文章编号: 0253-2239(2001)01-0004-04

可控制权重因子的原子纠缠态的制备*

宋克慧
(湖南怀化师范高等专科学校物理系和数学研究所, 怀化 418008)

摘要:　提出了一种利用二能级原子与相干态腔场的非共振相互作用制备原子纠缠态的方案。在一定条件下, 获得了可控制权重因子的原子纠缠态以及纠缠两原子的 4 个贝尔基。

关键词:　二能级原子; 相干态; 原子纠缠态; 贝尔基
中图分类号: O431.2　　　文献标识码: A

1　引　　言

近来, 人们对制备粒子纠缠态产生了兴趣。当两个自旋为 1/2 的粒子处于最大纠缠态, 亦即 EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) 态[1]时, 将违背贝尔(Bell)不等式[2], 这就证明了关于量子理论的局域隐变量原理的不正确性。不仅如此, 还可以利用粒子的纠缠态以实现量子隐形传态 (Quantum Teleportation)[3,4]。一个二能级原子等同于一个自旋为 1/2 的粒子, 而且对原子的探测效率可达 100%; 此外, 原子在空间上容易分开, 因此人们采用多种方法以制备原子纠缠态。Phoenix[5]、Kudryavtsev[6]、Cirac[7]及 Song[8]等提出各种方案制备了如下形式的两原子纠缠态

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|g\rangle_2\pm|g\rangle_1|e\rangle_2),\tag{1}$$

其中 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 分别表示原子的激发态和基态, 而脚标 1 和 2 分别表示原子 1 和原子 2。尽管这些方案都是基于腔场量子电动力学的, 但这些方案都需要在原子进入腔之前对原子的速度进行选择, 而且腔必须首先处于真空态。

1989 年, Greenberger 等[2]提出多原子 Greenberger-Horen-Zeilinger 态(缩写为 GHZ 态)的概念, 后来 Cirac[7]、Zheng[9,10]和 Song[11]等也提出制备如下形式 GHZ 态的方案

$$|\Psi\rangle_{\mathrm{GHZ}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|e\rangle_2|e\rangle_3-|g\rangle_1|g\rangle_2|g\rangle_3).\tag{2}$$

这种态揭示了一种新类型的局域隐变量原理与量子理论的矛盾, 即它不需要违背贝尔不等式, 就可以对局域隐变量原理进行检验。

不久前, Gerry[12]利用 Ξ 型三能级原子与腔场的相互作用制备了如下形式的三能级原子的两个低能态的纠缠态

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|e\rangle_1|g\rangle_2+\\&\quad\exp[i(\theta_1-\theta_2)]|g\rangle_1|e\rangle_2\},\\|\Psi\rangle_2&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|g\rangle_1|g\rangle_2-\\&\quad\exp[-i(\theta_1+\theta_2)]|e\rangle_1|e\rangle_2\},\end{aligned}\tag{3}$$

以及

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_{\mathrm{GHZ}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{&|g\rangle_1|g\rangle_2|g\rangle_3-\\&\exp[-i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]|e\rangle_1|e\rangle_2|e\rangle_3\},\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $\theta_i(i=1,2,3)$ 是原子叠加态的相因子。Gerry 的方法必须假设腔场首先制备成具有大振幅的相干态, 而且原子的两个上能态的跃迁频率与腔场的频率有大的失谐, 而两个低能态的跃迁频率与腔场的频率相比是远离共振的, 从而原子的两个上能态与腔场产生高度的非共振相互作用。在这种情况下, 通过对腔场的探测获得了原子纠缠态。

在此, 作者提出一种利用二能级原子与大振幅的相干态腔场在大失谐情况下的相互作用来制备原子纠缠态的方案。与文献[12]不同, 本方案只利用了二能级原子, 目前量子隐形传态的方案[3]也只是利用了二能级原子的纠缠态; 更有趣的是, 作者所制备的原子纠缠态的各部分的权重可通过调节经典场的振幅和相因子来控制。而且, 通过这种方法适当地调节经典场的振幅和相因子, 可以获得纠缠两原

* 湖南省教育委员会青年骨干教师基金和国内访问学者基金资助课题。

收稿日期: 1999-04-02; 收到修改稿日期: 1999-08-19

子的 4 个贝尔基[13]。

2　二能级原子与相干态腔场在大失谐情况下相互作用的描述

考虑一个相干态腔场与一个二能级原子相互作用的 J-C 模型。在偶极和旋转波近似下，这一系统的哈密顿量为

$$H = \omega_a S_z + \omega_c a^+ a + G(a^+ S^- + aS^+) \quad (\hbar = 1), \tag{5}$$

其中 ω_a 和 ω_c 分别为原子跃迁频率和腔场的频率，S_z 和 $S^{\pm}$ 是原子算符，a 和 a^+ 分别是腔场的湮灭和产生算符，G 是原子和场的耦合常数。如果原子跃迁频率与腔场的频率的失谐 Δ 远大于耦合常数，即 $\Delta = \omega_a - \omega_c \gg G$，可以得到该系统的有效哈密顿量[14]为

$$H_{\text{eff}} = \omega_a S_z + \omega_c a^+ a + 2\frac{G^2}{\Delta} S_z a^+ a \tag{6}$$

在相互作用绘景中，系统的态矢满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}|\Psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = H_{\mathrm{I}}|\Psi(t)\rangle, \tag{7}$$

其中 $H_{\mathrm{I}} = 2\frac{G^2}{\Delta} S_z a^+ a$, (8)

则整个系统的时间演化规律由下式描述

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{I}}t)|\Psi(0)\rangle, \tag{9}$$

其中 $|\Psi(0)\rangle$ 是系统的初态。

假设二能级原子在进入腔场之前，首先经过一个经典场，使原子制备成它的基态和激发态的叠加态[15]:

$$|\Psi_a(0)\rangle = \cos\beta_j|e\rangle_j + \exp(\mathrm{i}\gamma_j)\sin\beta_j|g\rangle_j, \tag{10}$$

其中 j 代表第 j 个原子，$\beta \in [0, \pi]$ 决定电子在原子能级的分布，$\gamma \in [0, 2\pi]$ 是经典场的相因子，这样当第一个原子进入腔中，整个系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle = [\cos\beta_1|e\rangle_1 + \exp(\mathrm{i}\gamma_1)\sin\beta_1|g\rangle_1]|\alpha\rangle. \tag{11}$$

设第一个原子与腔场的作用时间为 τ_1，则经过 τ_1 时间的相互作用后，整个原子 - 腔场系统的态矢为

$$|\Psi(\tau_1)\rangle = \cos\beta_1|\alpha\exp(-\mathrm{i}G^2\tau_1/\Delta)\rangle|e\rangle_1 + \exp(\mathrm{i}\gamma_1)\sin\beta_1|\alpha\exp(\mathrm{i}G^2\tau_1/\Delta)\rangle|g\rangle_1. \tag{12}$$

同样把第二个二能级原子也制备成(10)式所表示的态而注入腔中，设它与腔场的相互作用时间为 τ_2，则经过 τ_2 时间的相互作用后，整个原子 - 腔场系统的态矢为

$$\begin{aligned}|\Psi(\tau_1+\tau_2)\rangle = {}& \cos\beta_1\cos\beta_2|e\rangle_1|e\rangle_2|\alpha\times\\ &\exp[-\mathrm{i}(G)^2(\tau_1+\tau_2)/\Delta]\rangle + \\ &\exp\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2)\sin\beta_1\sin\beta_2|g\rangle_1|g\rangle_2|\alpha\times\\ &\exp[\mathrm{i}(G)^2(\tau_1+\tau_2)/\Delta]\rangle + \\ &\exp(\mathrm{i}\gamma_1)\sin\beta_1\cos\beta_2|g\rangle_1|e\rangle_2|\alpha\times\\ &\exp[\mathrm{i}G^2(\tau_1-\tau_2)/\Delta]\rangle + \\ &\exp(\mathrm{i}\gamma_2)\cos\beta_1\sin\beta_2|e\rangle_1|g\rangle_2|\alpha\times\\ &\exp[-\mathrm{i}G^2(\tau_1-\tau_2]/\Delta)\rangle,\end{aligned} \tag{13}$$

从而获得了两个二能级原子和场的纠缠。可以通过调节原子的速度以控制原子与腔场的作用时间。例如，假设使 $\tau_1 = \tau_2 = \pi\Delta/(2g^2)$，从而(12)式成为

$$\begin{aligned}|\Psi(\tau+\tau)\rangle = {}& \{\cos\beta_1\cos\beta_2|e\rangle_1|e\rangle_2 + \\ &\exp[\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2)]\sin\beta_1\sin\beta_2|g\rangle_1|g\rangle_2\}\times\\ &|-\alpha\rangle + \{\exp(\mathrm{i}\gamma_1)[\sin\beta_1\cos\beta_2|g\rangle_1|e\rangle_2 + \\ &\exp[-\mathrm{i}(\gamma_1-\gamma_2)]\cos\beta_1\sin\beta_2|e\rangle_1|g\rangle_2\}|\alpha\rangle.\end{aligned} \tag{14}$$

3　通过对腔场的选择测量制备原子纠缠态

3.1　任意两个同振幅但不同相位的相干态 $|\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_1)\rangle$ 和 $|\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_2)\rangle$ 的正交性

相干态在福克(Fock)空间的表示为

$$|\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi)\rangle \equiv \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi)]^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{15}$$

容易计算 $|\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_1)\rangle$ 和 $|\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_2)\rangle$ 的内积为

$$\langle\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_1)|\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_2)\rangle = \exp\left(-|\alpha|^2\{1-\exp[-\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)]\}\right). \tag{16}$$

对于(16)式，只要 $\varphi_1 \neq \varphi_2$，即两个具有不同相位的相干态，在 $|\alpha|^2 \gg 1$ 的情况下，$\langle\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_1)|\alpha\exp(\mathrm{i}\varphi_2)\rangle \approx 0$，即它们是正交的。

3.2　通过对腔场态的选择测量来制备任意权重因子的原子纠缠态

由前面的讨论知道，态 $|-\alpha\rangle$ 和 $|\alpha\rangle$ 在 $|\alpha|^2 \gg 1$ 的情况下是正交的。因此可以对腔场采用通常的正交态的测量方法进行测量[2]。对于(14)式如果测得腔场处于 $|\alpha\rangle$，根据波包塌缩原理，原子处于如下的态:

$$|\Psi\rangle_a = N_a\{\sin\beta_1\cos\beta_2|g\rangle_1|e\rangle_2 +$$

$$\exp[-\mathrm{i}(\gamma_1-\gamma_2)]\cos\beta_1\sin\beta_2|e\rangle_1|g\rangle_2\},\quad(17)$$

若腔场处于态 $|-\alpha\rangle$, 则得到

$$|\Psi\rangle_{-a}=N_{-a}\{\cos\beta_1\cos\beta_2|e\rangle_1|e\rangle_2+\exp[\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2)]\sin\beta_1\sin\beta_2|g\rangle_1|g\rangle_2\},\quad(18)$$

其中 N_a 和 N_{-a} 为归一化因子。

4 讨 论

1) 对(18)式, 通过调节经典场的振幅和相因子[15], 使 $\beta_1=\beta_2=\pi/4$, $\gamma_1=\gamma_2=0$, 可得

$$|\Phi_{12}^{(+)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|e\rangle_2+|g\rangle_1|g\rangle_2).\quad(19)$$

若取 $\beta_1=\beta_2=\pi/4$, $\gamma_1=\gamma_2=\pi/2$, 可以得到

$$|\Phi_{12}^{(-)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|e\rangle_2-|g\rangle_1|g\rangle_2).\quad(20)$$

对于(17)式, 同样可以获得

$$|\Psi_{12}^{(\pm)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|g\rangle_2\pm|g\rangle_1|e\rangle_2).\quad(21)$$

由上可以看出, 以上所制备的态 $|\Phi_{12}^{(\pm)}\rangle$ 和 $|\Psi_{12}^{(\pm)}\rangle$ 正好是纠缠两原子的 4 个贝尔基。

2) 当把第三个适当制备的原子注入腔中, 它与腔场发生以上完全相同的相互作用, 通过调节原子的速度, 使 $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\pi\Delta/(3g^2)$, 则可以得到如下形式的原子-腔场的纠缠态

$$\begin{aligned}|\Psi(\tau+\tau+\tau)\rangle=&(a_1|e\rangle_1|e\rangle_2|e\rangle_3+\\&b_1|g\rangle_1|g\rangle_2|g\rangle_3)|-\alpha\rangle+\\&(a_2|g\rangle_1|g\rangle_2|e\rangle_3+\\&b_2|g\rangle_1|e\rangle_2|g\rangle_3+\\&c_2|e\rangle_1|g\rangle_2|g\rangle_3)|\alpha\exp(\mathrm{i}\pi/3)\rangle+\\&(a_3|g\rangle_1|e\rangle_2|e\rangle_3+\\&b_3|e\rangle_1|g\rangle_2|e\rangle_3+\\&c_3|e\rangle_1|g\rangle_2|g\rangle_3)|\alpha\exp(-\mathrm{i}\pi/3)\rangle,\end{aligned}\quad(22)$$

其中

$$\begin{aligned}a_1&=\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3\\b_1&=\exp[\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)]\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3,\\a_2&=\exp[\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2)]\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3,\\b_2&=\exp[\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_3)]\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3,\\c_2&=\exp[\mathrm{i}(\gamma_2+\gamma_3)]\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3,\\a_3&=\exp(\mathrm{i}\gamma_1)\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3,\\b_3&=\exp(\mathrm{i}\gamma_2)\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3,\\c_3&=\exp(\mathrm{i}\gamma_3)\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3.\end{aligned}$$

在 $|\alpha|^2\gg1$ 的条件下, 由(16)式可知, $|\alpha\rangle$、$|\alpha\exp(\mathrm{i}\pi/3)\rangle$ 和 $|\alpha\exp(-\mathrm{i}\pi/3)\rangle$ 彼此是正交的, 通过对腔场的探测, 从而可以得到三原子纠缠态, 即 GHZ 态。

3) 最后来讨论如何保证(17)式、(18)式及(22)式的态总是纠缠的。由文献[15]可知, $\beta\in(0,\pi/2)$, 只要适当调节经典场的幅度使 $\beta\in(0,\pi/2)$, 则无论如何原子是纠缠的。另一种情况是, 当原子从腔中出来以后, 又让它进入第二个经典场, 这个经典场对原子实现如下的幺正变换[17]:

$$\left.\begin{aligned}|e\rangle_i&\rightarrow(1/\sqrt{2})(|e\rangle_i'+|g\rangle_i'),\\|g\rangle_i&\rightarrow(1/\sqrt{2})(|g\rangle_i'-|e\rangle_i'),\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

(17)式则变为

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_a=&\cos\beta_1\cos\beta_2(|e\rangle_1'|e\rangle_2'+\\&|e\rangle_1'|g\rangle_2'+|g\rangle_1'|e\rangle_2'+|g\rangle_1'|g\rangle_2')+\\&\exp[\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2)]\sin\beta_1\sin\beta_2(|e\rangle_1'|e\rangle_2'-\\&|e\rangle_1'|g\rangle_2'-|g\rangle_1'|e\rangle_2'+|g\rangle_1'|g\rangle_2').\end{aligned}\quad(24)$$

在这种变换下, 同样只要取 $\beta\in(0,\pi/2)$, 原子也总是纠缠的。

结 语 通过二能级原子与相干态腔场的非共振相互作用, 在一定条件下, 制备了原子纠缠态, 尤其是通过适当制备原子, 获得了两原子纠缠的 4 个贝尔基; 而且还制备了通常意义上的 GHZ 态和多元素的 GHZ 态。这些原子的纠缠态各成分的权重可以通过调节经典场的幅度和相位来控制。通过这种方法原则上可以制备 n 个原子的 GHZ 态。

致 谢 作者衷心感谢郭光灿教授的悉心指导!

参 考 文 献

[1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 1935, **47**(5): 777~780

[2] Greenberger D M, Horne M, Zeilinger A. In: *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, Kafatos M eds, Dordrecht: Kluwer Press, 1989. 195

[3] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C *et al*.. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**(13): 1895~1899

[4] Zheng S B, Guo G C. Teleportation of an unknown atomic state through the Raman atom-cavity-field interaction. *Phys. Lett. (A)*, 1997, **232**(2): 171~174

[5] Phenix S J D, Barnett S M. Non-local interatomic correlations in the micromaser. *J. Modern Opt.*, 1993, **40**(6): 979~983

[6] Kudryavtsev I K, Knight P L. Atomic entaglement and

Bell's inequality violation. *J Modern Opt.*, 1993, **40**(9): 1673~ 1679

[7] Cirac J I, Zoller P. Preparation of macroscopic superpositions in many-atom system. *Phys. Rev. (A)*, 1994, **50**(4): R2799~ R2802

[8] Song K H, Guo G C. Preparation of two-atom entangled states via the quantized cavity field resonant interaction with atom. *Chinese J. Laser*, 1999, **8**(2): 153~ 156

[9] Zheng S B, Guo G C. Preparation of multi-atom GHZ states. *J. Modern Opt.*, 1997, **44**(5): 963~ 966

[10] Zheng S B, Guo G C. Generation of multi-atom entangled states via the Raman atom-cavity-field interaction. *Chinese Phys. Lett.*, 1997, **14**(7): 485~ 487

[11] Song K H, Guo G C. Preparation of entangled atomic states via atoms interacting with the cavity-field in SU(1, 1) coherent state. *Chinese Phys. Lett.*, 1999, **16**(3): 161~ 162

[12] Gerry C C. Preparation of multiatom entangled states through dispersive atom-cavity-field interaction. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **53**(4): 2857~ 2860

[13] Braunstein S L, Mannand A, Revzen M. Maximal violation of Bell inequalities for mixed states. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**(1): 3259~ 3261

[14] Holland M J, Walls D F, Zoller P. Quantum nondemolition measurements of photon number by atomic-beam deflection. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**(3): 1716 ~ 1719

[15] Guo G C, Zheng S B. Generation of Schrödinger cat states via Jaynes-Cummings model with large detuning. *Phys. Lett. (A)*, 1996, **223**(2): 332~ 336

[16] Brune M, Haroche S, Raimond J M *et al.*. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of "Schrödinger cat" states. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7): 5193~ 5213

[17] Fregberger M. Simple example of nonlocality: atoms interacting with correlated quatized fields. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **51**(4): 3347~ 3350

Preparation of the Atomic Entangled States with Controllable Weighting Factors

Song Kehui

(Department of Physics and Institute for Maths Research, Huaihua Teachers College, Huaihua 418008)

(Received 2 April 1999; revised 19 August 1999)

Abstract: A scheme is presented for generating atomic entangled states through the interaction of the two-level atom with a coherent state cavity-field. Under certain condition, the atomic entangled states with controllable weighting factors and four Bell's bases of the entangled two-atom are obtained.

Key words: two-level atom; coherent state; atomic entangled state; Bell's basis