

文章编号: 0253-2239(2001)01-0008-05

# 熵测不准关系与光场的熵压缩\*

方卯发<sup>1),2)</sup> 陈菊梅<sup>1)</sup>

1), 湖南师范大学物理系, 长沙 410081  
2), 中国科学院安徽光学精密机械研究所激光光谱学开放实验室, 合肥 230031

**摘要:** 用熵作为光场量子涨落的量度, 根据熵测不准关系, 建立了熵压缩的概念, 具体研究了光场与原子相互作用时的熵压缩。结果显示, 熵压缩实现了对光场压缩效应的高灵敏量度。

**关键词:** 熵测不准关系; 熵压缩; 场压缩

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

## 1 引 言

光场压缩效应的发现和其实验观测的实现是近年来光学领域中最重大的进展之一。光场的压缩效应反映了光场的非经典特征, 在低噪声光通讯、弱信号探测、高精度测量等方面具有重要的应用前景<sup>[1,2]</sup>, 是近年来光学领域研究的热点之一。在大量研究光场压缩的学术文献中, 一般是从海森堡测不准关系出发, 用均方根偏差量度光场的量子涨落, 根据光场某一正交分量的均方根偏差是否小于真空极限来判断光场某正交分量是否出现压缩效应。本文称这种压缩为“方差压缩”。但从统计物理学的角度, 均方根偏差仅仅涉及光场密度矩阵的二阶统计矩, 而在许多情况下, 这种只涉及二阶统计矩的物理量并不能精确量度量子涨落。例如, 对于场的非高斯态, 用均方根偏差作为可观察量量子涨落的量度, 就丢失了密度算符的高阶统计矩信息<sup>[3]</sup>。一个更为满意的量子涨落的量度是给定问题的信息熵<sup>[4,5]</sup>。40 多年前, Everett 和 Hirschman<sup>[5]</sup> 提出了具有普遍意义的熵测不准关系。这个关系后来由 Beckner、Bialynicki-Birula 和 Mycielski 等人<sup>[6,7]</sup> 所证明。由于熵包含了密度矩阵的高阶统计矩, 从熵测不准关系可以导出海森堡测不准关系<sup>[7-9]</sup>, 即海森堡测不准关系只是熵测不准关系的一个特例。因此, 可以类比方差压缩的做法, 用熵量度光场正交分量的量子涨落, 根据熵测不准关系, 建立光场熵压缩的概念。本文具体研究光场与原子相互作用时的熵压缩规律, 通过将方差压缩与熵压缩两者对比, 证明

熵压缩实现了对光场压缩效应的高灵敏量度。

## 2 熵测不准关系与熵压缩

由密度矩阵  $\rho(t)$  描写的量子态(纯态或混合态), 其位置熵和动量熵可以分别定义为<sup>[7-10]</sup>

$$S_x(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \rho(t) | x \rangle \ln \langle x | \rho(t) | x \rangle dx, \quad (1)$$

$$S_p(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \langle p | \rho(t) | p \rangle \ln \langle p | \rho(t) | p \rangle dp, \quad (2)$$

相应的熵测不准关系为

$$\delta x(t) \delta p(t) \geq \pi e \quad (h = 1), \quad (3)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \delta x(t) &= \exp[S_x(t)], \\ \delta p(t) &= \exp[S_p(t)], \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

为熵指数,  $x = (a + a^\dagger) / \sqrt{2}$ ,  $p = (a - a^\dagger) / \sqrt{2}i$ 。熵测不准关系(3) 式是描述位置和动量量子涨落的普遍关系式, 其物理意义为: 对于一对非对易的可观察量, 不可能同时具有其完全的信息。(3) 式在

$$\Delta A \geq (2\pi e)^{-1/2} \delta A \quad (A = x, p) \quad (5)$$

条件下过渡到海森堡测不准关系<sup>[9,10]</sup>:

$$\Delta x \Delta p \geq 1/2, \quad (6)$$

(3) 式、(5) 式中的等号对于具有高斯分布的量子态成立。所以, 海森堡测不准关系只是熵测不准关系的一个特例。由(5) 式可知,  $\Delta A$  提供出了  $\delta A$  的上限, 这意味着均方根偏差过高地估计了可观测量的量子涨落<sup>[9,10]</sup>。为计算  $S_x(t)$  和  $S_p(t)$ , 需要计算密度矩阵  $\rho(t)$  在坐标表象中的矩阵元

\* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1999-03-10; 收到修改稿日期: 1999-11-17

$\langle x | \rho(t) | x \rangle$  和动量表像中的矩阵元  $\langle p | \rho(t) | p \rangle$ 。如果已知量子态的密度矩阵  $\rho(t)$  在粒子数表像中的形式:

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n, t) f^*(m, t) |n\rangle \langle m|, \quad (7)$$

则密度矩阵在坐标表像和动量表像中的矩阵元为:

$$\langle x | \rho(t) | x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n, t) f^*(m, t) \times \langle x | n \rangle \langle m | x \rangle, \quad (8)$$

$$\langle p | \rho(t) | p \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n, t) f^*(m, t) \times \langle p | n \rangle \langle m | p \rangle. \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle x | n \rangle &= \frac{1}{(\sqrt{\pi} 2^n n!)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] H_n(x), \\ \langle p | n \rangle &= \frac{1}{i^n} \frac{1}{(\sqrt{\pi} 2^n n!)^{1/2}} \exp\left[-\frac{p^2}{2}\right] H_n(p), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中,  $H_n(x)$ 、 $H_n(p)$  为  $n$  阶厄米多项式。为建立熵压缩的概念, 首先要计算真空态的位置熵  $S_{0x}$  和动量熵  $S_{0p}$ 。对于真空态  $|0\rangle$ , 利用(10)式, 得

$$\langle x | \rho | x \rangle = \langle x | 0 \rangle \langle 0 | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2), \quad (11)$$

$$\langle p | \rho | p \rangle = \langle p | 0 \rangle \langle 0 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-p^2), \quad (12)$$

将(11)式、(12)式代入(1)式、(2)式发现, 真空态的位置熵和动量熵相等, 其值为:

$$S_{0x} = S_{0p} = (1 + \ln \pi) / 2 \approx 1.07236. \quad (13)$$

相应的熵指数为:

$$\delta x_0 = \delta p_0 = \sqrt{\pi e} \approx 2.92267. \quad (14)$$

由于熵可以用来作为物理量量子涨落的量度, 因此  $\delta x_0$  和  $\delta p_0$  量度了真空态的位置分量和动量分量的量子涨落, 我们称  $\delta x_0$  和  $\delta p_0$  分别为位置熵和动量熵的真空极限。由(5)式可知,

$$\Delta x_0 = \Delta p_0 \geq (2\pi e)^{-1/2} \delta x_0 = 1/\sqrt{2}, \quad (15)$$

上式意味着  $\Delta A_0$  仍为  $\delta A_0$  提供上限 ( $A_0 = x_0, p_0$ ), 即海森堡测不准关系所确定的  $\Delta A_0$  过高地估计了实际的真空涨落极限。因此由海森堡测不准关系定义的方差压缩不能精确量度光场的压缩效应。

类比方差压缩的概念, 可以引出熵压缩的概念: 当任一量子态的  $A$  分量 ( $A = x, p$ ) 的熵小于熵的真空极限时, 即

$$\delta A < \sqrt{\pi e} \quad (A = x, p), \quad (16)$$

我们说该量子态的  $A$  分量出现了熵压缩。从熵测不准关系(3)式可知: 当量子态的一个分量出现熵的压缩时, 另一个分量必定无熵的压缩出现。

### 3 光场与原子相互作用时的熵压缩

在量子光学中, J-C 模型描述了基本的玻色-费米相互作用。许多文献对该模型中光场的方差压缩作了研究<sup>[11~13]</sup>, 结果表明: 光场与原子相互作用时存在方差压缩效应。但在这种情况下光场的熵压缩性质如何呢? 本节探讨该模型中光场的熵压缩效应, 并把熵压缩与方差压缩相比较, 揭示光场与原子相互作用时的熵压缩特性与规律。考虑一单模量子光场与一双能级原子通过单光子跃迁而发生相互作用。在旋波近似下的有效哈密顿量为:

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^\dagger a + g(S_+ a + a^\dagger S_-) \quad (h = 1), \quad (17)$$

式中  $S_i$  ( $i = z, +, -$ ) 为原子的反转和跃迁算符,  $a, a^\dagger$  是频率为  $\omega$  的光子的消灭和产生算符,  $g$  为场和原子的耦合常数。设初始时刻原子处于基态, 光场处于相干态,

$$\left. \begin{aligned} | \alpha \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) | n \rangle, \\ b_n &= \exp\left[-\frac{\bar{n}}{2}\right] \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中  $\bar{n}$  和  $\beta$  分别为光场的初始平均光子数和相位角。为简单起见, 这里取  $\beta = 0$ 。通过求解系统的薛定谔方程, 可得到光场的约化密度矩阵(下标  $f$  表示场)

$$\rho_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(n+m)/2}}{\sqrt{n! m!}} \times \left[ \sin \sqrt{ngt} \sin \sqrt{mgt} |n-1\rangle \langle m-1| + \cos \sqrt{ngt} \cos \sqrt{mgt} |n\rangle \langle m| \right]. \quad (19)$$

利用(8)式、(9)式, 可得到光场约化密度矩阵在坐标和动量表像中的矩阵元:

$$\langle x | \rho_f(t) | x \rangle = \exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(n+m)/2}}{\sqrt{n! m!}} \times \left[ \sin \sqrt{ngt} \sin \sqrt{mgt} \langle x | n-1 \rangle \langle m-1 | x \rangle + \cos \sqrt{ngt} \cos \sqrt{mgt} \langle x | n \rangle \langle m | x \rangle \right], \quad (20)$$

$$\langle p | \rho_f(t) | p \rangle = \exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(n+m)/2}}{\sqrt{n! m!}} \times \left[ \sin \sqrt{ngt} \sin \sqrt{mgt} \langle p | n-1 \rangle \langle m-1 | p \rangle + \cos \sqrt{ngt} \cos \sqrt{mgt} \langle p | n \rangle \langle m | p \rangle \right], \quad (21)$$

式中  $\langle x | n \rangle$ 、 $\langle p | n \rangle$  仍由(10)式确定。根据(1)式、(2)式,利用(20)式、(21)式可以得到光场与原子相互作用时的位置熵与动量熵分别为

$$S_{fx}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \rho_f(t) | x \rangle \ln \langle x | \rho_f(t) | x \rangle dx, \quad (22)$$

$$S_{fp}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \langle p | \rho_f(t) | p \rangle \ln \langle p | \rho_f(t) | p \rangle dp. \quad (23)$$

但由于(20)式、(21)式中的求和不能解析得出,借助于数值计算,我们求出在光场平均光子数  $\bar{n} = 0.5$  时,  $\delta x_f(t) = \exp[S_x(t)]$  随时间的演化,如图1所示。图中当  $\delta x_f(t) < \sqrt{\pi e} \approx 2.92267$  时(图中虚线以下),光场的位置分量出现熵压缩。

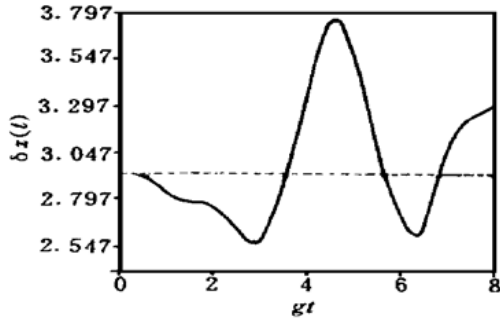


Fig. 1 The time evolution of position entropic exponential  $\delta x_f(t)$ . The atom is initially in the ground state and the field in the coherent state with the initial average photon number  $\bar{n} = 0.5$

为便于与方差压缩进行比较,求出了均方根偏差  $\Delta x_f(t)$  和  $\Delta p_f(t)$ :

$$[\Delta x_f(t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\langle n | \rho_f(t) | n \rangle (1+2n) + \langle n | \rho_f(t) | n-2 \rangle \sqrt{n(n-1)} + \langle n | \rho_f(t) | n+2 \rangle \sqrt{(n+1)(n+2)}] - \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_f(t) | n-1 \rangle \sqrt{n} + \langle n | \rho_f(t) | n+1 \rangle \sqrt{(n+1)} \right]^2 \quad (24)$$

$$[\Delta p_f(t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\langle n | \rho_f(t) | n \rangle (1+2n) - \langle n | \rho_f(t) | n-2 \rangle \sqrt{n(n-1)} - \langle n | \rho_f(t) | n+2 \rangle \sqrt{(n+1)(n+2)}] - \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_f(t) | n-1 \rangle \sqrt{n} - \langle n | \rho_f(t) | n+1 \rangle \sqrt{(n+1)} \right]^2. \quad (25)$$

在  $\bar{n} = 0.5$  时,选取  $\Delta x_f(t)$  作数值计算,如图2所示。当  $\Delta x_f(t) < 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$  时(虚线以下),则  $x$  分量出现了方差压缩。

通过图1与图2的比较,得出如下结论:

1) 熵更敏感于光场的压缩效应,熵压缩实现了压缩的高灵敏度量度。

比较图1与图2可知,  $\Delta x_f(t)$  与  $\delta x_f(t)$  两者在量度光场的压缩效应时有很大的差别:标度时间  $gt$  从0演化到1.90时,两者都小于各自的真空极限,都显示出压缩效应;当  $gt = 1.95$  时,  $\delta x_f(t) = 2.76784 < \sqrt{\pi e} = 2.92267$ ,仍呈现熵压缩,但此时  $\Delta x_f(t) = 0.708414 > 0.7071$ ,不呈现方差压缩;在  $gt = 5.70$  到  $gt = 6.80$  之间,  $\delta x_f(t)$  仍出现较长时间的熵压缩,而  $\Delta x_f(t)$  在  $gt \geq 3.25$  时就不再出现方差压缩。 $\Delta x_f(t)$  和  $\delta x_f(t)$  在量度光场的压缩效应时存在的差别来源于这样的事实:均方根偏差  $\Delta x_f(t)$  仅包含光场密度矩阵的二阶统计矩,而熵  $\delta x_f(t)$  包含了光场密度矩阵的高阶统计矩,它比均方根偏差  $\Delta x_f(t)$  更敏感于光场的压缩效应,是量度光场压缩效应的高灵敏度物理量。因此熵压缩实现了对光场压缩效应的高灵敏度量度。

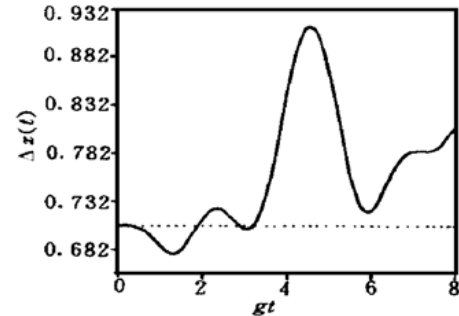


Fig. 2 The time evolution of variance  $\Delta x_f(t)$ . The atom is initially in the ground state and the field in the coherent state with the initial average photon number  $\bar{n} = 0.5$ .

2) 熵压缩与方差压缩的关系。

从数值结果可以看出,当均方根偏差  $\Delta x_f(t)$  小于它的真空极限时,相应的熵  $\delta x_f(t)$  也一定小于它的真空极限。亦即当均方根偏差  $\Delta x_f(t)$  出现压缩时,  $\delta x_f(t)$  也一定出现压缩,反之则不一定成立。这可以通过求解光场与原子相互作用时的最大位置熵  $\delta x_{fmax}(t)$  得到解释:在J-C模型描述的光场-原子相互作用系统中,对于归一化的光场量子态,存在如下约束条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \rho_f(t) | x \rangle dx = 1, \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \langle x | \rho_f(t) | x \rangle dx = \Delta x_f^2(t). \quad (27)$$

从熵  $S_{fx}(t)$  的约化密度算符表达式(22) 出发, 用最大熵原理求其变分并考虑上述两个约束条件, 可得如下方程:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 + \ln \langle x | \rho_f(t) | x \rangle + \lambda + \beta(x - \langle x \rangle)^2] \times \delta \langle x | \rho_f(t) | x \rangle dx = 0, \quad (28)$$

式中  $\lambda, \beta$  为拉格朗日常数, 由于  $\delta \langle x | \rho_f(t) | x \rangle$  是任意的, 因此有:

$$1 + \ln \langle x | \rho_f(t) | x \rangle + \lambda + \beta(x - \langle x \rangle)^2 = 0, \quad (29)$$

利用约束条件(26) 式、(27) 式, 可以确定  $\lambda, \beta$ . 对应最大熵  $S_{fx\max}(t)$  的量子态, 其约化密度矩阵在坐标表象中的矩阵元为:

$$\langle x | \rho_f(t) | x \rangle_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x_f} \exp \left[ - \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2 \Delta x_f^2(t)} \right]. \quad (30)$$

将上式代回  $S_{fx}(t)$  的计算公式(22) 式, 可以求得

$$S_{fx\max}(t) = \frac{1}{2} (1 + \ln \pi) + \frac{1}{2} [2 \Delta x_f^2(t)], \quad (31)$$

相应的熵指数为:

$$\delta x_{f\max}(t) = \sqrt{2\pi e} \Delta x_f(t). \quad (32)$$

因此光场与原子相互作用时位置熵有不等式关系:

$$\delta x_f(t) \leq \delta x_{f\max}(t) = \sqrt{2\pi e} \Delta x_f(t), \quad (33)$$

式中  $\sqrt{\pi e}$  是熵的真空极限. 很明显, 当均方根偏差  $\Delta x_f(t)$  呈现方差压缩时, 亦即  $\Delta x_f(t) < 1/\sqrt{2}$  时,  $\delta x_f(t) < \sqrt{\pi e}$ , 一定呈现熵压缩. 另一方面,  $\delta x_f$  呈现熵压缩时,  $\Delta x_f$  则不一定呈现方差压缩. 原因如前所述: 均方根偏差过高地估计了实际的真空涨落极限<sup>[9]</sup>, 所得出的真空涨落极限是不精确的, 亦即方差压缩条件  $\Delta A < 1/\sqrt{2}$  ( $A = x, p$ ) 是不精确的. 因此, 可以得出结论: 量度光场变量量子涨落更基本更合适的物理量是熵, 熵压缩实现了对光场压缩效应的高灵敏度度.

**结论** 用熵量度光场的量子涨落, 根据熵测不准关系, 建立了光场熵压缩的概念, 具体研究了光场与原子相互作用时的熵压缩特性, 讨论了熵压缩与方差压缩的关系. 结果表明: 一方面, 由于海森堡测不准关系只是熵测不准关系的特例, 量度光场量子涨落

的更基本物理量是熵. 由海森堡测不准关系和均方根偏差确定的真空涨落极限是不精确的, 因此方差压缩不能精确量度光场的压缩效应, 而熵压缩实现了对光场压缩效应的高灵敏度度. 另一方面, 根据熵的定义, 一个物理量的熵与该物理量在量子态中的几率分布直接相联系, 而几率分布是可测量的, 则熵是一个十分灵敏的、可通过测量确定的物理量<sup>[14]</sup>. 因此, 本文的结果对光场压缩效应的研究不但具有理论意义, 而且具有实验价值.

## 参 考 文 献

- [1] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. (D)*, 1981, **23**(8): 1693~ 1708
- [2] Gear Banacloche J, Leuchs G. Squeezed states for interferometric gravitational wave detectors. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6, 7): 793~ 811
- [3] Buzek V, Keitel H, Knight P L. Sampling entropies and operational phase-space measurement. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **51**(3): 2575~ 2593
- [4] Uffink J B M, Hilgevoord J. New bounds for the uncertainty principle. *Phys. Lett. (A)*, 1984, **105**(4, 5): 176~ 178
- [5] Uffink J B M, Hilgevoord J. Uncertainty principle and uncertainty relation. *Found. Phys.*, 1985, **15**(9): 925~ 944
- [6] Beckner W. Inequalities in Fourier analysis. *Ann. Math.*, 1975, **102**(2): 159~ 182
- [7] Bialynicki-Birula I, Mycielski J. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 1975, **44**(2): 129~ 132
- [8] Orłowski A. Information entropy and squeezing of quantum fluctuations. *Phys. Rev. (A)*, 1997, **56**(4): 2545~ 2548
- [9] Jorge S R. Position-momentum entropic uncertainty relation and complementarity in single-slit and double-slit experiments. *Phys. Rev. (A)*, 1998, **57**(3): 1519~ 1525
- [10] Michael J W H. Universal geometric approach to uncertainty, entropy, and information. *Phys. Rev. (A)*, 1999, **59**(4): 2602~ 2615
- [11] Meystre P, Zubairy M S. Squeezed states in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett. (A)*, 1982, **89A**(8): 390~ 392
- [12] Kuklinski J R, Madajczek J L. Strong squeezing in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1988, **37**(8): 3175~ 3178
- [13] Joshi A, Puri R R. Effect of the binomial field distribution on collapse and revival phenomena in the Jaynes-Cummings Model. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(11): 1421~ 1431
- [14] Buzek V, Moya-Cessa H, Knight P L. Schrodinger-cat states in the resonant Jaynes-Cummings model: Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(11): 8190~ 8203

## Entropic Uncertainty Relation and Entropic Squeezing of the Field

Fang Maofa<sup>1),2)</sup> Chen Jumei<sup>1)</sup>

1), Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081

2), Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031

(Received 10 March 1999; revised 17 November 1999)

**Abstract:** The concept of entropic squeezing is established and the entropic squeezing of the field interacting with the atom is investigated by regarding the entropy as a measure of quantum fluctuation and according to entropy uncertainty relation. The results show that the entropic squeezing is a high sensitive measure for the squeezing effect of the field.

**Key words:** entropy uncertain relation; entropic squeezing; field squeezing

## 全国强场激光物理学术会议在桂林举行

由中国高等技术中心与中科院上海光机所共同举办的 2000 年全国强场激光物理学术会议于 2000 年 11 月 23 日 25 日在桂林举行。本次会议有 100 人出席,与会者来自全国 10 所高等院校、8 个科研机构,包含了国内几乎所有该领域的研究机构的著名学者,还有来自海外 3 所大学及一个研究所的华裔著名学者。

在开幕式上,大会主席、中科院院士徐至展致开幕词,桂林市市长李金早和副市长汤杰应邀出席开

幕式,甘子钊、霍裕平、冼鼎昌、河国沙等中科院院士到会。

本次会议共作了 54 个学术报告,其中 14 篇为特邀报告,反映了近年来在强场激光科学技术领域取得的重要成果与进展,是我国强场激光科学技术领域中高层次的代表国家水平的学术会议。会议始终在浓厚的学术气氛中进行,会内会外均进行了热烈的讨论和广泛的交流,会议也反映出青年科技工作者正在茁壮成长。

培 夏