

文章编号 : 0253-2239(2001)10-1219-05

飞秒光脉冲传输特性的矩法分析*

王 里¹⁾³⁾ 李仲豪¹⁾³⁾ 周国生¹⁾²⁾³⁾

(1), 山西大学电子信息技术系, 太原 030006
(2), 北京大学区域光纤通信网与新型光通信系统国家重点实验室, 北京 100871
(3), 国家教育部量子光学重点实验室, 太原 030006

摘要: 利用矩法分析了飞秒光脉冲的传输特性。结果表明, 三阶色散及自陡峭等效应不仅影响脉冲的对称性, 同时对脉冲宽度也有着直接的影响。这些结果不依赖于脉冲的形状, 具有一定的普遍性。在此基础上给出了双曲正弦型输入脉冲在介质中的传输特性, 得到了近似解析解, 并与直接演化高阶非线性薛定谔方程作了比较。这些结果有助于数十飞秒光脉冲在短距离内的理论分析和实验指导。

关键词: 矩法; 飞秒光脉冲; 光脉冲传输
中图分类号: TN012 文献标识码: A

1 引 言

飞秒光脉冲的产生和传输越来越引起人们的兴趣。在通信领域、高密度存储以及要用超快过程进行观察研究的领域(如生物和化学样品的研究), 都要求有能在一定距离上传输的尽量短的光脉冲。人们已经在理论上做了大量的分析工作。而在实验上, 已经能够产生 10 fs 以下的光脉冲^[1]。

介质中超短光脉冲的传输由许多非线性效应决定。这些效应的相互作用导致了丰富的物理现象, 如孤子^[2-5]、孤立波^[6]、光脉冲压缩^[2,7]等。对于脉宽大于 100 fs 的光脉冲传输, 可以只考虑低阶色散和低阶非线性效应。但在脉宽小于 100 fs 时, 高阶色散和高阶非线性效应是不可忽略的^[2]。一些文献已给出了这些效应作为孤子微扰的理论分析^[3-5]。

本文讨论脉宽为数十飞秒的超短光脉冲在介质中的传输特性。因此我们在非线性薛定谔方程的基础上考虑高阶色散和高阶非线性, 利用矩法给出一些能够应用于任意形状光脉冲的普遍结果。并且结合实际情况, 研究了二次方双曲正弦型入射光脉冲的参数演化特性。为了验证近似解析解的精确程度, 进行了 52 fs 光脉冲的计算机模拟传输。结果表

明在一定的传输距离上, 我们的近似解与数值模拟的结果吻合得较好。

2 基本方程及矩法分析

介质中 10 fs~100 fs 光脉冲的传输由下述修正后的非线性薛定谔方程描述^[2]

$$i \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \gamma |q|^2 q + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3} - ia \frac{\partial}{\partial t} (|q|^2 q) \quad (1)$$

其中 $t = \tau - z/v_g$, $a = 2\gamma/\omega_0$, q 为脉冲的电场包络振幅, τ, z 为时空坐标, v_g 为脉冲群速度, ω_0 为载波频率, β_2, β_3 分别为二阶和三阶色散系数, γ 为非线性系数, a 为自陡峭系数。由于自频移效应可以被抑制掉^[4], 在这里不考虑它的影响。

二阶色散长度、三阶色散长度、非线性长度、自陡峭长度分别为:

$$L_D = W_0^2 / |\beta_2|, \\ L'_D = W_0^3 / |\beta_3|, \\ L_{NL} = (\gamma P_0)^{-1}, \\ L_{ST} = W_0 \omega_0 (\gamma P_0)^{-1}.$$

其中 W_0 为初始脉宽, P_0 为初始峰值功率。

下面做矩法分析。我们假设脉冲包络振幅 q 及其对时间的导数在 $t = \pm \infty$ 时为零, 即

* 国家自然科学基金(10074041)和山西省自然科学基金(991004)资助课题。

收稿日期 2000-04-07; 收到修改稿日期 2000-10-16

$$q(z, t)|_{t=\pm\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial^n q(z, t)}{\partial t^n} \right|_{t=\pm\infty} = 0, \quad \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dt = 0. \quad (2)$$

(n = 1, 2, \dots).

将(1)式乘以 $q^*(z, t)$, 再减去它的共轭式, 并在整个时间域中积分得能量演化

这说明在传输过程中总能量保持不变。同样方法得动量和哈密顿量的演化方程

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \left(q \frac{\partial q^*}{\partial t} - q^* \frac{\partial q}{\partial t} \right) dt = 2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial |q|^2}{\partial t} \left(q^* \frac{\partial q}{\partial t} - q \frac{\partial q^*}{\partial t} \right) dt, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\beta_2 \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right|^2 + \gamma |q|^4 \right) dt = \chi \left(\beta_3 \gamma - 2a\beta_2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial |q|^2}{\partial t} \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right|^2 dt. \quad (4)$$

可以看到, 动量的演化, 只与自陡峭项有关。当不考虑三阶色散、自陡峭效应时, 动量和哈密顿量是守恒量。

我们还计算了一阶矩和二阶矩的演化方程

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} t q q^* dt = \frac{i\beta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(q^* \frac{\partial q}{\partial t} - q \frac{\partial q^*}{\partial t} \right) dt + \frac{\beta_3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right|^2 dt + \frac{3a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |q|^4 dt, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} (t - T) q q^* dt &= i\beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} (t - T) \left(q^* \frac{\partial q}{\partial t} - q \frac{\partial q^*}{\partial t} \right) dt + \\ &\beta_3 \int_{-\infty}^{\infty} (t - T) \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right|^2 dt + 3a \int_{-\infty}^{\infty} (t - T) |q|^4 dt. \end{aligned} \quad (6)$$

一般情况, 一阶矩代表脉冲质心, 即(5)式反映了脉冲对称性的演化。(6)式可表示脉宽的演化。色散和自陡峭会以不同的方式影响脉冲对称性和脉宽。

原则上, 采用上述类似的方法可求得各高阶矩, 获得无穷多个方程, 它们从不同的侧面描述着光脉冲的传输特性。上述这些结果不依赖于入射脉冲的形状, 具有普遍性。总起来说, 1) 矩法严格地给出了光脉冲的一些平均量(能量、总动量、总哈密顿量、脉冲对称性、脉宽等)随距离变化的特性。因此可以用上述公式直接检验数值结果的正确性, 了解光脉冲的基本特性, 不用直接求方程的拉格朗日函数, 就可得到类似变分法的结果, 这对那些不能直接求拉氏量的方程更有意义。与变分法相似, 可用这种方法进行近似分析。这一近似法的优缺点与变分法相似, 它的精确程度主要决定于光脉冲形状选择的合理性。2) 在数学上, 矩法将高阶非线性方程化为一阶常微分方程组, 由此可以进行解的稳定性分析及方程组的数值计算。

我们考虑输入脉冲是二次方双曲正割型的, 但参数与稳态不同, 在实际介质传输中, 由于各种物理效应(如三阶色散、自陡峭等)的影响, 飞秒光脉冲会发生畸变。我们设想在传输距离不太远的情况下, 光脉冲保持自相似特性, 即脉冲仍具有二次方双曲正割的形式, 只是其特征参数随距离 z 变化。设在介质中传输的脉冲为

$$q(z, t) = A(z) \operatorname{sech} \left[\frac{t - T(z)}{W(z)} \right] \times \exp \left\{ -iS(z) \left[\frac{t - T(z)}{W(z)} \right]^2 - i\Omega(z)t \right\}, \quad (7)$$

令 $P(z) = |A(z)|^2$, 表示脉冲的峰值功率。(7)式所描述的光脉冲有五个特征参数: 峰值功率 $P(z)$ 、脉宽 $W(z)$ 、峰值移动值 $T(z)$ 、啁啾参数 $S(z)$ 和频移 $\Omega(z)$, 它们在传输过程中可能随距离 z 发生变化。下面我们分析脉冲的这些特征参数在介质中的变化规律。

将近似解(7)式分别代入演化方程(2)式 ~ (6)式, 经过积分计算, 我们可相应地得到一组光脉冲各特征参数随距离 z 变化的方程

$$\frac{dI}{dz} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{2aIS}{3W^3}, \quad (9)$$

3 脉冲演化的一种近似解析解

鉴于(1)式具有稳定的双曲正割型解, 而且实际中产生的超短光脉冲大多具有双曲正割波形, 这里

$$\frac{d}{dz} \left[\beta_2 \left(\frac{1 + \pi^2 S^2}{3W^2} + \Omega^2 \right) + \frac{\gamma I}{3W} \right] = \frac{2IS\Omega}{3W^3} (3a\beta_2 - \beta_3\gamma), \quad (10)$$

$$\frac{dT}{dz} = \beta_2\Omega + \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{1 + \pi^2 S^2}{3W^2} + \Omega^2 \right) + \frac{aI}{2W} \quad (11)$$

$$\frac{dW^2}{dz} = 4S(\beta_2 + \beta_3\Omega). \quad (12)$$

这里 $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dt = 2PW$ 。由上述方程, 可以看到啁啾的产生将使脉宽、频移等参数随距离 z 变化。此外可以验证, 当啁啾为零时 (8) 式 ~ (12) 式的稳态传输条件与我们最近获得的精确解条件^[6]是一致的。

由于 (9) 式 ~ (12) 式互相耦合, 难以直接获得光脉冲的每个特征参量随 z 的变化规律。下面, 我们将引入一综合参数, 使该一阶微分方程组退耦, 从而分别得到脉冲各参量随 z 的演化规律。将 (9) 式代入 (10) 式和 (12) 式, 分别得

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1 + \pi^2 S^2}{W^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma\beta_3}{a\beta_2} - 1 \right) + \frac{\gamma I}{\beta_2 W} \right] = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{W} + \frac{3\Omega}{2aI} (2\beta_2 + \beta_3\Omega) \right] = 0. \quad (14)$$

由 (13) 式、(14) 式两个全微分式可得

$$\frac{1 + \pi^2 S^2}{W^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma\beta_3}{a\beta_2} - 1 \right) \Omega^2 + \frac{\gamma I}{\beta_2 W} = C_1, \quad (15)$$

$$\frac{1}{W} + \frac{3\Omega}{2aI} (2\beta_2 + \beta_3\Omega) = C_2. \quad (16)$$

其中 C_1, C_2 为两个常数, 由初始条件确定, 是脉冲演化时的两个守恒量。由 (16) 式解得

$$\Omega = (-\beta \pm Y)\beta_3. \quad (17)$$

这里我们引入了综合参数 Y , 其定义为

$$Y = \sqrt{\beta_2^2 + \frac{2\beta_3 a I}{3} \left(C_2 - \frac{1}{W} \right)},$$

将它反解得

$$\frac{1}{W} = \frac{\beta_2^2 - Y^2}{B_1} + C_2, \quad (18)$$

其中 $B_1 = 2\beta_3 a I / 3$ 。

鉴于 (1) 式是由缓变包络 (准单色) 近似导出的, 频移 Ω 应满足 $\Omega/\omega_0 \ll 1$, 因此 (17) 式中 Y 前的正负号由 β_2 的正负确定, 以保证 Ω 的绝对值取值较小, 即 $\beta_2 < 0$ 时取负号; $\beta_2 > 0$ 时取正号。将 (17) 式、(18) 式代入 (15) 式可得

$$\pi S = \pm \left(C_3 \pm C_4 Y + C_5 Y^2 - \frac{Y^4}{B_1^2} \right)^{1/2} W, \quad (19)$$

其中

$$C_3 = C_1 - C_2 \frac{\gamma I}{\beta_2} - \frac{3\beta_2^2}{\beta_3^2} \left(\frac{\gamma\beta_3}{a\beta_2} - 1 \right) -$$

$$\frac{\beta_2^2 a I}{B_1 \beta_3} - \left(\frac{\beta_2^2}{B_1} + C_2 \right)^2,$$

$$C_4 = \frac{3\beta_2}{\beta_3^2} \left(\frac{\gamma\beta_3}{a\beta_2} - 1 \right),$$

$$C_5 = \frac{2}{B_1} \left(\frac{\beta_2^2}{B_1} + C_2 + \frac{aI}{2\beta_3} \right).$$

在上式中, C_4 前的正负号与 (17) 式一致。将上式代入 (12) 式并利用 (18) 式得

$$\frac{dY}{dz} = \pm \frac{B_1}{\pi} \left(C_3 \pm C_4 Y + C_5 Y^2 - \frac{Y^4}{B_1^2} \right)^{1/2} \times \left(C_2 + \frac{\beta_2^2}{B_1} - \frac{Y^2}{B_1} \right). \quad (20)$$

这样, 我们最终获得了参数 Y 的一阶常微分方程, 其中 B_1, C_3, C_4, C_5 为不随距离变化的常数。一旦得到 Y 随 z 的演化规律, 根据 (17) 式、(18) 式、(19) 式就容易直接得到频移 Ω 、脉宽 W 、啁啾参数 S 随 z 的变化规律。将 Y 值与 (15) 式代入 (11) 式, 由常用程序求出峰值移动 T 随 z 的变化规律, 不过 Y 的变化规律难以解析给出, 通常需要数值求解。

4 脉冲传输的数值模拟

为验证模型的精确程度, 我们对 (1) 式采用分步傅里叶变换作数值计算来模拟脉冲演化。取介质参数为: $\gamma = 2.63 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$, $\beta_2 = -53.2 \text{ ps}^2/\text{km}$, $\beta_3 = -0.13 \text{ ps}^3/\text{km}$ 。初始光脉冲的参数如下: 中心波长 $\lambda_0 = 1.53 \text{ }\mu\text{m}$, 脉宽 $W_0 = 30 \text{ fs}$, 峰值功率 $P_0 = 1.13 \times 10^4 \text{ W}$, 峰值移动、啁啾和频移分别为零。各种色散长度和非线性长度分别为: $L_D = 0.017 \text{ m}$, $L'_D = 0.208 \text{ m}$, $L_{NL} = 0.034 \text{ m}$, $L_{ST} = 1.246 \text{ m}$ 。在上面给出的参数 (当 β_2 取值为给定值的一半时, 所给参数满足稳态传输) 下, 我们讨论脉冲的瞬态演化特性。因为实际传输中脉冲的啁啾是近似线性的, 我们对数值模拟中的脉冲相位进行了二次拟合, 从而求得啁啾参数 S 和频移 Ω 。

图 1 给出了直接数值模拟演化方程 (1) (实线) 和矩法近似解析求解 (虚线) 的脉冲各特征参数的比较结果。其中, 脉宽用半高全宽表示 (即 $\text{HMF}W =$

1.763 W),脉冲功率用初始峰值功率 P_0 归一化。图 1(a) 图 1(b) 图 1(c) 分别描述了脉宽、啁啾参数和峰值移动随距离 z 的演化。从图中看出,在 0.615 m(近 10 个二阶色散长度, 5 个非线性长度)的距离上,两者参数演化趋势一致。从图中可以看到随着距离的增大,脉冲逐渐展宽,同时脉冲将产生啁啾,并且其峰值发生移动。这是由于所取二阶色散量偏大(为稳态传输时所取值的两倍),非线性效应不足以补偿色散效应所致。

整个传输距离可大致分为两段分析。在 0~0.1 m 这段距离上,两者结果基本吻合。而在 0.1 m~0.165 m 这段距离上,数值模拟得到的结果在我们的解析解附近起伏。图 1(d)是在 0.1 m(近

0.5 个三阶色散长度和 0.1 个自陡峭长度)处的脉冲波形,可以看到由于高阶效应开始作用,实际传输的脉冲尾部已有一些抖动起伏。这意味着我们的近似解与方程的精确解有了偏离。随着传输距离的继续增大,高阶效应使得脉冲形状偏离二次方双曲正弦的程度增大。因此,在 0.1 m~0.165 m 这段上,我们的解析模型只反映出脉冲的平均特性。不过,仍能得到定性的结果。

图 2(a) 图 2(b) 分别给出了直接数值模拟传输中的 C_1 、 C_2 。这两个量在我们的近似解析解中是守恒量,但在模拟传输中有一定的起伏,并不是完全不变的。

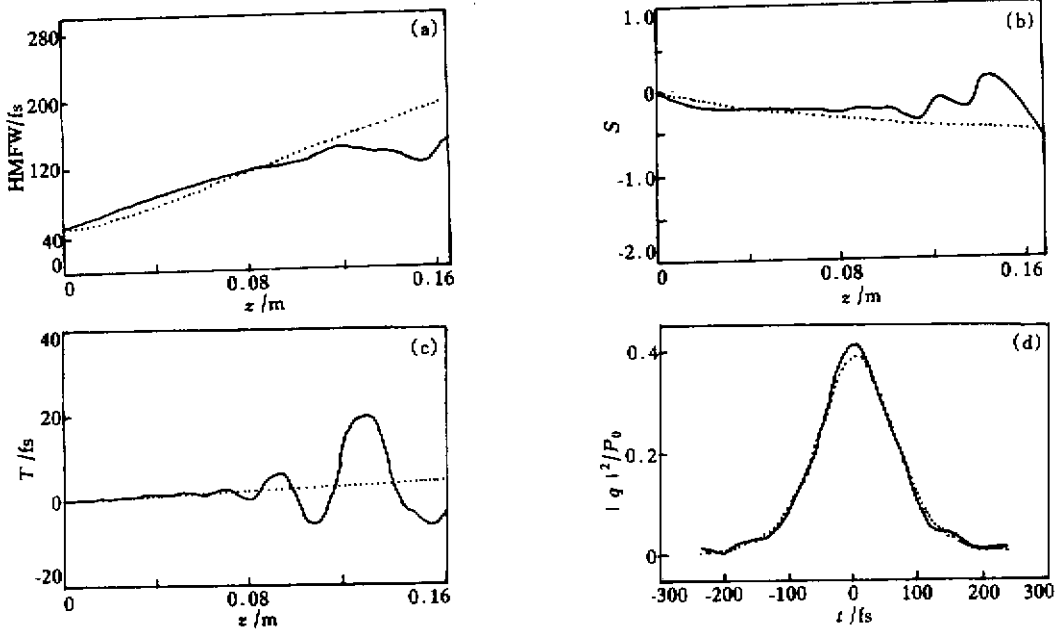


Fig. 1 (a)(b)(c) Evolution of the pulse parameters: pulse duration, chirp, and pulse position for the numerical simulation (solid lines) and the approximate solution (dashed lines). (d) Comparison of the pulse shape obtained at $z = 0.1$ m; the solid line is from the numerical simulation, and the dashed line is the result of the approximate solution

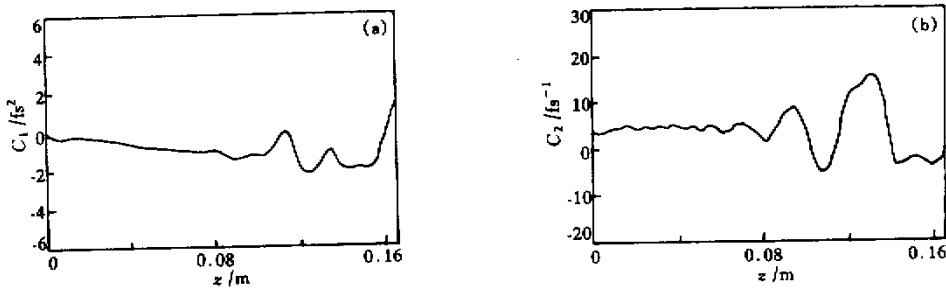


Fig. 2 Evolution of C_1 and C_2 for the numerical simulation

由上所述,在一定的距离内,矩法分析具有较高的精确度。因此,对于近场光探测等较短距离内的飞秒光脉冲传输,应用矩法分析,不仅可以进行有效

的解析分析,而且比直接数值演化高阶偏微分方程要简洁得多。

结论 用矩的方法分析了数十飞秒光脉冲在介质中的传输特性,结果表明,三阶色散及自陡峭等效应不仅影响脉冲的对称性,同时对脉冲宽度也有着直接的影响。这些结果不依赖于脉冲的形状,具有一定的普遍性。此外,我们考察了入射波形为双曲正割型的飞秒光脉冲的特征参数的变化规律,并与直接数值演化高阶非线性薛定谔方程的结果进行了比较,结果发现,在一定的距离内,二者吻合得较好,说明具有较高的精确度。这些结果对于近场光探测、超高密度光存贮以及光学链中介质参量补偿有指导和参考作用。

参 考 文 献

[1] Sutter D H, Steinmeyer G, Gallmann L *et al.*.

Semiconductor saturable-absorber mirror-assisted Kerr-lens mode-locked Ti:sapphire laser producing pulses in the two-cycle regime. *Opt. Lett.*, 1999, **24**(9):631~633

- [2] Agrawal G P 著. 胡国锋, 黄超译. 非线性光纤光学. 天津: 天津大学出版社, 1992
- [3] 杨祥林, 赵阳, 单雪康. 光纤非线性传输的电磁理论及其数值模拟. *中国科学(A)*, 1989, **19**(9):974~982
- [4] Blow K J, Doran N J, Wood D. Suppression of the soliton self-frequency shift by bandwidth-limited amplification. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1988, **5**(6):1301~1304
- [5] Haus H A, Moores J D, Nelson L E. Effect of third-order dispersion on passive mode locking. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(1):51~53
- [6] 李仲豪, 徐新民, 周国生. 飞秒脉冲在光纤中的无畸变传输孤子解. *光子学报*, 1997, **26**(Z1):513~516
- [7] 曹文华, 刘颂豪. 负三阶色散光纤中的孤子效应脉冲压缩. *量子电子学报*, 1999, **16**(1):9~14

Analysis of Transmission Properties of Femtosecond Pulse in Medium with Momentum Method

Wang Li^{1),3)} Li Zhonghao^{1),3)} Zhou Guosheng^{1),2),3)}

- (1), Department of Electronics and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006
- (2), National Lab on Local Fiber-Optic Communication Network and Advanced Optical Communication System, Department of Electronics, Beijing University, Beijing 100871
- (3), The Key Laboratory of Quantum Optics, Ministry of Education, Taiyuan 030006

(Received 7 April 2000; revised 16 October 2000)

Abstract: The transmission properties of femtosecond optical pulse are analyzed with the momentum method. The results show that the third order dispersion and self-steep directly affect not only the property of symmetry of pulse, but also the width of it. The results are independent of the shape of pulse, and so it is of certain universalism. Using the pulse in the shape of sech^2 , the approximate solution has been obtained and compared with the numerical simulation of evolution equation. This work will be helpful to the theory and experiment of 10 fs~100 fs optical pulse transmission within short distance.

Key words: momentum method; femtosecond optical pulse; transmission of optical pulse