

文章编号 : 0253-2239(2001)10-1214-05

双曲余弦高斯光束通过有光阑限制的 ABCD 光学系统的传输*

王喜庆¹⁾ 吕百达²⁾

(1), 西南交通大学应用物理系, 成都 610031
(2), 四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064

摘要: 对双曲余弦高斯光束通过有硬边光阑的一阶 ABCD 光学系统的传输进行了研究, 采用将矩形域函数表示为复高斯函数叠加的技巧, 推导了解析的传输公式, 在特殊情况下, 该公式简化为在无光阑情况下的传输公式。对双曲余弦高斯光束通过有光阑限制的薄透镜聚焦系统进行了数值计算, 计算结果与直接由柯林斯(Collins)公式所得结果一致, 且此解析方法便于进行物理分析, 可节约大量机时。

关键词: 双曲余弦高斯光束; 硬边光阑; ABCD 光学系统; 传输公式

中图分类号: TN012 文献标识码: A

1 引 言

最近, Casperson 等人证明了厄米-正弦类高斯(HSG)光束是直角坐标系下波动方程的一组解^[1], 作为厄米-正弦类高斯光束的特例之一——双曲余弦高斯(ChG)光束由于在适当选取其参数时, 其横向场分布呈平顶状, 有潜在的应用前景, 近来对这类光束作了深入研究^[1-4]。与传统研究方法不同的是, 本文将矩形域函数表示为复高斯函数的叠加形式, 对双曲余弦高斯光束通过有光阑限制的一阶 ABCD 光学系统的传输进行了研究, 给出了在有光阑限制的情况下, 双曲余弦高斯光束解析形式的传输公式。作为应用, 本公式的计算结果与直接对柯林斯(Collins)公式作的数值积分结果进行了比较, 结果吻合, 本文所用解析方法便于进行物理分析, 可节约大量机时。

2 传输公式

2.1 双曲余弦高斯光束通过一阶 ABCD 光学系统的传输公式

双曲余弦高斯光束在 $z = 0$ 平面上的场分布 $E_0(x_0, y_0, 0)$ 为^[1]

$$E_0(x_0, y_0, 0) = \exp\left[-\left(\frac{x_0^2}{w_0^2} + \frac{y_0^2}{w_0^2}\right)\right] \times \cosh(\Omega_0 x_0) \cosh(\Omega_0 y_0), \quad (1)$$

其中, w_0 为高斯光束在 x 及 y 方向的束腰半宽, Ω_0 为与双曲余弦项相关的参数, 为了方便略去了归一化常数。

当双曲余弦高斯光束通过带有矩形光阑的一阶 ABCD 近轴光学系统时, 其场分布由柯林斯公式给出^[5]

$$E(x, y, z) = \frac{i}{\lambda B} \exp\left[-\frac{ikD}{2B}(x^2 + y^2)\right] \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b E_0(x_0, y_0, 0) \exp\left\{-\frac{ik}{2B}[A(x_0^2 + y_0^2) - 2(x_0x + y_0y)]\right\} dx_0 dy_0, \quad (2)$$

其中, $k = 2\pi/\lambda$ 表示波数, λ 为波长, a, b 分别表示 x, y 方向上光阑的半宽度, A, B 和 D 表示 ABCD 光

学系统的变换矩阵元素。

将(1)式代入(2)式, 整理得

$$E(x', y', z) = E(x', z)E(y', z), \quad (3)$$

式中,

* 激光技术国家重点实验室(2000-0009)和西南交通大学科学研究基金资助课题。

$$E(x', z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i\omega_0^2}{\lambda B}} \exp\left(-\frac{ikD}{2B}x'^2\right) \times \int_{-\sigma_x}^{\sigma_x} \left\{ \exp\left[-\left(1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}\right)\xi^2 + \left(\alpha + \frac{ik\omega_0^2}{B}x'\right)\xi\right] + \exp\left[-\left(1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}\right)\xi^2 + \left(-\alpha + \frac{ik\omega_0^2}{B}x'\right)\xi\right] \right\} d\xi, \quad (4)$$

其中, $x' = x/\omega_0$, $\xi = x_0/\omega_0$ 为归一化坐标, $\alpha = \Omega_0/\omega_0$ 为离心参数, $\sigma_x = \alpha/\omega_0$ 为 x 方向的截断参数。 $E(y', z)$ 有类似的表达式, 为了节约篇幅, 本文从略。

在有光阑限制的情况下, 对光束传输等问题的研究中, 通常是对 (3) 式进行数值积分, 一般是很费

机时的^[6]。 与传统的处理方法不同, 本文引入矩形函数

$$\text{rec}(\xi/\sigma_x) = \begin{cases} 1 & |\xi| < \sigma_x, \\ 0 & |\xi| > \sigma_x. \end{cases} \quad (5)$$

在 (4) 式中引入 (5) 式, 则 (4) 式变为

$$E(x', z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i\omega_0^2}{\lambda B}} \exp\left(-\frac{ikD}{2B}x'^2\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{rec}(\xi/\sigma_x) \left\{ \exp\left[-\left(1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}\right)\xi^2 + \left(\alpha + \frac{ik\omega_0^2}{B}x'\right)\xi\right] + \exp\left[-\left(1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}\right)\xi^2 + \left(-\alpha + \frac{ik\omega_0^2}{B}x'\right)\xi\right] \right\} d\xi, \quad (6)$$

用类似文献 [7] 的方法将矩形函数 $\text{rec}(\xi/\sigma_x)$ 展开为复高斯函数的叠加

$$\text{rec}(\xi/\sigma_x) = \sum_{n=1}^N A_n \exp\left(-\frac{B_n}{\sigma_x^2} \xi^2\right), \quad (7)$$

其中, A_n 、 B_n 分别为展开系数和高斯系数, 可由计算机优化得到。

将 (7) 式代入 (6) 式, 积分并整理得

$$E(x', z) = \sqrt{\frac{ik\omega_0^2}{2B}} \exp\left(-\frac{ikD\omega_0^2}{2B}x'^2\right) \times \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\sqrt{1 + ikA\omega_0^2/(2B) + B_n/\sigma_x^2}} \exp\left[\frac{\alpha^2/4 - k^2\omega_0^4 x'^2/(4B^2)}{1 + ikA\omega_0^2/(2B) + B_n/\sigma_x^2}\right] \cosh\left[\frac{ik\omega_0^2 \alpha x'/(2B)}{1 + ikA\omega_0^2/(2B) + B_n/\sigma_x^2}\right]. \quad (8)$$

由 (8) 式可得双曲余弦高斯光束通过有光阑限制的一阶 ABCD 光学系统传输空间任一点的场分布为

$$E(x', y', z) = \frac{ik\omega_0^2}{2B} \exp\left[-\frac{ikD\omega_0^2}{2B}(x'^2 + y'^2)\right] \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{A_n}{\sqrt{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B} + \frac{B_n}{\sigma_x^2}}} \frac{A_m}{\sqrt{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B} + \frac{B_m}{\sigma_y^2}}} \times \exp\left[\frac{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{k^2\omega_0^4}{4B^2}x'^2}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B} + \frac{B_n}{\sigma_x^2}}\right] \cosh\left[\frac{\frac{ik\omega_0^2}{2B}\alpha x'}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B} + \frac{B_n}{\sigma_x^2}}\right] \exp\left[\frac{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{k^2\omega_0^4}{4B^2}y'^2}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B} + \frac{B_m}{\sigma_y^2}}\right] \cosh\left[\frac{\frac{ik\omega_0^2}{2B}\alpha y'}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B} + \frac{B_m}{\sigma_y^2}}\right] \right\}, \quad (9)$$

其中, $\sigma_y = b/\omega_0$ 为 y 方向的截断参数, A_m 、 A_n 和 B_m 、 B_n 为复高斯函数项系数。

当 $\sigma_x^2 \rightarrow \infty$ 及 $\sigma_y^2 \rightarrow \infty$ 时, 由 (9) 式得光阑为无限大时的场分布为

$$E(x', y', z) = \frac{ik\omega_0^2}{2B + ikA\omega_0^2} \exp\left[-\frac{ikD\omega_0^2}{2B}(x'^2 + y'^2)\right] \times \exp\left[\frac{\frac{\alpha^2}{2}}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}}\right] \exp\left[-\frac{\frac{k^2\omega_0^4}{4B^2}(x'^2 + y'^2)}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}}\right] \cosh\left[\frac{\frac{ik\omega_0^2}{2B}\alpha x'}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}}\right] \cosh\left[\frac{\frac{ik\omega_0^2}{2B}\alpha y'}{1 + \frac{ikA\omega_0^2}{2B}}\right]. \quad (10)$$

容易证明 (10) 式实际上与文献 [2] 的 (5) 式一致。实际工作中,并不要求截断参数为无限大,只需满足 $\sigma_i > 2.1 + \alpha/\chi$ 其中 $i = x, y$, $\alpha/2$ 为两离心高斯光束偏离中心的距离,光阑的效应便可忽略^[2]。

(9) 式为双曲余弦高斯光束通过有光阑限制的一阶 ABCD 光学系统的传输公式,下面以光束通过有光阑限制的聚焦薄透镜系统的传输为例说明其应用。

2.2 通过有光阑限制薄透镜系统的传输

$$E(x', z) = \sqrt{\frac{i\pi N_f}{1 + \Delta z}} \exp\left(-\frac{i\pi N_f}{1 + \Delta z} x'^2\right) \times \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{A_n}{\sqrt{1 - \frac{i\pi N_f \Delta z}{1 + \Delta z} + \frac{B_n}{\sigma_x^2}}} \exp\left[\frac{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\pi^2 N_f^2}{1 + \Delta z} x'^2}{1 - \frac{i\pi N_f \Delta z}{1 + \Delta z} + \frac{B_n}{\sigma_x^2}}\right] \cosh\left[\frac{\frac{i\pi N_f}{1 + \Delta z} \alpha x'}{1 - \frac{i\pi N_f \Delta z}{1 + \Delta z} + \frac{B_n}{\sigma_x^2}}\right]\right\}, \quad (12)$$

其中, $N_f = \omega_0^2/\lambda f$ 为光束的菲涅耳数。利用 (12) 式计算所得的截断参数 σ_x 为有限时的横向光强分布

当焦距为 f 的薄透镜及 x 方向上半宽度为 α 的矩形光阑位于 $z = 0$ 平面时,其光学系统的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta z & (1 + \Delta z)f \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中 $\Delta z = (z - f)/f$, z 为相对于薄透镜位置的光束出射面。

将 (11) 式代入 (8) 式,整理得

和等光强分布图(等照线图)以及用柯林斯公式直接进行数值积分的结果如图 1 ~ 图 3 所示。

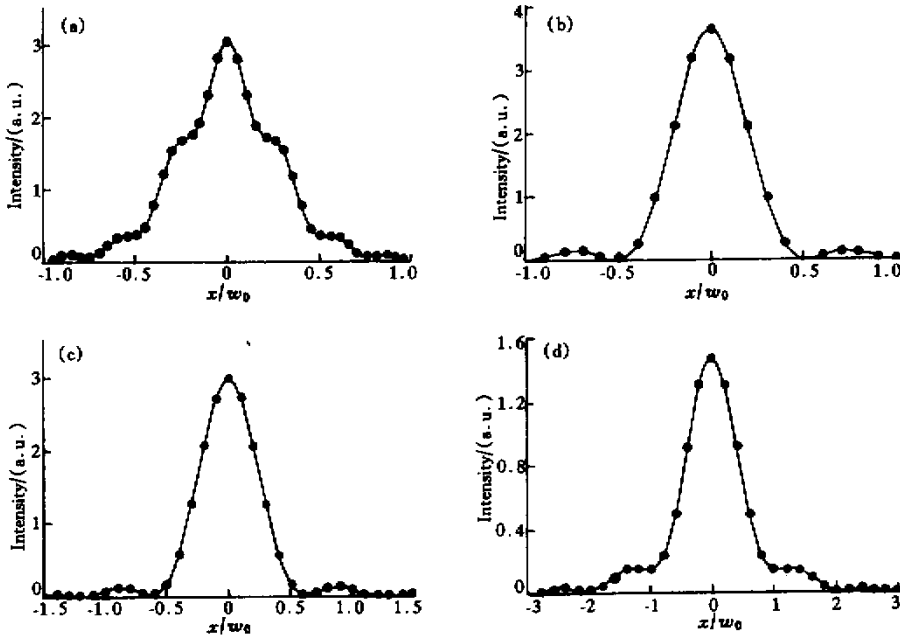


Fig. 1 Intensity distributions of a cosh-Gaussian beam focused by a lens with hard-aperture. The calculating parameters are $N_f = 1$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\sigma = 1$; —: collins formula; ●: Eq. (12). (a) $\Delta z = -0.5$; (b) $\Delta z = 0$; (c) $\Delta z = 0.2$; (d) $\Delta z = 1$

由图 1、图 2 可以看出 (12) 式在光阑尺寸为有限时,其结果与直接数值积分的结果在菲涅耳数较小(如 $N_f = 1$)的情况下完全一致,而在相同的计算精度和相同的计算点数情况下,所用机时前者与后者之比为 1:128。由图 3(a) 可以看出当菲涅耳数较

大(如 $N_f = 8$)时,在靠近薄透镜区($\Delta z \leq -0.5$), (12) 式计算的误差较大,而在焦面附近计算结果还是非常精确的,如图 3(b) 所示;在距薄透镜较远(如 $\Delta z \geq 1$)的区域有一定的误差,如图 3(c) 所示;由图 3(d) 看出,当光阑为无限大时 (12) 式的计算精度不

及(10)式的精度高。

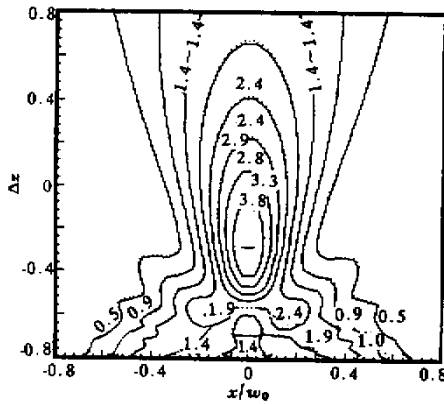


Fig.2 Isophote diagram of a cosh-Gaussian beam focused by a lens with hard-aperture. $N_f = 1, \alpha = \sqrt{2}, \sigma = 1$. — : Collins formula ; :Eq.(12)

结论 本文采用将矩形硬边光阑的窗口函数表示为

复高斯函数叠加的技巧,推导出了双曲余弦高斯光束通过有硬边光阑的一阶 ABCD 光学系统传输场分布的解析公式,在无光阑情况下双曲余弦高斯光束通过一阶 ABCD 光学系统传输的光强分布公式可作为本文特例给出。作为应用例,计算了双曲余弦高斯光束通过有限尺寸光阑薄透镜系统聚焦后轴上不同位置的光强分布和等照线图。利用本文解析公式所得结果与直接从柯林斯公式的数值积分结果在菲涅耳数较小时吻合甚好,其优点是使用解析式形式的传输公式(9)式便于对双曲余弦高斯光束的传输特性进行物理分析,同时利用(9)式作数值计算可节约大量机时。最后,值得指出的是,本文虽然仅以双曲余弦高斯光束为例作了研究,但所用方法还可推广用于研究其它类型光束通过有硬边光阑限制 ABCD 光学系统的传输,并将传输公式写为解析形式,具有较为普遍的应用意义。

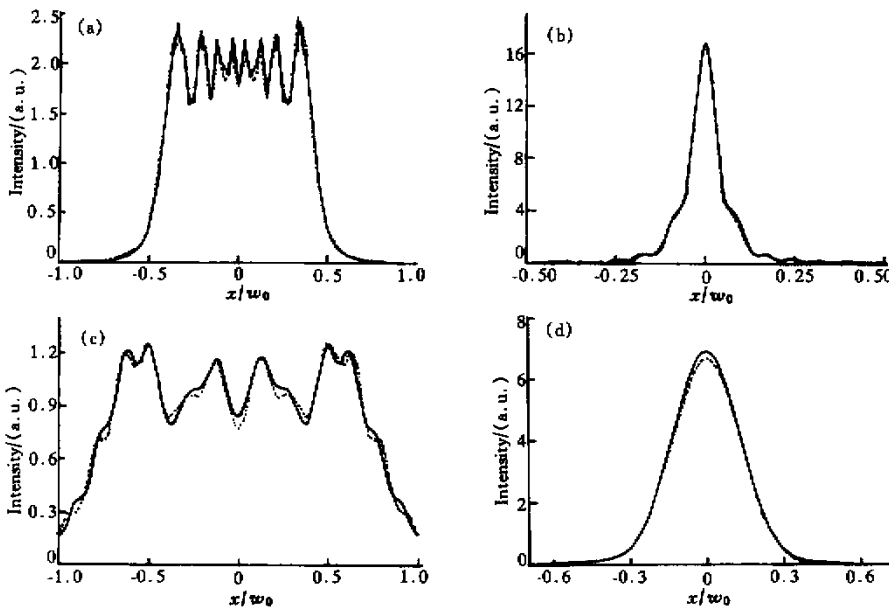


Fig.3 Intensity distributions of a cosh-Gaussian beam focused by a lens with hard-aperture. The calculating parameters are, $\alpha = \sqrt{2}$, — :Collins formula ; :Eq.(12). (a) $\sigma = 1, N_f = 8, \Delta z = -0.5$ (b) $\sigma = 1, N_f = 8, \Delta z = 0.1$ (c) $\sigma = 1, N_f = 8, \Delta z = 1$ (d) $\sigma = 8, N_f = 1, \Delta z = 0.1$

参 考 文 献

[1] Casperson L W, Tovar A A. Hermite-sinusoidal-Gaussian beams in complex optical systems. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1998, **15**(4) 954~963

[2] Lü Baida, Ma Hong, Zhang Bin. Propagation properties of cosh-Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1999, **166**(4) : 165~171

[3] Lü Baida, Ma Hong. Propagation factor and mode-coherence coefficients of hyperbolic-cosine-Gaussian beams. *Opt. Lett.*, 1999, **24**(10) 640~642

[4] 马虹,吕百达,张彬. 双曲正弦高斯光束及其传输特性的研究. *中国激光*, 2000, **A27**(8) 697~702

[5] Collins S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1970, (9):1168~1177

[6] 罗时荣,吕百达,张彬. 平顶高斯光束的传输特性. *光学学报*, 2000, **20**(9) :1213~1217

[7] Wen J J, Breazeale M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, **83**(5) :1752~1756

Propagation of Cosh-Gaussian Beams Through an Apertured $ABCD$ Optical System

Wang Xiqing¹⁾ Lü Baida²⁾

(1), *Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031*)
(2), *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064*)

(Received 14 November 2000 ; revised 12 January 2001)

Abstract : The propagation of cosh-Gaussian beams through a first-order paraxial optical system with rectangular hard-aperture is studied. By using the expansion of the rectangle function into a finite sum of complex Gaussian functions a closed-form propagation equation of cosh-Gaussian beams is derived. As a special case, the propagation equation of unapertured cosh-Gaussian beams is derived. Numerical calculation examples are given for the focusing of cosh-Gaussian beams by an aperture lens. A comparison is made, which has shown the advantage of this method and the results are in good agreement with those obtained by the straight forward integration of Collins formula.

Key words : cosh-Gaussian beam ; hard-aperture ; $ABCD$ optical system ; propagation equation