

文章编号: 0253-2239(2001)01-0072-03

基于一阶泰勒展开式的迭代最小二乘相移新算法

郭红卫¹⁾ 陈明仪¹⁾ 韦春龙²⁾

1), 上海大学(延长校区)精密机械工程系, 上海 200072;
2), 上海大学(延长校区)通信工程系, 上海 200072)

摘要: 提出了一种新的最小二乘迭代算法,能有效消除因相移器存在导向误差而使相移平面倾斜从而导致的相移误差。当相移器存在的相移误差包括位移误差与倾斜误差时,同一幅干涉图诸像素点的相移并不同步,但其相移量在同一平面上。求解此平面,即可消除相移误差。通过求解由一阶泰勒展开式得到的线性方程组,避免了为求解此平面而求解非线性方程组最小二乘解的过程,使算法简化。利用迭代法,保证求解的精度。并通过数值模拟,验证了这种算法在消除较大的相移器倾斜及位移误差影响上具有良好的效果。

关键词: 相移干涉术; 相移误差; 最小二乘解; 迭代法

中图分类号: O348.1 文献标识码: A

1 引 言

相移干涉术^[1]中,常以压电陶瓷等器件驱动干涉仪参考镜沿参考臂移动,从而得到相移的多幅干涉图;并利用相移算法,求解被测波前的相位分布。而传统相移算法中,大多以确知相移量为前提条件。因而,相移器的位移与导向误差必然会大大影响相位分布的求解精度。与此不同,一些算法将相移量作为未知量进行求解,从而消除其误差的影响。例如,传统算法之一的 Carré 算法利用 4 幅等步距相移干涉图,求解相位的精确解;而 Morgan^[2]利用 4 幅以上等步距相移干涉图,求解相移量与相位的最小二乘解。二者均可消除相移线性误差的影响。更进一步,从同一幅干涉图诸像素相移量相等这一认识出发,出现一些富于创意的新算法^[3~8]。这些算法可求解各幅干涉图各自的相移量,以及被测波前相位。其中,以 Okada 等^[6]及 Kong 和 Kim^[7,8]的算法为代表,是一种以交替求解相位分布与相移量的迭代过程为特征的、简便易行的算法。为避免求解非线性方程组的最小二乘解,这种算法并不直接计算每一幅干涉图的相移量,而是利用简单的线性方程组最小二乘解法求其正、余弦值,再通过反正切函数取得相移量值。其局限在于,未能消除由相移器导向误差导致参考镜倾斜而在相位求解结果中引入的误差;且难以在保持求解线性方程组优势的前

提下加以扩展,来消除这种参考镜倾斜引入的误差。

本文认为,由于相移器存在导向误差,导致相移过程中参考镜不能保持平行运动,即存在参考镜倾斜。这使同一幅干涉图诸像素相移量并不相等,但仍在同一平面上。通过对此平面的求解,可消除参考镜倾斜在相位求解结果中引入的误差。并提出,可利用关于误差的一阶泰勒展开式来代替原来的非线性方程,通过迭代过程,求解出此相移量平面,并保证精度。从而避免了求解非线性方程组的最小二乘解。

2 基本原理

2.1 相位最小二乘解算法

图 1 所示的特环曼-格林(Twyman-Green)干涉仪中,以压电陶瓷驱动参考镜移动而引入相移。若压电陶瓷器件存在导向误差,则导致参考镜倾斜。此时,可将第 n 幅干涉图中 (i, j) 像素光强表示为

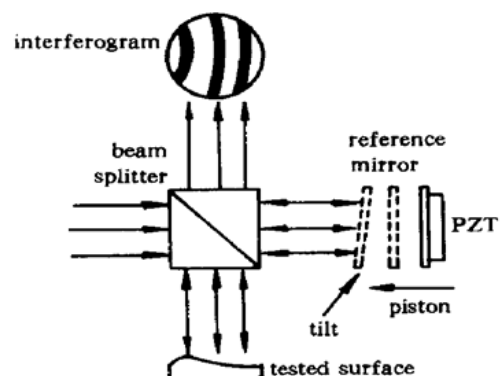


Fig. 1 Twyman-Green interferometer with tilt phase shift error

$$I_n(i, j) = I_0(i, j) \{1 + r(i, j) \times \cos[\phi(i, j) - \delta_n(i, j)]\}, \quad (1)$$

式中, I_0 为背景光强, r 为对比度, ϕ 为待测相位, δ_n 为相移量. δ_n 可表示为

$$\delta_n(i, j) = a_n i + b_n j + d_n. \quad (2)$$

(2) 式为一平面方程, 可称此平面为相移平面. 其中 a_n 与 b_n 分别为相移平面沿 i 、 j 方向的斜率, d_n 为 $(0, 0)$ 像素的相移量. 定义光强差为

$$J_n(i, j) = I_n(i, j) - I_1(i, j) \quad (3)$$

由 $a_1 = b_1 = 0, d_1 = 0$ 及三角公式可得

$$J_n(i, j) = C(i, j) [\cos(a_n i + b_n j + d_n) - 1] + S(i, j) \sin(a_n i + b_n j + d_n), \quad (4)$$

式中 $C(i, j) = I_0(i, j) r(i, j) \cos[\phi(i, j)]$,

$$S(i, j) = I_0(i, j) r(i, j) \sin[\phi(i, j)].$$

针对某一像素 (i, j) , 若已知各幅干涉图的 a_n 、 b_n 、 d_n 值, 将其代入(4)式, 形成线性方程组, 求取 $C(i, j)$ 与 $S(i, j)$ 的最小二乘解, 则其相位为

$$\phi(i, j) = \arctan[S(i, j)/C(i, j)] \quad (5)$$

2.2 相移误差最小二乘算法

由于存在参考镜位移误差与倾斜误差, a_n 、 b_n 、 d_n 的名义值与计算值 a_n^* 、 b_n^* 、 d_n^* 偏离其真值, 其误差可以表示为 Δa_n 、 Δb_n 、 Δd_n . 因而可将(3)式用一阶泰勒展开式表示为

$$J_n(i, j) = C(i, j) [\cos(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*) - 1] + S(i, j) \sin(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*) + [S(i, j) \cos(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*) - C(i, j) \sin(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*)] \times (\Delta a_n i + \Delta b_n j + \Delta d_n). \quad (6)$$

移项, 可得

$$[S(i, j) \cos(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*) - C(i, j) \sin(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*)] (\Delta a_n i + \Delta b_n j + \Delta d_n) = J_n(i, j) - C(i, j) [\cos(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*) - 1] - S(i, j) \sin(a_n^* i + b_n^* j + d_n^*). \quad (7)$$

对第 $n (> 1)$ 幅干涉图, 若已知各像素的 $C(i, j)$ 与 $S(i, j)$ 及 a_n^* 、 b_n^* 、 d_n^* 值, 将其代入(7)式, 形成线性方程组. 求取 Δa_n 、 Δb_n 、 Δd_n 的最小二乘解, 进而可确定 a_n 、 b_n 、 d_n 值:

$$a_n = a_n^* + \Delta a_n \quad (8)$$

$$b_n = b_n^* + \Delta b_n \quad (9)$$

$$d_n = d_n^* + \Delta d_n \quad (10)$$

2.3 迭代过程

可以认为, 若以 a_n 、 b_n 、 d_n 为初值, 由(4)式求

解得到的 $C(i, j)$ 与 $S(i, j)$ 接近于其真值, 则将其代入(7)式, 并由(8)式~(10)式重新求解 a_n 、 b_n 、 d_n , 则其结果要比其初值精确. 因而可形成迭代过程. 步骤简述如下:

1) 选取不共线的若干像素点 (i, j) , 以名义相移量为初值 $d_n^{(0)}$, 并设 $a_n^{(0)} = b_n^{(0)} = 0$, 代入(4)式, 求解线性方程组的最小二乘解, 得到第 1 次迭代结果 $C^{(1)}(i, j)$ 、 $S^{(1)}(i, j)$;

2) 对 $n > 1$ 的全体 n 值, 以 $a_n^{(k-1)}$ 、 $b_n^{(k-1)}$ 、 $d_n^{(k-1)}$ 作为 a_n^* 、 b_n^* 、 d_n^* 值, 并将第 k 次迭代结果 $C^{(k)}(i, j)$ 、 $S^{(k)}(i, j)$ 代入(7)式, 求解线性方程组的最小二乘解, 得到 $\Delta a_n^{(k)}$ 、 $\Delta b_n^{(k)}$ 、 $\Delta d_n^{(k)}$; 并由(8)式得到 $a_n^{(k)}$ 、 $b_n^{(k)}$ 、 $d_n^{(k)}$;

3) 将 $a_n^{(k)}$ 、 $b_n^{(k)}$ 、 $d_n^{(k)}$ 代入(4)式, 求解线性方程组的最小二乘解, 得到第 $k+1$ 次迭代结果 $C^{(k+1)}(i, j)$ 、 $S^{(k+1)}(i, j)$. 重复第 2) 3) 步, 直到足够精度;

4) 根据(4)式, 对全体像素点求解 $C(i, j)$ 、 $S(i, j)$, 再根据(5)式求出 ϕ 值.

3 数值验证

假设一被测波前的相移分布如图 2 所示, 名义相移步距为 0.25π , 模拟生成 8 幅 128×128 像素干涉图, 第 n 幅干涉图 (i, j) 像素的相移量 δ_n 为

$$\delta_n = 0.25(n-1)\pi + 0.20p_n\pi + 0.20(s_n i + t_n j)\pi/127, \quad (11)$$

式中, p_n 、 s_n 、 t_n 为分布在 $-1 \sim 1$ 之间的随机数, 由计算机生成, 用以引入平移误差及倾斜误差.

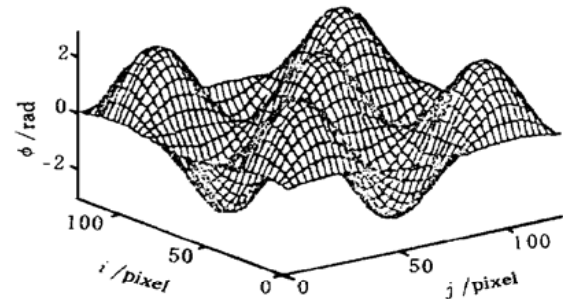


Fig. 2 The giving phase distribution

用不同算法解相位, 所得结果与原来给定相位沿两个方向像素列的差值, 如图 3 所示, 图 3(a) 代表 $j = 64$ 像素列, 图 3(b) 为 $i = 64$ 像素行. 其中方法 1 为同步检测算法^[1], 方法 2 为 Kong^[7] 的算法, 方法 3 为本文所述算法. 由图 3 可见, 由于引入了相移器平移误差与倾斜误差, 作为传统算法的方法 1

会产生较大误差;方法 2 则可消除部分误差;由于方法 3 消除了倾斜的影响,因而比方法 2 更为优越,其误差量级为 $\pm 5 \times 10^{-3}$ rad,其精度远高于方法 1、2。

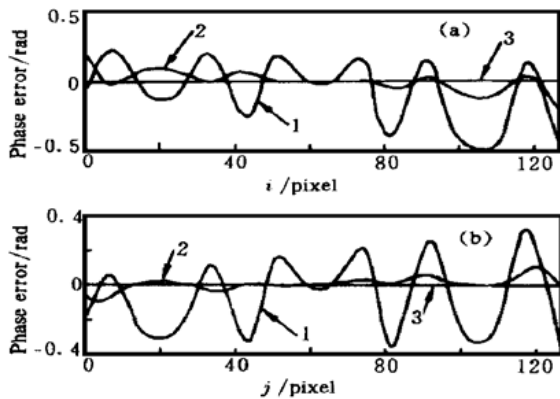


Fig. 3 Calculated phase errors. (a) errors along a pixel column ($j = 64$) and (b) errors along a pixel row ($i = 64$). 1: Synchronous detection, 2: Kong's algorithm, 3: Algorithm proposed in this paper

总结 我们认为,当相移器存在平移误差与倾斜时,同一干涉图诸像素点的相移量在同一平面上。通过求解此平面,可以消除相移器位移误差与倾斜对相位求解结果的影响。据此,本文提出了一种可以消除相移器平移误差与倾斜的算法。其原理是利用一阶泰勒展开式代替非线性方程,通过求解线性方程组的最小二乘解,来求解参考镜的平移误差与倾斜误差,并通过迭代法提高求解的精度。数值模拟结果验证了这种算法在消除相移器平移误差与倾斜影响上的有效性,其精度可达 $\pm 5 \times 10^{-3}$ rad,与

干涉图的量化误差相当。证明这种算法用于较大的参考镜的平移误差与倾斜误差时也有很好的效果。因而,这种算法在提高相移干涉术的测量精度,降低对相移装置的精度要求上能起到明显的作用。

参 考 文 献

- [1] Creath K. Temporal Phase Measurement Method. Robinson D W, Reid G, eds. *Interferogram Analysis: Digital Fringe Pattern Measurement*. Bristol and Philadelphia: IOP Ltd., 1993. 94~ 140
- [2] Morgan C J. Least-squares estimation in phase measurement interferometry. *Opt. Lett.*, 1982, 7(8): 368~ 370
- [3] Wei Chunlong, Chen Mingyi, Guo Hongwei *et al.*. General phase-stepping algorithm using Lissajous figures technique. *Proc. SPIE*, 1998, 3478: 411~ 416
- [4] Wei Chunlong, Chen Mingyi, Wang Zhijiang. General phase-stepping algorithm with automatic calibration of phase steps. *Opt. Engng.*, 1999, 38(8): 1357~ 1360
- [5] Wei Chunlong, Chen Mingyi. Compound phase-stepping algorithm by Lissajous figure technique and iterative least-squares fitting. *Proc. SPIE*, 1999, 3782: 415~ 425
- [6] Okada K, Sato A, Tsujiuchi J. Simultaneous calculation of phase distribution and scanning phase shifting interferometry. *Opt. Commun.*, 1991, 84(3, 4): 118~ 124
- [7] Kong I B, Kim S W. General algorithm of phase-shifting interferometry by iterative least-squares fitting. *Opt. Engng.*, 1995, 34(1): 183~ 187
- [8] Kong I B, Kim S W. Portable inspection of precision surfaces by phase-shifting interferometry with automatic suppression of phase-shift errors. *Opt. Engng.*, 1995, 34(5): 1400~ 1404

A New Algorithm by Iterative Least-Squares Fitting Based on the First Order Taylor Series Expansion in Phase Shifting Interferometry

Guo Hongwei¹⁾ Chen Mingyi¹⁾ Wei Chunlong²⁾

1), Precision Mechanical Engineering Department, Shanghai University, Shanghai 200072
2), Telecommunication Engineering Department, Shanghai University, Shanghai 200072

(Received 8 July 1999)

Abstract: A new algorithm by iterative least-squares fitting in phase shifting interferometry is presented. If the reference mirror has tilt and piston errors caused by phase-shifting, the phase shifts of the pixels along the same interferogram are not a constant, but they are still kept on the same plane. So solving this plane can eliminate the errors. The first order Taylor series expansion replaces the non-linear equation used in solving this plane, and thus simplifies the algorithm. By iterative, the accuracy can be guaranteed. The validity of this algorithm has been examined by means of computer simulation.

Key words: phase shifting interferometry; phase shifting errors; least-squares fitting; iterative