文章编号: 0253-2239(2001)11-1281-05

# 有效 $ABCD$ 系统的衍射积分*

刘承宜 胡 巍 卢光山 郭 弘
(华南师范大学传输光学实验室, 广州 510631)

**摘要**: 利用光束传输的薛定谔形式理论, 将 $ABCD$ 定律推广到有效质量因子守恒的系统, 得到了束宽、曲率半径和发散角的进化方程。对于束宽对轴坐标的二阶微分为常数的有效 $ABCD$ 系统, 利用海森伯图像得到了坐标和动量的非线性进化关系, 并利用简单的迭代方法得到了相应的衍射积分公式。

**关键词**: 光传输; $ABCD$ 定律; 衍射积分
中图分类号: TN012 文献标识码: A

## 1 引 言

$ABCD$ 定律是傍轴光束传输的重要定律。Kogelnik[1] 首次将几何成像的 $ABCD$ 定律推广并用于研究高斯光束的传输, 提出了著名的 Kogelnik 公式。随后人们相继建立了厄米-高斯光束和拉盖尔-高斯光束的 $ABCD$ 定律[2, 3]。90 年代人们利用光流体模型和柯林斯公式[4] 等方法分别将 $ABCD$ 定律推广到线性条件下任意傍轴光束[5~8]。最近, Pare 和 Porras 等人[9, 10] 提出了平方律介质在三阶非线性条件下的 $ABCD$ 定律, 郭弘等人将非线性条件推广到高阶项[11], Subbarao 等人[12] 提出了非傍轴条件下的 $ABCD$ 定律, Tovar 等[13] 讨论了高斯光束在离轴复数折射率介质传输的 $ABCD$ 定律。

稳态标量衍射积分, 包括惠更斯-菲涅耳原理、菲涅耳-基尔霍夫衍射积分和菲涅耳衍射积分等, 是古典波动光学理论的出发点[14, 15]。有关工作主要包括两个方面, 第一, 回到原始的菲涅耳-基尔霍夫衍射积分, 研究非傍轴高斯激光光束或任意波前的光束通过非对称介质、任意形状光阑的衍射; 第二, 将它们推广用于处理包含复杂光学系统的空域衍射问题, 即例如 $ABCD$ 系统的惠更斯积分[4, 15], 进一步推广用于研究更普遍的时-空域衍射[16]。Wright 等[17] 利用路径积分方法推出了类透镜介质中的惠更斯积分。

* 国家自然科学基金重点项目(69789801)、广东省自然科学基金重点项目(970842)及团队项目(20003061)、教育部霍英东青年教师基金及国家高技术惯性约束聚变委员会资助课题。

收稿日期: 2000-08-30; 收到修改稿日期: 2000-10-17

前文[18, 19] 将亥姆霍兹方程化为薛定谔方程的形式利用量子力学方法[20] 建立了描述光束传输的薛定谔形式体系。本文利用这个理论将 $ABCD$ 定律推广到有效质量因子守恒的系统, 提出了有效 $ABCD$ 定律, 并将有效 $ABCD$ 定律成立的系统称为有效 $ABCD$ 系统, 利用海森伯图像研究有效 $ABCD$ 系统的衍射积分。为了简单起见, 本文讨论轴对称系统傍轴光束的传输。

## 2 光束传输的基本参数

设真空中的光速、波数和波长分别为 $c$、$k_0$ 和 $\lambda_0$, 介质折射率 $n$ 的常数部分为 $n_0$。介质中亥姆霍兹方程可以写为

$$\nabla_{\perp}^2 \phi(\boldsymbol{r}, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(\boldsymbol{r}, z) + n^2(\boldsymbol{r}, z) k_0^2 \phi(\boldsymbol{r}, z) = 0, \tag{1}$$

式中 $\nabla_{\perp} = \partial/\partial \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ 为光束的 $d$ 维横截面位置矢量。设 $\phi(\boldsymbol{r}, z)$ 的慢变部分为 $\varphi(\boldsymbol{r}, z)$

$$\phi(\boldsymbol{r}, z) = \varphi(\boldsymbol{r}, z)\exp(\mathrm{i}kz). \tag{2}$$

式中, $k = n_0 k_0$ 在傍轴近似下, 利用狄拉克符号[20] 可以将(1) 式写为

$$\mathrm{i}\frac{n_0}{k}\frac{\partial}{\partial z}|\varphi(z)\rangle = H|\varphi(z)\rangle, \tag{3}$$

$$H = \frac{p^2}{2n_0} + V, \qquad V = \frac{n_0}{2}\left(1 - \frac{n^2}{n_0^2}\right), \tag{4}$$

式中 $p^2$ 为动量算子 $\boldsymbol{p}$ 模的平方[18, 19]。相应的动力学变量 $F$ 的期望值为 $\langle F\rangle = \langle\varphi|F|\varphi\rangle$。选择约化发散角(reduced slope)[15] 表达 $ABCD$ 矩阵, 则有[21]

$$AD - BC = 1. \tag{5}$$

如果引入归一化因子 $I$, 根据文献[18, 19], 光束的

束宽 $W$、发散角 $\Theta$、曲率半径 $R$ 和质量因子 $M$ 的定义分别为

$$W^2 = 4\langle r^2\rangle / Id,$$

$$\Theta^2 = 4\langle p^2\rangle / Id,$$

$$W^2/R = 2\langle \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\rangle / Id,$$

$$M^4 = k_0^2(W^2\Theta^2 - W^4/R^2)/4,$$

且

$$\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}z} = 2\frac{W^2}{n_0 R}, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}M^4}{\mathrm{d}z} = \frac{k^2 W^2}{4n_0^2}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}z} - \frac{k^2}{8}\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}^2 W^2}{\mathrm{d}z^2} - \frac{2}{n_0^2}\Theta^2\right]. \tag{7}$$

(7) 式可以用于判断光学系统的质量因子是否守恒。本文将质量因子守恒的系统称为 $ABCD$ 系统。当质量因子不守恒时, 如果(7) 式的右边可以化为全微分的形式, 即可以定义一个有效的发散角 $\Theta_{\mathrm{eff}}$ 使相应的有效质量因子

$$M_{\mathrm{eff}}^4 = k_0^2(W^2\Theta_{\mathrm{eff}}^2 - W^4/R^2)/4$$

守恒, 本文称之为有效 $ABCD$ 系统。

# 3 衍射积分

引入进化算子 $U(z,0)$[20], 则

$$|\varphi(z)\rangle = U(z,0)|\varphi(0)\rangle,$$

$$\mathrm{i}\frac{n_0}{k}\frac{\partial}{\partial_z}U(z,0) = HU(z,0)$$

显然

$$|\varphi_1(z_1)\rangle = U_1(z_1,0)|\varphi(0)\rangle,$$

$$|\varphi_2(z_2)\rangle = U_2(z_2,0)|\varphi(0)\rangle,$$

根据(2) 式可得

$$|\phi_2(z_2)\rangle = \exp[\mathrm{i}k(z_2 - z_1)]T(z_2,z_1)|\phi_1(z_1)\rangle, \tag{8}$$

式中 $T(z_2,z_1) = U_2(z_2,0)U_1^{+}(z_1,0)$, “+” 表示厄米共轭算子。$T(z_2,z_1)$ 在空间坐标表象的表示就是相应的格林算子

$$G(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1) = \langle \boldsymbol{r}_2|T(z_2,z_1)|\boldsymbol{r}_1\rangle,$$

则

$$\phi_2(\boldsymbol{r}_2,z_2) = \exp[\mathrm{i}k(z_2 - z_1)]\times \int G(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;z_2,z_1)\phi_1(\boldsymbol{r}_1,z_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1. \tag{9}$$

对于常数折射率介质, $n = n_0$, 由(4) 式可知 $H = p^2/2n_0$。根据(8) 式容易证明, (9) 式就是菲涅耳衍射积分。对于一般介质, 根据进化算子计算衍射积分十分复杂, 文献[22, 23] 曾给出微扰的方法。

# 4 $ABCD$ 系统

由于质量因子守恒, 可以定义一个复数曲率半径 $q$[18, 19]:

$$q^{-1} = R^{-1} + 2\mathrm{i}M^2W^{-2}k_0^{-1}.$$

根据(6) 式和(7) 式可得质量因子守恒的充要条件:

$$\frac{\mathrm{d}M^4}{\mathrm{d}z} = 0 \Leftrightarrow n_0\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} = 1 - q^2\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}. \tag{10}$$

引入里卡蒂代换[13]

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{n_0}{u(z)}\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}, \tag{11}$$

可得

$$n_0^2\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}u(z) = 0. \tag{12}$$

这是一个二阶齐次常微分方程, 其解可以表达为两个独立函数的线性组合[13]

$$u(z) = A(z)u(0) + B(z)n_0\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}z}, \tag{13}$$

其微分也可以表达成相似的形式[13]

$$n_0\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z} = C(z)u(0) + D(z)n_0\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}z}. \tag{14}$$

取(13) 式的微分并与(14) 式对照, 并取(14) 式的微分并与(12) 式对照, 分别可得

$$C = n_0\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}, \quad D = n_0\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{n_0}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}. \tag{16}$$

文献[18, 19] 曾得到(15) 式, 但由于光束传输参数定义上的差别, 相差一个 $n_0$ 因子。显然 $AD - BC$ 与 $z$ 无关, 一般取为(5) 式。根据(11) 式、(13) 式和(14) 式可得 $ABCD$ 定律

$$q_2^{-1} = (C + Dq_1^{-1})(A + Bq_1^{-1})^{-1}. \tag{17}$$

根据(10) 式和以上推导可知, 质量因子守恒是 $ABCD$ 定律成立的充要条件。这是本文的重要结论之一。

一般来说, $A$、$B$、$C$ 和 $D$ 为实数, 分别取(17) 式的实部和虚部, 利用(5) 式可得

$$W_2^2 = (A + BR_1^{-1})^2W_1^2 + B^2\frac{4}{k_0^2}M_1^4W_1^{-2}, \tag{18}$$

$$R_2^{-1}W_2^2 = (A + BR_1^{-1})(C + DR_1^{-1})W_1^2 + BD(4/k_0^2)M_1^4W_1^{-2}. \tag{19}$$

由于质量因子守恒, 根据(7) 式可得发散角 $\Theta$ 的表达式, 利用(6) 式、(15) 式、(16) 式、(18) 式和(19) 式可得:

$$\Theta_2^2 = (C + DR_1^{-1})^2W_1^2 + D^2(4/k_0^2)M_1^4W_1^{-2}. \tag{20}$$

虽然 Porras 等人[7]利用推广的惠更斯积分[4,15]经过复杂的推导也得到了(18)式~(20)式,本文的推导却非常简单。分别对(18)式和(20)式求微分,利用(5)式、(6)式和(19)式可得(15)式和(16)式。根据(18)式、(15)式和(16)式求复数曲率半径的微分可知(10)式成立。这些推导说明,本文讨论是自恰的。

在海森伯图像中,状态 $|\varphi_H\rangle$ 和动力学变量 $F_H$ 分别为[20]

$$|\varphi_H\rangle = U^+(z,0)|\varphi(z)\rangle,$$
$$F_H = U^+(z,0)FU(z,0).$$

根据光束传输参数的定义,由(18)式和(20)式得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{H2} &= A\boldsymbol{r}_{H1} + B\boldsymbol{p}_{H1}, \\ \boldsymbol{p}_{H2} &= C\boldsymbol{r}_{H1} + D\boldsymbol{p}_{H1}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{H2} &= -(A\boldsymbol{r}_{H1} + B\boldsymbol{p}_{H1}), \\ \boldsymbol{p}_{H2} &= -(C\boldsymbol{r}_{H1} + D\boldsymbol{p}_{H1}). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

根据空间坐标算子和动量算子的对易关系和(21)式或(22)式可以证明(5)式。

根据光学变换的物理意义,本文取(21)式来进行讨论。根据(21)式和(8)式可得[为简单起见,将 $T(z_2, z_1)$ 简写为 $T$]

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}T &= AT\boldsymbol{r} + BT\boldsymbol{p}, \\ \boldsymbol{p}T &= CT\boldsymbol{r} + DT\boldsymbol{p}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Nazarathy 等人[24]将 $T$ 称为正则算子,从(23)式出发建立了算子理论。从本文上面的推导可知,(23)式是 $ABCD$ 系统的基本特性。利用表象技术很容易从(33)式推出 $ABCD$ 系统的衍射积分公式。

在空间坐标表象中,用左矢 $\langle\boldsymbol{r}_2|$ 和右矢 $|\boldsymbol{r}_1\rangle$ 分别左乘和右乘(23)式可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_2 G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1) = {} & A\boldsymbol{r}_1 G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1) + \\ & \mathrm{i}B\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1) = {} & C\boldsymbol{r}_1 G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1) + \\ & \mathrm{i}D\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1). \end{aligned} \tag{25}$$

根据以上两式求出格林函数

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1) = {} & \left[-\frac{\mathrm{i}}{B\lambda_0}\right]^{\frac{d}{2}} \times \\ & \exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{B\lambda_0}(Ar_1^2 - 2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 + Dr_2^2)\right], \end{aligned} \tag{26}$$

代入(9)式可得空间坐标表象中的惠更斯积分[4,15]。

## 5　有效 $ABCD$ 系统

由于常用光学元件都是 $ABCD$ 系统,光束质量因子守恒被认为是理所当然的,甚至有人认为没有必要讨论光束质量因子是否守恒。然而,光束质量因子不守恒的系统确实存在。在这种情况下就必须推广 $ABCD$ 定律,寻找 $ABCD$ 定律的新的表达形式。

由于有效质量因子守恒,可以定义一个有效复数曲率半径

$$q_{\mathrm{eff}}^{-1} = R^{-1} + \mathrm{i}2M_{\mathrm{eff}}^2 W^{-2}/k_0.$$

根据(6)式和(7)式可得

$$\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{eff}}^4}{\mathrm{d}z} = 0 \Leftrightarrow n_0\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}z} = 1 - q_{\mathrm{eff}}^2\frac{\mathrm{d}\Theta_{\mathrm{eff}}^2}{\mathrm{d}W^2}. \tag{27}$$

与上节类似,根据上式可以证明,有效质量因子守恒是如下 $ABCD$ 定律成立的充要条件:

$$q_{2\mathrm{eff}}^{-1} = (C + Dq_{1\mathrm{eff}}^{-1})(A + Bq_{1\mathrm{eff}}^{-1})^{-1}, \tag{28}$$

其中 $A$、$B$、$C$ 和 $D$ 满足(5)式。为了讨论的方便,本文将以上 $ABCD$ 定律称为有效 $ABCD$ 定律,将有效 $ABCD$ 定律成立的光学系统称为有效 $ABCD$ 系统。利用与讨论 $ABCD$ 系统类似的方法容易证明,只要做代换 $\Theta^2 \to \Theta_{\mathrm{eff}}^2$、$M \to M_{\mathrm{eff}}$ 和 $q \to q_{\mathrm{eff}}$,(15)式、(16)式和(18)式~(20)式仍然成立。为了讨论的方便,这里列出部分方程:

$$\begin{aligned} W_2^2 = {} & (A + BR_1^{-1})^2 W_1^2 + \\ & B^2\frac{4}{k_0^2}M_{1\mathrm{eff}}^4 W_1^{-2}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{2\mathrm{eff}}^2 = {} & (C + DR_1^{-1})^2 W_1^2 + \\ & D^2\frac{4}{k_0^2}M_{1\mathrm{eff}}^4 W_1^{-2}. \end{aligned} \tag{30}$$

由于有效发散角没有一般表达式,不能一般地推导空间坐标算子与动量算子之间的变换关系。本文只讨论束宽对轴坐标的二阶微分为常数的傍轴传输。根据文献[18]可以按下文(31)式定义守恒的有效发散角,使相应的有效质量因子守恒,可得有效 $ABCD$ 定律为

$$q_{2\mathrm{eff}} = q_{1\mathrm{eff}} + (z_2 - z_1)/n_0,$$

因此,

$$\begin{aligned} A &= D = 1, \\ C &= 0, \\ B &= (z_2 - z_1)/n_0, \\ \Theta_{\mathrm{eff}}^2 &= \Theta^2 - \frac{4n_0}{Id}\langle \boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V\rangle. \end{aligned} \tag{31}$$

根据光束传输参数的定义和海森伯图像的定义, 由(29) 式~ (31) 式可得:

$$r_{H2}^{2} = (A\boldsymbol{r}_{H1} + B\boldsymbol{p}_{H1})^{2} - n_0 B^{2}[\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z,\boldsymbol{r})]_{H1}, \tag{32}$$

$$p_{H2}^{2} - n_0[\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z,\boldsymbol{r})]_{H2} = (C\boldsymbol{r}_{H1} + D\boldsymbol{p}_{H1})^{2} - n_0 D^{2}[\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z,\boldsymbol{r})]_{H1}, \tag{33}$$

$$r^{2}T = T(A\boldsymbol{r} + B\boldsymbol{p})^{2} - n_0 B^{2} T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z_1,\boldsymbol{r}), \tag{34}$$

$$p^{2}T - n_0 D^{2}\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z_2,\boldsymbol{r})T = T(C\boldsymbol{r} + D\boldsymbol{p})^{2} - n_0 D^{2} T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z_1,\boldsymbol{r}). \tag{35}$$

与(21) 式或(23) 式相比可知, $ABCD$ 系统的空间坐标算子与动量算子变换是线性的, 而有效 $ABCD$ 系统的空间坐标算子与动量算子的变换则是非线性的。

由于非线性变换很难严格求解, 本文采用迭代计算。将满足(23) 式的变换记为 $T_0$。在空间坐标表象中, 与 $T_0$ 相应的格林函数(26) 式记为 $G_0$。设满足(34) 式和 (35) 式的变换可以写为 $T = (1 + T_1)T_0$, 相应的格林函数为

$$G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1) = G_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1) + \int G_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3; z_2, z_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 G_0(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1; z_2, z_1). \tag{36}$$

利用变换 $T_0$ 的进化算子性质($T_0^{+} = T_0^{-1}$), 根据(23) 式、(34) 式和(35) 式可得

$$[r^{2}, T_1] = - n_0 B^{2} T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z_1,\boldsymbol{r})T_0^{+}, \tag{37}$$

$$[p^{2}, T_1] = n_0 T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z_2,\boldsymbol{r})(1 + T_1) - n_0 D^{2} T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp} V(z_1,\boldsymbol{r})T_0^{+}, \tag{38}$$

式中[·]为量子力学的泊松括号(对易子)[20]。在空间坐标表象中(37) 式可以表示为

$$G_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3; z_2, z_1) = -\frac{n_0 B^{2}}{r_2^{2} - r_3^{2}}\int G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_4; z_2, z_1)\boldsymbol{r}_4\cdot\frac{\partial V(z_1, \boldsymbol{r}_4)}{\partial \boldsymbol{r}_4}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4 \times G_0^{*}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4; z_1, z_2). \tag{39}$$

式中 $G_0^{*}$ 为 $G_0$ 的共轭复数。根据(36) 式和(39) 式迭代求解就可以得到光束传输的格林函数。由于势能函数 $V(z_1, \boldsymbol{r})$ 一般为小量, 将(36) 式代入(39) 式忽略右边的 $T_1$ 项可得

$$G_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3; z_2, z_1) = -\frac{n_0 B^{2}}{r_2^{2} - r_3^{2}}\int G_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_4; z_2, z_1)\boldsymbol{r}_4\cdot\frac{\partial V(z_1, \boldsymbol{r}_4)}{\partial \boldsymbol{r}_4}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4 \times G_0^{*}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4; z_1, z_2). \tag{40}$$

正如文献[18]所讨论的, 克尔介质中的傍轴传输就满足束宽对轴坐标的二阶微分为常数的条件。一般的传输计算是利用分步傅里叶变换解非线性薛定谔方程[25]。以上讨论表明, 只要通过简单的积分计算就可以得到严格的光束的传输。

**讨论** 质量因子守恒的光束传输可以定义复数曲率半径。$ABCD$ 定律用复数曲率半径表达。根据守恒的有效质量因子可以定义有效复数曲率半径。本文将用有效复数曲率半径表达的 $ABCD$ 定律称为有效 $ABCD$ 定律。利用光束传输的薛定谔形式理论可以得到复数曲率半径和有效复数曲率半径的进化方程, 本文证明(有效) 质量因子守恒是相应 $ABCD$ 定律成立的充要条件。

本文进一步利用量子力学的进化算子和空间坐标表象表达衍射积分, 利用量子力学的海森伯图像从 $ABCD$ 系统和束宽对轴坐标的二阶微分为常数的有效 $ABCD$ 系统的轴对称傍轴光束传输的参数进化方程得到了空间坐标算子和动量算子的进化方程。对于 $ABCD$ 系统, 本文得到了空间坐标表象中的惠更斯积分, 验证了光束传输的薛定谔形式理论。对于束宽对轴坐标的二阶微分为常数的有效 $ABCD$ 系统, 本文得到了可通过简单的积分迭代求解衍射积分的解析表达式, 为复杂系统衍射积分的计算建立了一种新方法。

## 参 考 文 献


[1] Kogelnik H. Imaging of optical mode-resonators with internal lenses. *Bell Syst. Tech. J.*, 1965, **44**(3):455~494

[2] Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. *Proc. IEEE*, 1966, **54**(10):1312~1329

[3] Taché J P. Derivation of the *ABCD* law for Laguerre-Gaussian beams. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(14):2698~2700

[4] Collins S A J. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**(9):1168~1171

[5] 邓锡铭,丁丽明,叶陈春. *ABCD* 定律的推广. 中国激光, 1990, **17**(4):259~264

[6] Bélanger P A. Beam propagation and *ABCD* ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4):196~198

[7] Porras M A, Aida J, Bernabeu E. Complex beam parameter and *ABCD* law for non-Gaussian and nonspherical light beams. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(30):6389~6420

[8] Deng X, Guo H, Cao Q. Invariant integral and statistical equations of paraxial light beam transmission in free space. *Science in China (A)*, 1997, **40**(5):546~554

[9] Paré C, Bélanger P A. Beam propagation in a linear and nonlinear lens-like medium using *ABCD* ray matrices: the method of moments. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, **24**(5):S1051~S1070

[10] Porras M A, Aida J, Bernabeu E. Nonlinear propagation and transformation of arbitrary laser beams by means of the generalized *ABCD* formalism. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(30):5885~5892

[11] 郭 弘, 刘承宜, 胡 巍 等. 多阶强度非线性条件下的光束传输研究. 中国科学(A 辑), 1999, **29**(3):276~282

[12] Subbarao D, Uma R, Singh H. Paraxial theory of self-focusing of cylindrical laser beams. I. *ABCD* laws. *Phys. Plasmas.*, 1998, **5**(9):3440~3450

[13] Tovar A A, Casperson L W. Generalized beam matrices: Gaussian beam propagation in misaligned complex optical systems. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1995, **12**(7):1522~1533

[14] Born M, Wolf E. *Principles of Optics*, 5th ed. Oxford: Pergman, 1975. 412~516

[15] Siegman A E. *Lasers*. Mill Valley, Calif: Oxford Univ. Press, 1986. 626~662

[16] Kostenbauder A G. Ray-pulse matrices: A rational treatment for dispersive optical systems. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, **QE-26**(6):1148~1157

[17] Wright E M, Garrison J G. Path-integral derivation of the complex *ABCD* Huygens integral. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **4**(9):1751~1755

[18] 刘承宜, 郭 弘, 胡 巍 等. 光束传输的 Schroedinger 形式理论研究. 中国科学(A), 2000, **30**(1):54~62

[19] Liu T C Y, Guo H, Hu W *et al.*. A Schroedinger Formulation reasearch for paraxial light beam propagation and its application to the propagation through nonlinear square law media. *Chin. Phys. Lett.*, 2000, **17**(10):734~736

[20] Schiff L I. *Quantum Mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968. 167~180

[21] Luneberg R K. *Mathematical Theory of Optics*. Berkeley: University of California Press, 1964. 216226

[22] 刘承宜, 郭 弘, 刘 勇. 稳态等离子体电子密度的 X 光激光干涉测量方法研究. 强激光与粒子束, 1999, **11**(5):601~604

[23] Liu T C Y, Guo H, Hu W *et al.*. A Schroedinger formulation for laser beam propagation. *Proc. SPIE*, 1999, **3862**:75~79

[24] Nazarathy M, Shamir J. First-order optics——a canonical operator representation: Lossless systems. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(3):356~364

[25] Agrawal G P. *Nonlinear Fiber Optics*, 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1995. 50~54


# Diffraction Integral of Effective *ABCD* Systems


Liu Timon Cheng-Yi  Hu Wei  Lu Guangshan  Guo Hong

*(Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou* 510631*)*


(Received 30 August 2000; revised 17 October 2000)


**Abstract:** Within the frame of the Schroedinger formulation of light beam propagation, the *ABCD* law is extended to the so-called effective *ABCD* system which effective beam quality factor is conservative. The evolution equations of beam width, curvature radius and effective divergence are derived, respectively. For the effective *ABCD* systems which second derivative of beam width square with respect to the axial coordinate is a constant, the nonlinear evolution equations of spatial coordinate operator and momentum operator are obtained by means of Heisenberg picture, respectively, and the corresponding Huygens integral is solved by a simple iteration method.


**Key words:** light beam propagation; *ABCD* law; Huygens′ integral