

文章编号: 0253-2239(2001)11-1301-04

单模光纤色散的解析形式

任建华 余重秀 王葵如

(北京邮电大学电子工程系, 北京 100876)

摘要: 根据波导标量解本征值方程及其递推关系, 提出一种利用 Gloge 关系求解单模光纤中波导色散的理论方法, 给出了色散的解析形式。通过分析归一化传输常数的近似解与精确解间的差别论证了这种解析法具有精确求解的计算精度。给出普通单模光纤(G. 652) 光纤色散的实验数据, 并与计算的色散解析解曲线加以比较, 二者达到极好的吻合。利用所得到的结果, 分析了数值微分法和经验公式的计算精度。

关键词: 光纤色散; 波导色散; 材料色散

中图分类号: TN25 文献标识码: A

1 引 言

在高速光通信技术快速发展的今天, 光纤损耗随着光纤放大器的研制成功而变为次要问题, 而光纤色散对于光通信来说则成了主要限制, 它导致脉冲展宽而使信号质量劣化。然而, 光纤的负色散特性却可用于色散补偿, 对于某些研究和应用, 例如, 光纤光栅色散补偿、四波混频、参量效应以及光孤子传输等方面, 光纤色散的分析与计算都是十分重要的, 所以它一直是人们普遍关注的问题。

通常处理折射率呈对称分布、且折射率剖面分布比较复杂的弱导光纤的标量波动方程的手段就是数值方法, 主要有解超越方程的二分法、矩阵微扰法、伽辽金法和有限差分法^[1]。这些数值解法(除解超越方程以外)基本上都是将方程的解用拉盖尔-高斯(Laguerre-Gauss)函数展开, 再将波动方程写成本征方程, 用数值法求解矩阵的本征值问题, 求解过程相当繁琐。另外, 在求解本征值和本征向量后, 还要再进行两次数值微分才能得到盼望已久的色散系数, 这也必然耗费大量的计算时间。上述方法对于分析通常的单模光纤的色散特性而言, 则显得过于复杂。

我们经过研究发现, 对于单模光纤, 若利用贝塞尔函数的递推关系, 可以直接得到色散系数的解析形式, 那么如果采用 Gloge^[2]模型, 就能准确地计算出色散系数来。实验结果与数值曲线的吻合证明了上述设想的正确性, 从而为单模光纤色散问题的分析提供了极大的便利。

2 理 论

众所周知, 单模光纤的总色散 $D_t(\lambda)$ 主要由材料色散 D_m 和波导色散 D_w 两部分组成^[3]

$$D_t(\lambda) = D_m + D_w \approx -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} - \frac{n\Delta}{c\lambda V} \frac{d^2(bV)}{dV^2}, \quad (1)$$

$$b = \frac{W^2}{V^2} = 1 - \frac{U^2}{V^2}, \quad (2)$$

式中, λ 为光波波长, c 为真空中的光速, n 和 Δ 分别为纤芯折射率和相对折射率差, b 为归一化传输常数, V 为归一化频率, U 和 W 分别为径向归一化相位常数及衰减常数, 它们满足下列关系

$$U^2 + W^2 = V^2. \quad (3)$$

由三项塞尔梅耶尔公式^[4]很容易得到材料色散 D_m

$$D_m = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} = -\frac{\lambda}{nc} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{A_i J_i^2(3\lambda^2 + l_i^2)}{(\lambda^2 - l_i^2)^3} - \left[\frac{dn}{d\lambda} \right]^2 \right], \quad (4)$$

其中 A_i, J_i 为常数^[4]。

根据弱导光纤的本征方程和 m 阶贝塞尔函数的递推公式及(3)式, 可以得到

$$U \frac{J_{m\pm 1}(U)}{J_m(U)} = \pm W \frac{K_{m\pm 1}(W)}{K_m(W)}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} mJ_m \mp UJ'_m &= UJ_{m\pm 1}, \\ mK_m \pm WK'_m &= \mp WK_{m\mp 1}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} U \left[\frac{J_{m+1}J_{m-1}}{J_m^2} - 1 \right] \frac{dU}{dV} + \\ W \left[\frac{K_{m+1}K_{m-1}}{K_m^2} - 1 \right] \frac{dW}{dV} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$U \frac{dU}{dV} + W \frac{dW}{dV} = V, \quad (8)$$

式中 $K_m(W)$ 为 m 阶第二类汉开尔函数, 于是解出

$$\frac{dW}{dV} = \sqrt{b} \left[1 - \frac{J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} \right], \quad (9)$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{\sqrt{1-b}} \left[1 - b + b \frac{J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} \right], \quad (10)$$

$$\frac{d(bV)}{dV} = V \frac{db}{dV} + b = b \left[1 - \frac{J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} \right]. \quad (11)$$

由(11) 式对 V 求二阶导数, 得到

$$V \frac{d^2(bV)}{dV^2} = - \frac{2J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} \frac{d(bV)}{dV} + \frac{d}{dU} \left[1 - \frac{2J_m^2(U)}{J_{m+1}(U)J_{m-1}(U)} \right] \left[bV \frac{dU}{dV} \right], \quad (12)$$

注意到(5) 式和(10) 式, 则

$$V \frac{d^2(bV)}{dV^2} = - \frac{2J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} b \left[1 - \frac{2J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} \right] - \frac{2J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} \left[\frac{2}{U} + \frac{J_{m-1} - J_{m+1}}{J_m} - \left[\frac{J_{m-1} - J_{m+1}}{J_{m+1}J_{m-1}} \right] J_m \right] \frac{bV^2}{U} \left[1 - b + b \frac{2J_m^2}{J_{m+1}J_{m-1}} \right]. \quad (13)$$

上式和文献[5] 中给出的色散系数公式是完全一致的。

对单模光纤, 令 $J = J_0/J_1$, 并注意到 $J_{-1} = -J_1$, 得到波导色散系数的解析形式为

$$D_w = - \frac{n\Delta}{c\lambda} V \frac{d^2(bV)}{dV^2} = - \frac{n\Delta}{c\lambda} \left[2J^2(1 + 2J^2) - 4J[J^2 - J/U + 1] \frac{bU}{1-b} (1 - b - bJ^2) \right]. \quad (14)$$

3 数值分析与实验验证

由(14) 式可知, b 和 J 均是 U 、 V 的函数, 如果建立了 U 和 V 之间的关系, 就能很方便地求解单模光纤的色散问题。

3.1 Gloge 模型的适用性

对单模光纤, Gloge 给出下面的 U 和 V 之间近似的关系^[2]:

$$U(V) = \frac{(1 + \sqrt{2})V}{1 + (4 + V^4)^{1/4}}. \quad (15)$$

从(10) 式 ~ (12) 式可以看出, (12) 式中包含两个关于变量 V 的一阶导数项均是 b 和 J 的函数, 因 J 可以精确计算, 故(14) 式解的精度取决于 b 相对其精确解^[1] 的偏离大小; 而图 1 中给出的利用(15) 式及

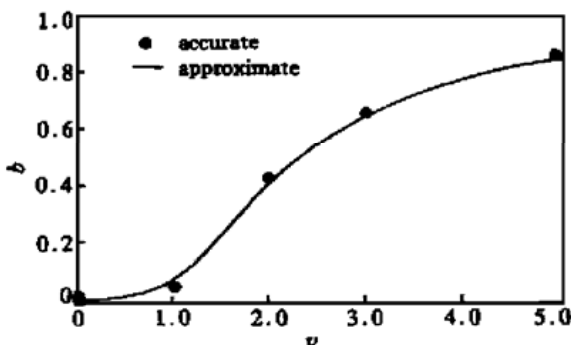


Fig. 1 Accurate (dot) and approximate (solid) solution of normalized propagation constant versus normalized frequency

(2) 式解出 b 曲线与 b 的精确解对比表明, (15) 式对 b 有非常高的近似精度, 以致于完全可以用 b 的近似值代替其精确解。为了验证上述分析的正确性, 首先对参数 $a = 3.85 \mu\text{m}$, $\Delta = 0.0023$ 的光纤总色散进行了实验测量 (见表 1), 其次, 根据(14) 式、(4) 式和(1) 式计算的波导色散 D_w 、材料色散 D_m 和总色散 D_{t1} 曲线连同实验数据 D_{te} 一并在图 2 给出。可以看出, 本文给出的解析解(14) 式在利用(15) 式时所得到的理论曲线与实验测量值达到了相当好的吻合。

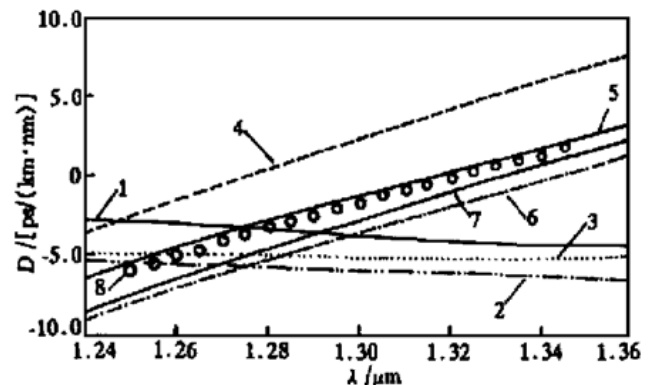


Fig. 2 The theoretical curve (1: waveguide D_{w1} ; 4: material and D_m and 5: sum D_{t1}), numeric differential curve (3: D_{w3} , 7: D_{t3}), experience formula (2: D_{w2} , 6: D_{t2}) and experimental data (8: D_{te}) of total dispersion for the dispersion of single-mode fiber with the fiber core radius of $a = 3.85 \mu\text{m}$ and refractive index of $n = 1.45$ as well as the relative index difference between the core and clad of the fiber of $\Delta = 0.0023$

3.2 数值微分与经验公式的计算精度

表 1 中的实验数据除了用于验证(14)式以外, 还可用来分析根据经验公式

$$V \frac{d^2(bV)}{dV^2} = 0.08 + 0.549(2.834 - V)^2, \quad (16)$$

和数值微分(11)式所得到的波导色散 D_{w2} 、 D_{w3} 以及相应的总色散 D_{t2} 、 D_{t3} 曲线的计算精度。由图 2 可以看出, 经验公式和数值微分法相对于(14)式或实验数据的结果均存在一定的误差(在零色散点处约 $1.3 \text{ ps/km}\cdot\text{nm} \sim 2.5 \text{ ps/km}\cdot\text{nm}$), 数值微分法比经验公式的精度要高一些。它们对于粗略地估算色散尚可容忍, 但对于象光纤参量效应中为实现相位匹配而需要精确确定零色散点的情况来说, 这些方法的误差还是大了一些。

Table 1. Experimental data of total dispersion in single mode fiber, measured wavelength from 1.25 nm to 1.345 nm

$\lambda \mu\text{m}$	D_{te}	$\lambda \mu\text{m}$	D_{te}
1.250	- 5.91	1.300	- 1.57
1.255	- 5.45	1.305	- 1.16
1.260	- 5.00	1.310	- 0.76
1.265	- 4.55	1.315	- 0.36
1.270	- 4.11	1.320	0.03
1.275	- 3.67	1.325	0.42
1.280	- 3.24	1.330	0.80
1.285	- 2.81	1.335	1.18
1.290	- 2.39	1.340	1.56
1.295	- 1.97	1.345	1.93

4 讨 论

虽然图 1 中由(15)式得到的曲线与精确解符合得很好, 以至于可用其代替精确解求解(14)式。但值得注意的是, 利用对(2)式和(15)式求关于的导数也能得到类似(10)式、(11)式的形式

$$\frac{d(bV)}{dV} = b \left[1 + \frac{2}{(1 + \sqrt{2})b} \left[\frac{V\sqrt{1-b}}{(4 + V^4)^{1/4}} \right]^3 \right], \quad (17)$$

$$bV \frac{dU}{dV} = \frac{bU}{1-b} \left[(1-b) - \frac{[(1-b)V]^2}{(1 + \sqrt{2})U} \left[\frac{V}{(4 + V^4)^{1/4}} \right]^3 \right], \quad (18)$$

将它们与(10)和(11)式比较可以看出, 两种情况都有相当大的误差, 如图 3 和图 4 所示。因此不能由(17)和(18)式来求解总色散。

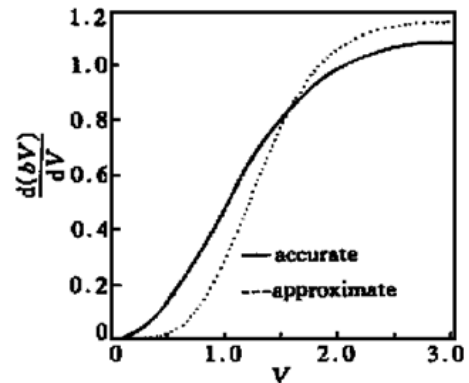


Fig. 3 First order differential curve of bV versus V

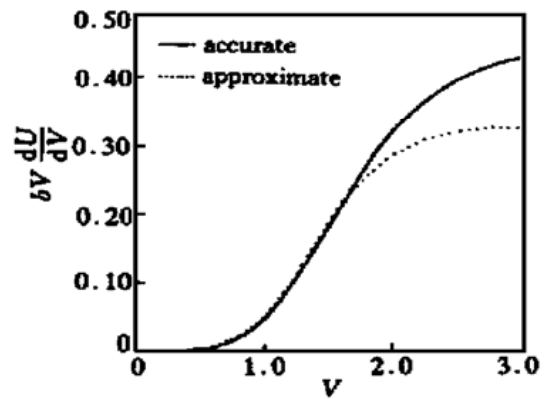


Fig. 4 First order differential curve of U versus V

结论 本文提出的求解单模光纤色散的解析法大大优于数值微分法和经验公式, 可以比较严格地以函数计算方式快速地求解(14)式得到单模光纤的总色散, 所得到的结果与实验数据吻合得极好。这表明, 此法为单模光纤的色散问题的解决提供了一个理论与数值分析相结合的实用化模型。

参 考 文 献

- [1] 刘贤炳, 邹林森. 几种计算光纤色散特性的数值方法. 光通信研究, 1996, (4): 27~ 34
- [2] Gloge D. Weakly guiding fibers. *Appl. Opt.*, 1971, **10** (10): 2252~ 2258
- [3] 张明德, 孙小菡. 光纤通信原理与系统. 南京: 东南大学出版社, 1996. 51~ 53
- [4] Fleming J W. Material dispersion in lightguide glasses. *Electron. Lett.*, 1978, **14**(11): 326~ 328
- [5] Huang Hungchia, Wang Zihua. Analytical approach to prediction of dispersion properties of step-index single mode optical fibers. *Electron. Lett.*, 1981, **17**(5): 202~ 204
- [6] 原 荣. 光纤通信网络. 北京: 电子工业出版社, 1999. 8~ 9

Analytic Resolution of Waveguide Dispersion in Single Mode Fiber

Ren Jianhua Yu Chongxiu Wang Kuiru

*(Department of Electronics Engineering, Beijing University of Posts
and Telecommunications, Beijing 100876)*

(Received 10 July 2000; revised 8 October 2000)

Abstract: Based on the eigenvalue equation of waveguide for scalar quantity and the recursion relation of its eigen-functions, a kind of theoretical method, by which waveguide dispersion in single mode fiber can be analytically solved by means of the equation called D. Gloge model, is put forward and the analytic solution of the dispersion in single mode fiber is given out. It shows that the analytic method can almost precisely solve dispersion problem of single mode fiber by analysis of a difference between approximate and accurate solution of the normalized transmission constant. Experimental data and calculated curve of the dispersion about general single mode fiber (G. 652) is compared and they dovetail very well. By use of the result, the calculating precision of numeric differential method and empirical formula is analyzed.

Key words: fiber dispersion; waveguide dispersion; material dispersion