

文章编号: 0253-2239(2001)01-0059-05

# 非线性动态特性的逆推演方法及其在干涉术中的应用\*

朱若谷<sup>1)</sup> 陈本永<sup>2)</sup> 林 敏<sup>1)</sup>

1), 中国计量学院计量与测控系, 杭州 310034  
2), 浙江大学机械工程学系, 杭州 310027

**摘要:** 提出了研究对象非线性动态特性的逆推演新方法, 它的特点是从已知对象的非微分方程解析解导出该对象可能的微分方程, 从而开拓它的解域或解空间, 或者说恢复丢失的解。同时讨论了当对象为法布里-珀罗干涉 (F-P) 或迈克耳孙干涉时该方法的应用过程, 并且对法布里-珀罗定义新的不透系数 ( $u = 1/\tau$ ), 从而给出更简洁和易分析的对象动态特性微分方程, 以及由此导出测量法布里-珀罗干涉相位的过程。值得注意的是由新方法导出的微分方程揭示对象更一般的时空演化特征, 而且在现有的经验和知识基础上可以进一步唯象地拓展至其他可能的非线性形式, 从而使对象的表达方式更接近它的实际情况。

**关键词:** 不透过度; 非线性; 动态特性

中图分类号: O436 文献标识码: A

## 1 前 言

由于双法布里-珀罗干涉术兼具高分辨率频谱和全补偿并行测量的特点, 使它在涉及光信号检测的相关领域中获得越来越广泛的应用。例如: 相调双法布里-珀罗干涉术<sup>[1-3]</sup>、美国研究和开发 (R&D) 计划的激光引力观察系统<sup>[4]</sup>、激光雷达大气层风速监测系统<sup>[5,6]</sup>等。

通常情况下, 在由光场叠加(或相干性原理)导出的透射光强公式基础上直接研究法布里-珀罗的关联特性。然而, 在分析双法布里-珀罗腔动态特性时, 发现如果从光强公式着手, 首先导出微分方程, 则可以讨论它的更一般化时空演化特征。这种方法也可以推广到一般的对象动态特性分析中去。这种方法称为逆推演过程。如果在过程中合适地应用现有的经验和知识就可以拓展对象的解空间, 或者说恢复丢失的解, 从而使对象的表达方式更符合实际情况。

同时, 经分析众多的物理问题(如量子光学)后, 注意到那些描述非线性对象动态特性的微分方程, 尽管它们的解由于与边界条件、初始条件以及表示介质各种物理特性的方程系数有关而形式繁多,

还是存在着基本类型及其变型。因此, 一方面, 仅仅用通常的方法给出复杂对象的演化方程是较困难的, 到目前为止仅有有限对象用作者命名的非线性演化方程表示, 如: Burgers、Kdv、Klein-Gordon、Sine-Gordon 等<sup>[7,8]</sup>; 另一方面, 也有许多研究工作讨论如何由实验数据直接导出对象特性的方法, 典型的方法如吉洪诺夫正则法<sup>[9]</sup>。除此以外, 许多对象用其他方式获得对象的非微分方程解(输入、输出特性)。

正因为如此, 我们的兴趣是讨论如何从对象的非微分方程解中导出它的微分方程形式, 从而可以进一步分析它的动态特性。

## 2 逆推演方法应用于干涉术

为简单起见, 讨论一维情况。当对象的输入、输出特性由  $y = f(x)$  解析函数表示时, 可以通过求各阶导数的方法构成集合  $\{x, y(x), dy/dx, \dots, d^n y/dx^n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 然后根据已知的函数和现有的经验与知识构成对象的微分方程  $F(x, y, dy/dx, \dots, d^n y/dx^n) = 0$ 。下面讨论该方法在干涉术中的应用。

### 2.1 一般性原理

众所周知法布里-珀罗干涉的透射公式为

$$\tau = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\phi/2)}, \quad (1)$$

式中  $\tau$  为光强透射率;  $I, I_0$  分别为输出和输入光强;

\* 国家自然科学基金(69773043)资助项目。

收稿日期: 1999-03-26; 收到修改稿日期: 2000-03-03

$F = 4R/(1-R)^2$  为精巧系数,  $R$  为两端面镜的平均反射率, 若两镜的反射率分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 则  $R = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$ ;  $\phi = (4\pi nd \cos \nu)/\lambda$  为光相位, 其中  $n$  为腔内介质折射率,  $d$  为腔长度,  $\nu$  为入射角,  $\lambda$  为光波长. 首先定义法布里-珀罗的不透度为  $u = 1/\tau$ , 则(1)式成为

$$u = 1 + F \sin^2 \left[ \frac{\phi}{2} \right] = \left[ 1 + \frac{F}{2} \right] - \frac{F}{2} \cos \phi. \quad (2)$$

值得注意的是由(2)式可以导出法布里-珀罗对象的精巧系数  $F$  和光相位  $\phi$  的测量式

$$F = \text{Max}(u) - 1, \quad (3)$$

$$\phi = \arccos[2(1-u+F/2)/F]. \quad (4)$$

对照迈克耳孙干涉光强公式

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi,$$

它与(2)式形式上都可以用  $y = a + b \cos \phi$  表示, 因此以下分析过程也适合于迈克耳孙干涉. 首先求出  $u$  对  $\phi$  的一、二阶导数为

$$\frac{du}{d\phi} = v = \frac{F \sin \phi}{2}, \quad (5a)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} = \frac{dv}{d\phi} = \frac{F \cos \phi}{2}. \quad (5b)$$

考虑(2)式后, 构成该对象的微分方程组为

$$\frac{du}{d\phi} = v, \quad (6a)$$

$$\frac{dv}{d\phi} = 1 + \frac{F}{2} - u, \quad (6b)$$

或微分方程

$$\left[ \frac{d^2 u}{d\phi^2} \right]^2 + \left[ \frac{du}{d\phi} \right]^2 = \left[ \frac{F}{2} \right]^2. \quad (7)$$

在(6b)式中, 若再对  $\phi$  微分一次, 在略去  $dF/d\phi$  影响下有

$$\frac{d^2 v}{d\phi^2} + v = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d^3 u}{d\phi^3} + \frac{du}{d\phi} = 0. \quad (8)$$

由(7)式和(8)式导出的重要结论为:

1) 法布里-珀罗对象以  $u$  作为输出量时, 它的最佳工作点在拐点( $dv/d\phi = 0$ )处, 这时

$$\phi_0 = \frac{2m+1}{2}\pi, \quad v_0 = \frac{F}{2}, \quad u_0 = \frac{2+F}{2},$$

而且有线性测量公式

$$\phi = \frac{1}{c_0}(u - c_1), \quad (9)$$

其中

$$c_0 = v_0 = \frac{F}{2}, \quad c_1 = \frac{2+F}{2} - \frac{(2m+1)\pi F}{4},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

2) 无论是雅可比行列式  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$  还是相平面轨迹

$$\frac{(du/d\phi)^2}{(F/2)^2} + \frac{(1+F/2-u)^2}{(F/2)^2} = 1 \quad (10)$$

都表明法布里-珀罗对象的动态特性为相平面轨迹是圆心在  $[(1+F/2), 0]$ 、半径为  $F/2$  的圆, 它的奇点为中心点, 而中心点的存在表示系统在平衡态附近存在无数可能的周期运动状态. 圆族的表示式为

$$v^2 + [(1+F/2) - u]^2 = (c_2 + F/2)^2, \quad (11)$$

其中

$$c_2 = \sqrt{2[C^2 - (1+F/2)^2]} - F/2; \quad C \geq 1 + F/2.$$

圆族表示法布里-珀罗一旦离开原平衡态就可能进入另一周期运动状态.

下面进一步讨论法布里-珀罗对象被扩展的解空间. 将(2)式代入(11)式, 则给出

$$\frac{du}{d\phi} = \pm \sqrt{\left[ c_2 + \frac{F}{2} \right]^2 - \left[ \frac{F}{2} \cos \phi \right]^2}, \quad (12)$$

$$\int_1^u du = \int_1^\phi \pm \sqrt{\left[ c_2 + \frac{F}{2} \right]^2 - \left[ \frac{F}{2} \cos \phi \right]^2} d\phi + C, \quad (13)$$

其中已设定初始条件  $\phi = 0, u = 1$ . 进一步设

$$a = \frac{F/2}{c_2 + F/2}, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2} - \phi,$$

则

$$u = 1 + C - \left[ c_2 + \frac{F}{2} \right] \int_{\pi/2}^{\pi/2 - \phi} \sqrt{1 - (a \sin \phi_1)^2} d\phi_1, \quad (14)$$

式中的  $C$  为待定常数, 再引用第二类椭圆积分的定义式<sup>[10]</sup>

$$E(\phi, m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - (m \sin t)^2} dt, \quad (15)$$

就得出

$$u = 1 + C - \left[ c_2 + \frac{F}{2} \right] \left[ E\left[ \frac{\pi}{2} - \phi, a \right] - E\left[ \frac{\pi}{2}, a \right] \right] \quad (16)$$

为对比起见, 将(11)式恢复成关于透过度的微分方程组和微分方程

$$\frac{d\tau}{d\phi} = v_0, \quad (17a)$$

$$\frac{dv_0}{d\phi} = \frac{2}{\tau} v_0^2 + \tau - \left[ 1 + \frac{F}{2} \right] \tau^2, \quad (17b)$$

$$-\frac{d^2 \tau}{d\phi^2} + \frac{2}{\tau} \left[ \frac{d\tau}{d\phi} \right]^2 = \left[ 1 + \frac{F}{2} \right] \tau^2 - \tau. \quad (18)$$

设  $\tau_1 = \ln \tau$ , 化简后给出相应的微分方程组和微分方

程为

$$\frac{d\tau_1}{d\phi} = v_1, \quad (19a)$$

$$\frac{dv_1}{d\phi} = v_1^2 + 1 - \left[ 1 + \frac{F}{2} \right] e^{\tau_1}, \quad (19b)$$

$$- \frac{d^2\tau_1}{d\phi^2} + \left[ \frac{d\tau_1}{d\phi} \right]^2 = \left[ 1 + \frac{F}{2} \right] e^{\tau_1} - 1. \quad (20)$$

它们的相平面轨迹分别为

$$\frac{d\tau}{d\phi} = \pm \frac{1}{2} \tau^2 \sqrt{F^2 - (2 + F - 2/\tau)^2}, \quad (21)$$

$$\frac{d\tau_1}{d\phi} = \pm \frac{1}{2} e^{\tau_1} \sqrt{F^2 - (2 + F - 2e^{-\tau_1})^2}, \quad (22)$$

其中  $1/(1+F) \leq \tau \leq 1$ . 这时若在透射光强极大值附近测量, 即满足条件  $\left. \frac{d\tau}{d\phi} \right|_{\tau=1} = 0$ , 则可利用下列近似公式

$$\left. \frac{d^2\tau}{d\phi^2} \right|_{\tau=1} = -\frac{F}{2}, \quad (23a)$$

$$\frac{d\tau}{d\phi} \approx -\frac{F}{2} \phi + b_0, \quad (23b)$$

$$\tau \approx -\frac{F}{4} \phi^2 + b_0 \phi + b_1. \quad (23c)$$

由初始条件  $\phi = 0, \tau = 1, \left. \frac{d\tau}{d\phi} \right|_{\tau=1} = 0$ , 得出

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1,$$

所以(23c)式可化为

$$\tau \approx 1 - F\phi^2/4, \quad (24)$$

或者

$$\phi \approx \pm 2 \sqrt{(1-\tau)/F},$$

对应  $1 - \Delta\tau \leq \tau \leq 1, 0 < \Delta\tau \ll 1$ . (25)

由(17)式~(20)式分析对象动态特性将复杂得多, 限于篇幅, 略去这部分分析, 但主要结果是奇点为  $[\tau = 1/(1+F/2), 0]$ , 其性质还是中心点。

通过上述讨论, 不难看出本文提出的不透过度测量方法具有下列显著特点:

1) 在拐点处, 不透过度与光相位存在线性关系, 而且精巧系数等于此处一阶导数的二倍, 从而提供精巧系数和光相位测量的新方法。

2) 由它导出的微分方程有利于分析对象的动态特性。

## 2.2 基于经验和知识的唯象推演

(20)式两边再对  $\phi$  求导一次, 就有

$$- \frac{d^3\tau_1}{d\phi^3} + 2 \frac{d\tau_1}{d\phi} \frac{d^2\tau_1}{d\phi^2} = \left[ 1 + \frac{F}{2} \right] e^{\tau_1} \frac{d\tau_1}{d\phi}. \quad (26)$$

由于通常情况下法布里-珀罗对象工作在最大透射光强条件下, 即  $\tau = 1, \tau_1 = \ln \tau = 0$  附近, 所以  $e^{\tau_1} \approx 1$

+  $\tau_1$ , 代入(26)式就有

$$\frac{d\tau_1}{d\phi} + \tau_1 \frac{d\tau_1}{d\phi} - \frac{4}{2+F} \frac{d\tau_1}{d\phi} \frac{d^2\tau_1}{d\phi^2} + \frac{2}{2+F} \frac{d^3\tau_1}{d\phi^3} = 0. \quad (27)$$

基于经验和知识, (27)式可以唯象推演至非线性演化方程

$$u_t + uu_x - 2\beta u_x u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \quad (28)$$

其中  $u = \tau_1, \zeta = x - ct, \phi = \omega t - kx, \xi = -\phi/k$ , 取  $c = \omega/k = -1, \beta = 2/k^2(2+F)$ . 与 Benney 方程比较<sup>[8]</sup>, 由于没有考虑介质其他耗散和激励作用, 所以四阶导数的系数为零。因此对法布里-珀罗对象的有激励描述可参照 Benney 方程

$$u_t + uu_t + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0. \quad (29)$$

从而给出法布里-珀罗对象方程为

$$\frac{d\tau_1}{d\phi} + \tau_1 \frac{d\tau_1}{d\phi} + \left[ \alpha - \frac{4}{2+F} \frac{d\tau_1}{d\phi} \right] \frac{d^2\tau_1}{d\phi^2} + \frac{2}{2+F} \frac{d^3\tau_1}{d\phi^3} + \gamma \frac{d^4\tau_1}{d\phi^4} = 0, \quad (30)$$

其中  $\alpha, \gamma$  为待定参数。(30)式可化为

$$-c \frac{d\tau_2}{d\xi} + a_0 \tau_2 \frac{d\tau_2}{d\xi} + a_1 \frac{d^2\tau_2}{d\xi^2} + \beta_1 \frac{d\tau_2}{d\xi} \cdot \frac{d^2\tau_2}{d\xi^2} + \beta_2 \frac{d^3\tau_2}{d\xi^3} + \gamma_1 \frac{d^4\tau_2}{d\xi^4} = 0, \quad (31)$$

其中

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad a_0 = \frac{\omega^2}{k}, \quad a_1 = -\frac{a_0 \alpha}{k \omega},$$

$$\beta_1 = -\frac{4a_0}{k^2(2+F)}, \quad \beta_2 = -\frac{2a_0}{k^2 \omega(2+F)},$$

$$\gamma_1 = -\frac{a_0 \gamma}{k^3 \omega}, \quad \tau_1 = \omega \tau_2.$$

(31)式选择的量纲满足:  $\alpha, \gamma, F, \tau_1$  为无量纲,  $[ \tau_2 ] = [ t ], [ \omega ] = [ t ]^{-1}, [ c ] = [ m ] [ t ]^{-1}, [ \xi ] = [ m ], [ k ] = [ m ]^{-1}$ , 从而(31)式中各项为无量纲。为简单起见, 可设  $a_0 = 1 [ m ] [ t ]^{-2}$ , 或  $|k| = |\omega| = -1$  (选择单位中数值关系保证), 即对系数作出正规化处理, 则导出以下求解过程:

1) 当物理影响使  $\beta_2 \frac{d^3\tau_2}{d\xi^3} \gg \beta_1 \frac{d\tau_2}{d\xi} \cdot \frac{d^2\tau_2}{d\xi^2}$  时,

(31)式化为典型的 Benney 方程, 它有显式孤立波行<sup>[8]</sup>波解:

$$\tau_2 = b \operatorname{sech}^2(a\xi) [ 1 + \tanh(a\xi) ]. \quad (32)$$

为了满足初值  $\xi = 0, \tau_1 = \tau_2 = 0$ , (32)式修正为

$$\tau_2 = -b \{ 1 - \operatorname{sech}^2(a\xi) [ 1 + \tanh(a\xi) ] \}. \quad (33)$$

将(33)式作为试解代入(31)式( $\beta_1$ 项为0), 给出:

$$\tau_2 = -\frac{1280}{4913} \frac{\beta_2^3}{\gamma_1^2} \left[ 1 - \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{2}{17} \frac{\beta_2}{\gamma_1} \xi \right] \right] \times \left[ 1 + \tanh \left[ -\frac{2}{17} \frac{\beta_2}{\gamma_1} \xi \right] \right], \quad (34)$$

其中

$$\xi = x - ct, \quad c = -\frac{1056}{4913} \frac{\beta_2^3}{\gamma_1^2}.$$

当选择  $\beta_2^2 = \frac{17^2}{16} \alpha_1 \gamma_1$  时,

$$\tau_2 = -20\alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} \left[ 1 - \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} \xi \right] \right] \times \left[ 1 - \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} \xi \right] \right],$$

$$c = -\frac{37}{2} \alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}}, \quad (35)$$

其中  $\alpha_1$  和  $\gamma_1$  应符号相同, 当  $\alpha_1, \gamma_1 > 0$  时,  $\alpha_1$  为激励,  $\gamma_1$  为耗散; 反之,  $\alpha_1$  为耗散,  $\gamma_1$  为激励。

2) 不忽略  $\beta_1 \frac{d\tau_1}{d\xi} \cdot \frac{d^2\tau_2}{d\xi^2}$  项时, 对(31)式两边积分并取积分常数为 0, 给出

$$-c\tau_2 + \frac{\tau_2}{2} + \alpha_1 \frac{d\tau_2}{d\xi} + \frac{\beta_1}{2} \left( \frac{d\tau_2}{d\xi} \right)^2 + \beta_2 \frac{d^2\tau_2}{d\xi^2} + \gamma_1 \frac{d^3\tau_2}{d\xi^3} = 0. \quad (36)$$

它表示一个三维自治动力系统:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau_2}{d\xi} &= u, \\ \frac{du}{d\xi} &= v, \\ \frac{dv}{d\xi} &= \frac{1}{\gamma_1} \left[ c\tau_2 - \frac{1}{2} \tau_2^2 - \alpha_1 u - \frac{1}{2} \beta_1 u^2 - \beta_2 v \right] \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

选择试解形式

$$\tau_2 = \tau_{20} - \frac{a}{1 + e^{b\xi}}, \quad (38)$$

代入(31)式, 经演算后给出:

$$a = -\frac{2\beta_2}{(1-\gamma)\beta_1} = \frac{1}{(1-\gamma)\omega}, \quad (39a)$$

$$b = -\frac{\beta_2}{6(1-\gamma)},$$

$$\beta_2 = -\frac{2a\omega}{k^2\omega(2+F)} = -\frac{2\omega}{k^3(2+F)}, \quad (39b)$$

$$\tau_{20} = 2c = a, \quad (39c)$$

所以

$$b = -\frac{\omega}{3k^3(1-\gamma)(2+F)},$$

$$\tau_2 = \frac{1}{(1-\gamma)\omega} \left[ 0.5 - \frac{1}{1 + e^{b\xi}} \right]. \quad (39d)$$

相空间点  $(0, 0, 0)$  和  $(2c, 0, 0)$  表示两种稳定态, 其一为同宿轨道表征显式孤立波行波解(35)式, 另一为异宿轨道表征的波前波解(39)式。图 1(a) 表示(35)式孤立波解, 图 1(b) 表示(39)式波前解。

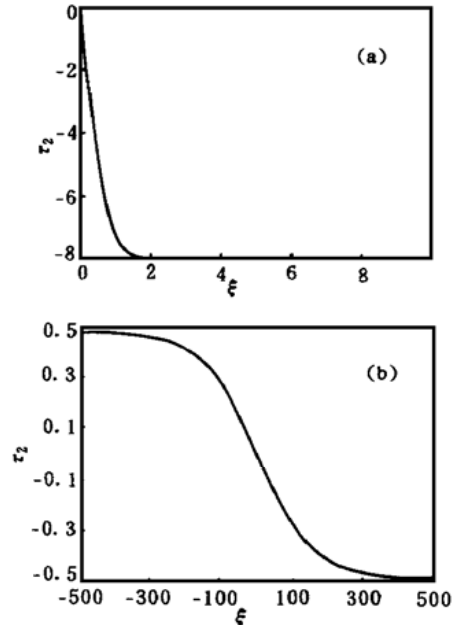


Fig. 1 (a) Curve of Eq. (35); (b) Curve of Eq. (39). ( $\alpha = 0.2$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $R = 0.95$ ,  $F = 1520$ ,  $k = \omega = -1$ )

**结论** 提出了研究对象动态特性新方法, 行之有效地拓展对象的解空间并且可以在导出微分方程基础上进一步分析它的动态特性, 尤其是在深入研究法布里-珀罗对象后, 定义新的不透过度参数而给出了相关的精巧系数和线性光相位测量新方法及其工作点选择。同时作出对象的相平面稳定性分析, 通过比较证实它的意义。除此之外, 对基于经验和知识的唯象推演讨论表明, 如果适当利用现有的经验和知识更能起到事半功倍的效果。

### 参 考 文 献

- [1] 朱若谷. 正弦相位调制双法布里-珀罗干涉仪的实验研究. 光学学报, 1994, 14(5): 508~ 512
- [2] 朱若谷. 相调 Fabry-Perot 干涉术. 第四届全国高校光学学术与教学会议论文集. 北京: 中国计量出版社, 1992. 283~ 289
- [3] 朱若谷. 补偿式微位移测量系统. 中国, Int. CI<sup>5</sup>G01B11/02, CN1064932A, 1992-09-30
- [4] Spero R E, Whitcomb S E. The laser interferometer gravitational wave observatory (LIGO). *Optics & Photonics News*, 1995, 6(7): 35~ 39
- [5] Korb C L, Gentry B M, Weng C Y. Edge technique:

- theory and appluaton to the lidar measurement of atmospheric wind. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(21): 4202~4213
- [6] Chanin M L, Garnier A, Hauchecorne A *et al.*. A Doppler lidar for measuring winds in the middle atmosphere. *Geophys. Res. Lett.*, 1989, **16**: 1273~ 1276
- [7] Taniuti T, Nishihara K. *Nonlinear Waves*. London: Pitman Books Limited. 1983
- [8] 刘式达, 刘式适, 叶其孝. 非线性演化方程的显式行波解. *数学的实践与认识*, 1998, **28**(4): 289~ 301
- [9] 格拉诺夫斯基 B A 著. 傅烈堂, 鲍建忠译. *动态测量*, 北京: 中国计量出版社, 1989
- [10] 四川矿业学院数学教研组编. *数学手册*, 北京: 科学出版社, 1979

## Inverse Evolution Method for Nonlinear Dynamics of Objects and Its Application to Interferometry

Zhu Ruogu<sup>1)</sup> Chen Benyong<sup>2)</sup> Lin Min<sup>1)</sup>

1), China Institute of Metrology, Hangzhou 310034  
2), Zhejiang University, Hangzhou 310027

(Received 26 March 1999; revised 3 March 2000)

**Abstract:** An inverse evolution method for studying nonlinear dynamics of an object is suggested. Its main process is to deduce a probability differential (or partial differential) equation to the object using known solution from non-differential equation, therefore the solution domain or space would be extended, in other words, those lost solutions are restored.

Meanwhile its application to Fabry-Perot (F-P) interferometry is discussed in detail (also suitable to Mechelson interferometry). A new parameter definition, opaqueness of F-P, is recommended, then one can deduce the dynamic property of F-P and get other methods for measuring the fineness and optic phase of F-P.

It is worth to note that not only an extended solution space is contained in the differential equation but also one can further in phenomenon infer it according to the known typical nonlinear evolution equations or current experience and knowledge, hence the representation for object would be more and more close to its true state.

**Key words:** opaqueness; nonlinear; dynamic property