其中 $k_{\rho} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 。(17)式、(18)式与文献[17]

在远场衍射条件下的相关结论一致，本文的结论不受观察平面到衍射平面的距离限制。

再以高斯光束对称正入射的圆孔衍射为例计算透射系数。设对称正入射的高斯光束的束腰位于衍射平面($z = 0$)，则入射光场 $\phi_{\lambda}(\mathbf{r})$ 为^[18,19]

$$\phi_{\lambda}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikz)}{1 + i2z/kw_0^2} \times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2(1 + i2z/kw_0^2)}\right], \quad (19)$$

其中 w_0 为束腰半径，由(8)(10)(12)(19)式可求得透射系数

$$T = \frac{2\pi}{kE} \times \int_0^k \int_0^{\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) J_0(\rho k_{\rho}) \rho d\rho \sqrt{k^2 - k_{\rho}^2} dk_{\rho}, \quad (20)$$

其中

$$E = \frac{\pi}{2} \left(w_0^2 - \frac{1}{k^2} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{2\rho_0^2}{w_0^2}\right) \right] - \frac{\pi \rho_0^2}{k^2 w_0^2} \exp\left(-\frac{2\rho_0^2}{w_0^2}\right). \quad (21)$$

取 $w_0 = \lambda$ ，由(18)(20)式计算透射系数 T 随衍射孔径的变化，如图1所示。

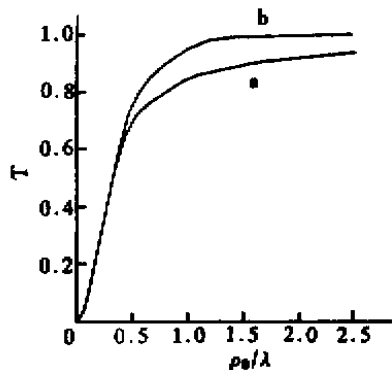


Fig.1 Transmission coefficient T as a function of the aperture radius ρ_0 . a: plane wave; b: Gaussian beam ($w_0 = \lambda$)

将(5)式对垂直于 z 轴的一定接收平面 S 积分，即可求得接收面 S 上的能流

$$I_S(z) = \iint_S J_z dx dy. \quad (22)$$

(22)式的积分一般非常困难，限于篇幅我们将另文专门研究。

3 光轴上行射场的能流密度

为了描述衍射场的能量传输特性，用光轴上行

射场的能流密度矢量,作为近轴衍射光场能量传输的近似描述。由第一类瑞利-索末菲衍射积分(与角谱衍射理论等价^[20]),衍射场可表示为^[21]

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Sigma} \phi(x', y', \rho) \frac{\exp(ikR)}{R} dx' dy', \quad (23)$$

其中 $R = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2]^{1/2}$ 。对圆孔衍射,在单色平面波正入射的情况下,可求得光轴上任一点 $r(0, 0, z)$ 的衍射场

$$\phi(0, 0, z) = -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\rho_0} \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho d\rho = \exp(ikz) - \frac{z}{\sqrt{\rho_0^2 + z^2}} \exp(ik\sqrt{\rho_0^2 + z^2}). \quad (24)$$

将(24)式代入(5)式得

$$J_z(0, 0, z) = 1 + \frac{z^3}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} - \left(\frac{z}{\sqrt{\rho_0^2 + z^2}} + \frac{z^2}{\rho_0^2 + z^2} \right) \cos[k(z - \sqrt{\rho_0^2 + z^2})] - \frac{\rho_0^2}{k(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \sin[k(\sqrt{\rho_0^2 + z^2} - z)]. \quad (25)$$

由对称性可知 $J_x(0, 0, z) = J_y(0, 0, z) = 0$, $J_z(0, 0, z)$ 即为光轴上任一点的光强。按传统标量光场强度的定义,光轴上的光强为

$$K(0, 0, z) = |\phi(0, 0, z)|^2 = 1 + \frac{z^2}{z^2 + \rho_0^2} - \frac{2z}{\sqrt{z^2 + \rho_0^2}} \cos[k(z - \sqrt{z^2 + \rho_0^2})]. \quad (26)$$

取 $\rho_0 = 0.6\lambda$, 由(25)式、(26)式计算 $J_z(0, 0, z)$ 、 $K(0, 0, z)$ 随 z 的变化,如图2所示。

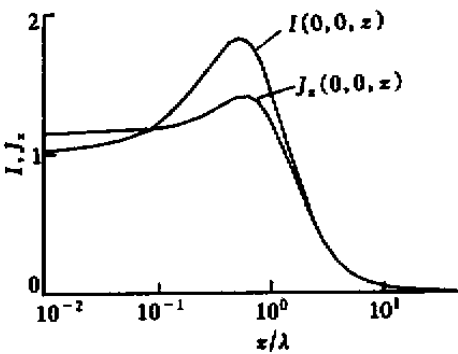


Fig.2 $J_z(0, 0, z)$ and $K(0, 0, z)$ as functions of the distance z , the radius of the aperture is $\rho_0 = 0.6\lambda$ (plane wave)

作为比较,我们计算高斯光束经圆孔衍射时,其轴线上 $J_z(0, 0, z)$ 、 $K(0, 0, z)$ 随 z 的变化。由文献^[21]高斯光束经圆孔衍射后的轴向光场分布为:

$$\phi(0, 0, z) = -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho d\rho \quad (27)$$

则有

$$K(0, 0, z) = |\phi(0, 0, z)|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho d\rho \right|^2, \quad (28)$$

$J_z(0, 0, z) =$

$$\text{Re} \left\{ \left[\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \frac{\exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho d\rho \right] \times \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \frac{\exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho d\rho \right] \right\}, \quad (29)$$

取 $w_0 = \lambda$, $\rho_0 = 0.4\lambda$, 由(28)、(29)式计算 $J_z(0, 0, z)$ 、 $K(0, 0, z)$ 随 z 的变化,如图3所示。由图2、图3可知,在微小孔的近场衍射区 $J_z(0, 0, z)$ 、 $K(0, 0, z)$ 两者有较大的差别。

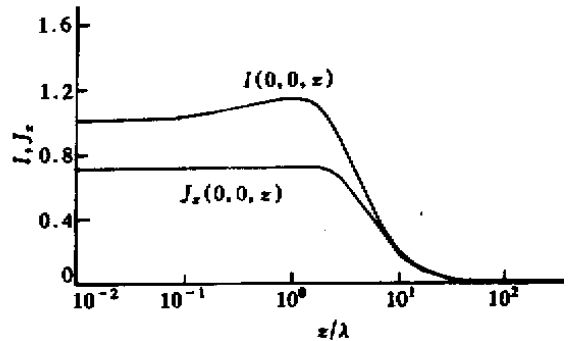


Fig.3 $J_z(0, 0, z)$ and $K(0, 0, z)$ as functions of the distance z , the radius of the aperture is $\rho_0 = 0.4\lambda$ (Gaussian beam, $w_0 = \lambda$)

4 矢量衍射场的能量传输

对无限薄的理想导电带孔平面屏,衍射场可表示为^[17-21]

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \frac{\exp(ikR)}{R} ds, \quad (30)$$

其中 \mathbf{n} 为 z 方向上的单位矢量,被积函数中的 E 为孔内的总切向电场,可近似用入射光的光扰动代替。

(30)式还可以表示为分量式

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[E_x(x', y', \rho) \times \frac{\exp(ikR)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \left(-\frac{z}{R} \right) \right] dx' dy', \quad (31)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[E_y(x', y', 0) \times \frac{\exp(ikR)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \left(-\frac{z}{R} \right) \right] dx' dy', \quad (32)$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[E_x(x', y', 0) \frac{(x-x')}{R} + E_y(x', y', 0) \frac{(y-y')}{R} \right] \frac{\exp(ikR)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) dx' dy', \quad (33)$$

由(31)式~(33)式可看出,衍射场 $E(x, y, z)$ 完全由衍射孔内电场的切向分量确定。衍射场的各分量满足无源条件

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0 \quad (34)$$

并非独立的标量波动方程边值问题的解。衍射场的能量传输用坡印廷矢量^[14,22]

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \quad (35)$$

来描述,其中 $\mathbf{H} = [c(i\omega)] \nabla \times \mathbf{E}$ 。矢量衍射场由于存在 z 分量,其能量传输(坡印廷矢量 \mathbf{S})的计算一般比较复杂。但对单色平面波或高斯光束对称正入射时的圆孔衍射,由于光轴上衍射场的 z 分量为零,能流密度矢量(25)(29)式仍然成立(只相差一个常数因子)。另外,对微小孔衍射,衍射屏将对衍射孔上的入射场产生一定的干扰,这种干扰对于孔的边缘部分尤为明显。因而,衍射场边值问题的研究是近场光学的重要内容。

结论 本文通过对能流密度矢量 \mathbf{J} 在观察面上的积分,计算的平面孔透射系数,与观察面距衍射平面的距离 z 无关,这体现了衍射场的能量守恒。平面波圆孔衍射的透射系数(17)(18)式与文献[17]在远场衍射条件下的结论一致;图1所示高斯光束圆孔衍射的透射系数随衍射孔径 ρ_0 的变化与文献[23]的结果一致。(22)式给出的垂直于 z 轴的一接收平面 S 上的能流,反映了其与传统算法的区别。由图2、图3可知,在平面波、高斯光束的微小孔近场衍射区,即使是光轴上的衍射场,其强度的精确定义 $J_z(0, 0, z)$ 与传统定义 $I(0, 0, z)$ 也存在较大差别。这说明在微小孔的近场衍射中,必须通过引入能流密度矢量来描述光场的能量传输。

参 考 文 献

[1] Dürig U, Pohl D, Rohner F. Near-field optical-scanning

- microscopy. *J. Appl. Phys.*, 1986, **59**(10):3318~3327
- [2] Massey G A. Microscopy and pattern generation with scanned evanescent waves. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(5):658~660
- [3] 黄浩, 裴先登, 黄俊. 近场记录光盘的写入能量的研究. *光学学报*, 1999, **19**(2):191~195
- [4] 刘秀梅, 王佳, 李达成. 扫描近场光学显微镜及其初步应用. *中国激光*, 1999, **26**(9):793~798
- [5] Leviatan Y. Study of near-zone fields of a small aperture. *J. Appl. Phys.*, 1986, **60**(5):1577~1583
- [6] Betzig E, Harootunian A, Lewis A *et al.*. Near-field diffraction by a slit: Implications for super resolution microscopy. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(12):1890~1900
- [7] Roberts A. Electromagnetic theory of diffraction by a circular aperture in a thick, perfectly conducting screen. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **4**(10):1970~1983
- [8] Kowarz M W. Homogeneous and evanescent contributions in scalar near-field diffraction. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(17):3055~3063
- [9] Totzeck M. Validity of the scalar Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld diffraction theories in the near field of small phase objects. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1991, **8**(1):27~32
- [10] 谢建平, 方晖, 王守涛等. 近场衍射图样的抽样定理处理方法. *光学学报*, 1999, **19**(6):785~790
- [11] 郭继华, 郭峰, 朱兆明. 微小孔衍射—近场光学理论. *光学学报*, 1998, **18**(10):1395~1398
- [12] 邓小玖, 吴本科. 微小孔近场衍射中的传播波和倏逝波. *计算物理*, 2001, **18**(3):211~214
- [13] Levine H, Schwinger J. On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. I. *Phys. Rev.*, 1948, **74**(8):958~974
- [14] 曹清, 邓锡铭, 郭弘. 横截面上光强的精确表述. *光学学报*, 1996, **16**(7):897~902
- [15] 曹清, 邓锡铭, 郭弘. 非傍轴光束的光束质量因子. I. 定义. *光学学报*, 1996, **16**(9):1217~1222
- [16] Goodman J W. 詹达三, 董经武, 顾本源译. 秦克诚校. 傅里叶光学导论. 北京: 科学出版社, 1976. 54~58
- [17] 杰克逊 J D 著, 朱培豫译. 经典电动力学. 北京: 人民教育出版社, 1978. 483
- [18] 郭硕鸿著. 电动力学. 北京: 高等教育出版社, 1979. 152~156
- [19] Agrawal G P, Pattanayak D N. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(4):575~578
- [20] Lalor E. Conditions for the validity of the angular spectrum of plane waves. *J. Opt. Soc. Am.*, 1968, **58**(9):1235~1237
- [21] 李正直, 倪振宇. 高斯光束经圆孔光阑衍射后在近场区的轴向光场分布. *中国激光*, 1991, **18**(9):672~676
- [22] 玻恩 M, 沃耳夫 E 著. 杨葆荪等译校. 光学原理. 北京: 科学出版社, 1978. 54
- [23] 张国平, 明海, 陈晓刚等. 扫描近场光学显微镜中两类光纤探针传输特性的研究. *光学学报*, 1998, **18**(7):886~889

Energy Transmission of a Small Aperture in Near-Field Diffraction

Deng Xiaojiu Wu Benke Xiao Su

(*Department of Physics , Hefei University of Technology , Hefei 230009*)

(Received 20 November 2000 ; revised 25 June 2001)

Abstract : Applying the scalar diffraction theory , the problems of energy transmission have been studied. The transmission coefficient as well as the energy flux density vector on the axis has been calculated. For the diffraction of a small aperture , above problems have been discussed by the vector diffraction theory.

Key words : circular hole diffraction ; energy transmission ; transmission coefficient ; energy flux density vector

【 编者的话 】

为了便于读者及时获得学术活动的信息 ,加强学术交流 ,从 2002 年起 ,本刊将免费刊登会议通知、会议报道、书讯等短消息(字数在 500 字以内) ,欢迎各学术团体、单位、个人及时与编辑部联系。

《光学学报》编辑部

2001 年 11 月