

文章编号: 0253-2239(2001)01-0039-05

光折变晶体中全息相位栅的包迹*

郭迎春 刘立人 李建郎 周常河

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘要: 联立稳态带传输方程和耦合波方程, 基于 Kukhtarev 模型和 Moharam 的场函数, 以光强调制度为主要变量, 求得了适用于任意干涉光强调制度及光激发效率为任意常数时的光折变晶体中全息相位栅包迹的解析解。在此基础上, 分析了非破坏性读出情况下的衍射效率。

关键词: 光折变效应; 动力学光栅; 光波耦合; 热激发; 光激发

中图分类号: O438.1 文献标识码: A

1 引 言

带传输模型^[1,2]可很好地解释由晶体的光折变效应所记录的体全息图。两束相干的记录光在晶体内部形成周期性光强分布, 晶体内的电子由施主被不同程度地激发到导带, 在扩散场、外加电场和光生伏打场的作用下通过扩散和漂移而重新分布, 然后又被受主俘获, 这样在晶体内部形成与入射干涉光强相对应的调制的内电场。通过电光效应, 晶体内部产生了相位光栅, 即全息图。纯电子的扩散使得相位光栅对干涉光强有 $\pi/2$ 的相移, 而当干涉光强和感光相位光栅之间有一定的相移时, 两束光之间将发生能量转移, 即两光束耦合, 可用耦合波方程^[3]来描述。因此, 相干光强的幅度和相位是记录光传播距离的函数, 从而相位栅是幅度被调制的弯曲的光栅, 对衍射效率有直接的影响。欲求得相位栅, 需要将带传输动力学方程和光波耦合方程联立求解。

记录的稳态解决定着信息的读出。人们处理稳态通常采用三步方法^[1,2]: 1) 首先在假定的干涉光强分布下, 基于带传输方程求取一薄层晶体内部的空间电荷内电场。现已有包括扩散、漂移、光生伏打效应的解析解^[4,5]。一般来讲, 内电场是干涉光强调制度的非线性函数。2) 由线性电光效应得出内电场相应的相位光栅, 在上述假定干涉光强分布产生的非线性响应的相位光栅中, 用耦合波方程, 求得其由于能量交换而产生的记录光的相位和光强分布。3) 求得的光强分布即为整个晶体中的真正的动力

学光束耦合的光强分布, 由此真正的光强分布代替假定的光强分布而得到真正的相位光栅的幅度和相位, 进而求得衍射效率。其中的第二步, 即对具有调制度非线性响应的耦合波方程的求解最为关键。Belic 等人^[6]提出了求解任意调制度函数的耦合波方程的一般解析解的方法, 但只是从微分表达式转换为解析的积分表达式, 对于给定的一个调制度函数, 还有待于进一步的积分, 故而等于没有取得解析解。

本文主要研究任意大小的光强调制度下的动力学光折变光栅的解析解。由带传输方程可知^[4], 内电场调制度不仅与光强调制度有关, 而且与光激发效率有关[光激发效率的定义为 $sI/(sI + \beta)$, s 为光激发系数, I 为晶体内部的总光强, β 为热激发系数], 因此动力学光折变光栅的解析分析主要涉及任意调制度和光激发效率下的数学分析。Lee 等人^[7]给出了任意调制度都适用的解析解, 但它不考虑热激发, 相当于本文中光激发效率为 1 的情况。对数值求解还有其他更为简单的方法^[8]。

本文基于带传输方程和耦合波方程, 采用三步法和以干涉光强调制度为耦合波方程的主要变量进行稳态解析求解分析, 求得了任意调制度和任意常数光激发效率下的相位栅包迹的精确解析解。进而通过分析等效作用距离, 考察了记录的相位光栅的衍射效率^[8]。

2 原 理

2.1 光栅包迹的定义

光折变晶体中全息记录和读出的原理如图 1 所示, 光波耦合使得干涉光强调制度和相位是光束传

* 国家自然科学基金(68937020)、中国科学院和上海应用物理中心资助课题。

收稿日期: 1999-07-19; 收到修改稿日期: 1999-10-08

播距离 z 的函数。从而由光折变效应而产生的相位光栅的调制度在 z 方向上也是变化的。将调制度的幅度在能量传播的方向上的变化称为包迹, 从而有干涉光强的包迹和相位光栅的包迹^[10]。图 2 给出了相位光栅包迹的示意图。图中的矩形框对应晶体的边界, M 为相位光栅调制度的幅度。

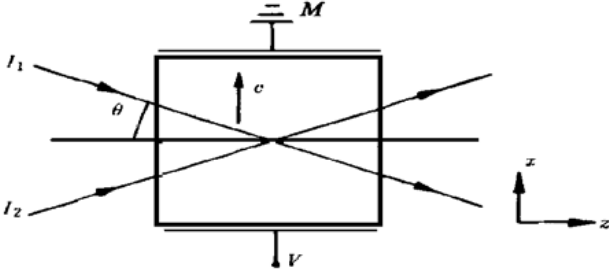


Fig. 1 Arrangement for photorefractive holographic recording and readout

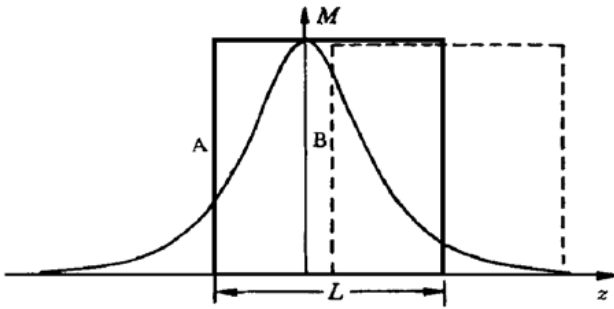


Fig. 2 Steady-steady grating envelope shape. The different rectangular boxes represent different crystal boundaries, the starting point of box is determined by the m_0 and the width by the length of crystal

2.2 光折变效应

假定稳态时晶体内存在恒定的干涉光强分布, 两束记录光的光电场表示为:

$$E_j = A_j \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) = \sqrt{I_j(z)} \exp[i\omega t - i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - i\varphi_j(z)], \quad (1)$$

其中, $j = 1, 2$, ω 为频率, \mathbf{k} 为波矢, φ_j 为附加相移, I_j 为记录光的光强。在边界, $I_j(0) = I_{j0}$, 且 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, 初始调制度为 m_0 。于是干涉光强的分布为:

$$I(z) = (A_1 + A_2)(A_1^* + A_2^*) = I_0(z) \{1 + m(z) \cos[Kx - \varphi(z)]\}, \quad (2)$$

其中

$$I_0(z) = I_1(z) + I_2(z),$$

$$m(z) = \frac{2\sqrt{I_1(z)I_2(z)}}{I_0(z)},$$

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z),$$

$$K = \frac{4\pi}{\lambda} n_0 \sin \theta.$$

$m(z)$ 为干涉光强的调制度, \mathbf{K} 是相位光栅的波矢。假定内电场在 x 方向上的变化比在 z 方向上的变化快得多, 从而由一维传输的带传输方程组, 可得到记录的内电场的解(因一阶傅里叶分量起关键作用, 故而这里仅取内电场的一阶分量)为^[4, 5]

$$\left. \begin{aligned} E_{sc} &= E f(p m) \cos[Kx - \varphi(z) - \phi_0], \\ E_e &= 2[(V/L - E_v)^2 + E_D^2]^{1/2}, \\ \tan \phi_0 &= \frac{E_D}{V/L - E_v}, \\ f(p m) &= \frac{1 - \sqrt{1 - p^2 m^2}}{p m}, \\ p(z) &= \frac{s I_0(z)}{s I_0(z) + \beta} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, $E_D = K k_b T / q$ 为扩散场, $E_v = \kappa \alpha / (q \tau \mu_s N_D)$ 为光生伏打场, τ 为电子在导带中的寿命, κ 为晶体的特征常数, ϕ_0 为相位光栅对干涉光强的相移, $p(z)$ 定义为光激发效率, α 为吸收系数, q 为电荷电量, μ 为电子的迁移率, L 为晶体的厚度, V 为 x 方向的外加电场, N_D 为施主的密度。由方程(3)可见求解相位光栅转化为求解干涉光强的调制度和相位, 需要借助耦合波方程。

2.3 约化的耦合波方程

由线性电光效应产生内电场的相位光栅, 从而描述光束耦合的耦合波方程可用光强的幅度和相位来表示为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_1}{dz} &= \frac{1}{2} \Gamma f(p m) \sqrt{I_1 I_2} - \frac{\alpha}{\cos \theta} I_1, \\ \frac{dI_2}{dz} &= -\frac{1}{2} \Gamma f(p m) \sqrt{I_1 I_2} - \frac{\alpha}{\cos \theta} I_2, \\ \frac{d\varphi_1}{dz} &= -\frac{1}{2} \Gamma' f(p m) \sqrt{I_2 / I_1}, \\ \frac{d\varphi_2}{dz} &= -\frac{1}{2} \Gamma' f(p m) \sqrt{I_1 / I_2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 Γ 和 Γ' 分别为两束记录光的幅度和相位的耦合系数,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda} n_1 \frac{\sin \phi_0}{\cos \theta}, \\ \Gamma' &= \frac{\pi}{\lambda} n_1 \frac{\cos \phi_0}{\cos \theta}, \\ n_1 &= n_0^3 \chi_{\text{eff}} E_e. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由 $dI_1/dz + dI_2/dz$, 经简单的定积分, 可得到:

$$I_0(z) = I_0 \exp\left[-\frac{\alpha z}{\cos\theta}\right], \quad (6)$$

从而光激发效率为

$$p(z) = \frac{sI_0 \exp(-\alpha z/\cos\theta)}{sI_0 \exp(-\alpha z/\cos\theta) + \beta}. \quad (7)$$

由于波耦合方程组(4)中相位栅对干涉光强调制度 m 的非线性响应 $f(pm)$ 的复杂性, 直接求解是困难的, 故而利用(2)式中 m 和 φ 的表达式, 将之改写成以 m 、 φ 及 z 为变量, 称之为约化的耦合波方程:

$$\frac{dm}{dz} = \pm \frac{1}{2} \Gamma f(pm) \sqrt{1-m^2}, \quad (8)$$

式中, + 对应 $I_1 > I_2$, - 对应 $I_1 \leq I_2$.

$$\frac{d\varphi(z)}{dm} = -\frac{2\Gamma'}{\Gamma} \frac{1}{m}. \quad (9)$$

由(9)式可得到

$$\varphi(z) = -\frac{2\Gamma'}{\Gamma} \ln\left[\frac{m}{m_0}\right]. \quad (10)$$

可见, 求得调制度 m 是解决问题的关键。下面将在稳态下, 对于不同的光激发效率 p 求解(8)式。

3 干涉光强的包迹

3.1 单位光激发效率

在理想情况下热激发远远小于光激发, 即 $\beta \ll sI_0(z)$, 此时 $p = 1$ 。(8)式可写为

$$\frac{m dm}{[1 - (1 - m^2)^{1/2}][1 - m^2]^{1/2}} = \pm \frac{\Gamma dz}{2},$$

显然, 上式可积分为

$$\ln(1 - \sqrt{1 - m^2}) = \pm \Gamma z/2 + C. \quad (11)$$

由定义, 光强调制度的包迹为:

$$m(z) = \sqrt{1 - \left|1 - \exp\left[\pm \frac{\Gamma z}{2}\right]\right|^2}, \quad (12)$$

式中, + 对应负 z , - 对应正 z 。

3.2 任意常数光激发效率

考虑热激发, 不考虑吸收时, 由(7)式可见, p 近似为常数, 当然 $p < 1$ 。由(8)式得不到直接的解析解, 故而引入参量 u :

$$\tan u = \sqrt{1 - m^2} \tan \theta, \quad (13)$$

其中

$$\tan \theta = \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}. \quad (14)$$

(8)式的左边成为:

$$\frac{p m dm}{(1 - m^2)^{1/2} \{1 - [1 - (pm)^2]^{1/2}\}} = \left[\frac{1}{\cos u} - \frac{1}{\cos u - (1 - p^2)^{1/2}} \right] du.$$

进而可得到

$$\Gamma z = \pm 2 \ln \left[\tan \left[\frac{\pi}{4} + u \right] \left[\frac{\sin \left[\frac{\theta - u}{2} \right]}{\sin \left[\frac{\theta + u}{2} \right]} \right]^{1/p} \right] + C. \quad (15)$$

于是, 得到光强调制度包迹的参数解为:

$$m = \sqrt{1 - \tan^2 u \coth^2 \theta}, \quad (16)$$

$$\Gamma z = \pm 2 \ln \left[\tan \left[\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right] \left[\frac{\sin \left[\frac{\theta - u}{2} \right]}{\sin \left[\frac{\theta + u}{2} \right]} \right]^{1/p} \right]. \quad (17)$$

式中, + 对应负 z , - 对应正 z 。

由(12)式、(16)式和(17)式, 得出不同的光激发效率下的干涉光强调制度的包迹, 如图3所示。横轴为等效的光束传播距离。由图3可见, 热激发越大, 光激发效率 p 越小, 干涉光强调制度包迹变化越缓慢。

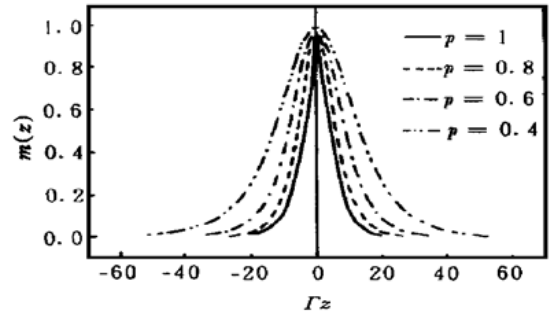


Fig. 3 Envelopes of intensity modulation $m(z)$ as the function of equivalent propagation distance Γz with different light excitation efficiency p

4 动力学相位栅的包迹

由(12)式、(16)式和(17)式给出了不同光激发效率下的干涉光强调制度包迹 $m(z)$, 将它们连同光激发效率一起代入(3)式, 得到晶体内记录的相位栅的调制度的包迹

$$M(z) = \frac{1 - [1 - p^2 m(z)^2]^{1/2}}{p m(z)} \quad (18)$$

不同的光激发效率下的相位栅的包迹如图4所示, 它们以等效传播距离 Γz 为函数。可见, 随着光激发效率 p 的下降, 包迹的最大值变小, 半宽度变大。当 p 足够小时, 包迹几乎平行于 z 轴, 即相位栅的幅度在光传播的方向上处处相等。

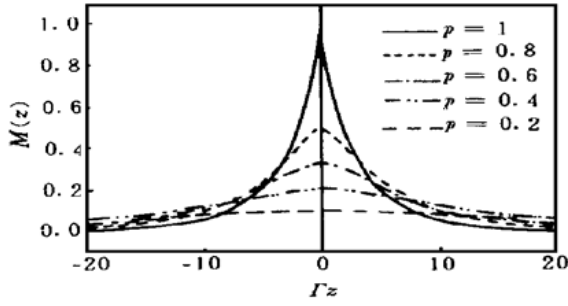


Fig. 4 Envelopes of grating modulation $M(z)$ as the function of equivalent propagation distance Γz with different light excitation efficiency p

5 动力学相位栅的非破坏性读出

运用所得到的适用于任意干涉光强调制度和常数光激发效率的相位光栅的包迹, 能更精确地描述动力学相位栅的记录和读出。下面考察被记录的相位栅的非破坏性读出(入射的读光束不改变已写入的相位栅)。由于写入的相位光栅是变量 z 的函数, 参考文献[9]中, 基于分层分析, 给出了衍射效率的解析表达式:

$$\eta = \left[\sin \frac{\pi n f(L)}{2 \lambda \cos \theta} \right]^2, \quad (19)$$

式中, 等效作用距离 $f(L)$ 为相位栅包迹在代表晶体的矩形框内的积分:

$$f(L) = \int_{z_0}^{L+z_0} M(z) dz. \quad (20)$$

晶体窗口的边界对应着初始条件。当初始的干涉光强的调制度为 m_0 时, 对应的相位栅的包迹的初值为:

$$M_0 = \frac{1 - (1 - p^2 m_0^2)^{1/2}}{p m_0}. \quad (21)$$

相应的积分的初始点为:

当 $p = 1$ 时,

$$\Gamma z_0 = \mp 2 \ln \left[1 - \sqrt{1 - m_0^2} \right], \quad (22)$$

式中 $-$ 对应 $I_{20} < I_{10}$, $+$ 对应 $I_{20} > I_{10}$ 。

当 p 为小于 1 的常数时

$$\Gamma z_0 = \pm 2 \ln \left[\tan \left[\frac{\pi}{4} + u_0 \right] \left(\frac{\sin \left[\frac{\theta - u_0}{2} \right]}{\sin \left[\frac{\theta + u_0}{2} \right]} \right)^{1/p} \right] \quad (23)$$

式中 $+$ 对应负 z , $-$ 对应正 z , 其中

$$u_0 = \arctan \left[(\tan \theta) \sqrt{1 - m_0^2} \right]. \quad (24)$$

图 5 给出了不同光激发效率下的等效作用距离随晶体厚度的变化曲线。图 5(a) 对应调制度初值为 $m_0 = 0.8$, $I_{20} > I_{10}$; 图 5(b) 对应 $m_0 = 0.8$, $I_{20} < I_{10}$ 。由图 5 可见: 1) 由于记录相位光栅包迹随等效传播距离增大而衰减, 等效作用距离随晶体的厚度的增大而趋于饱和值。2) 由于 $p \approx 1$ 时, 相位光栅包迹的最大值较大, 且变化比较急剧, 所以等效作用距离上升到饱和值比较迅速。而在 $p \rightarrow 1$ 时, 等效作用距离变化比较缓慢, 几乎是线性的。

由(19)式可见, 衍射效率为等效作用距离的正弦函数。

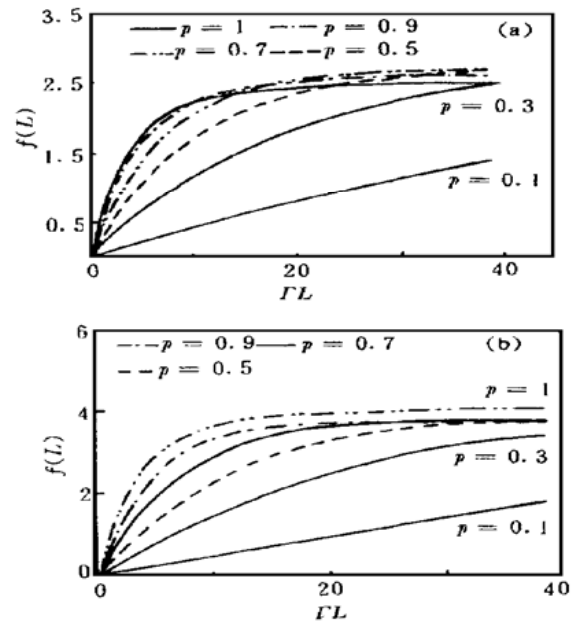


Fig. 5 Action distances versus the thickness of the crystal multiplied by Γ for different light excitation efficiency p with $m_0 = 0.8$ and (a) $I_{20} > I_{10}$; (b) $I_{20} < I_{10}$

结论 光折变全息记录是动力学光栅形成过程。本文基于 Kukhtarev 模型和 Moharam 的场函数, 得到适用于任意的干涉光强调制度以及不同的常数光激发效率下的相位栅包迹的解析表达式。可见, 相位栅的包迹随热激发的增大, 光激发效率的减小, 在晶体内部变化更为平缓 and 幅值变小。对于相位栅包迹为晶体深度函数的情况, 采用等效作用距离的方法, 分析了衍射效率。

参 考 文 献

- [1] Kukhtarev V, Markov V B, Odulov S G *et al.* Holographic storage in electrooptic crystal. 1. Steady state. *Ferroelectrics.*, 1979, **22**(3, 4): 949~ 946
- [2] Kukhtarev V, Markov V B, Odulov S G *et al.* Holographic storage in electrooptic crystal. 2. Beam coupling-light amplification. *Ferroelectrics.*, 1979, **22**(3,

- 4): 961~ 964
- [3] Yeh P. Two-wave mixing in nonlinear media. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1989, **QE** 25(9): 484~ 519
- [4] Moharam M G, Gaylord T K, Magnusson R. Holographic grating formation in photorefractive crystals with arbitrary electronic transport lengths. *J. Appl. Phys.*, 1979, **50** (9): 5642~ 5651
- [5] Eichler H J, Günter P, Pohl D W. *Laser-Induced Dynamic Gratings*, Berlin: Springer-Verlag, 1986: Chapter 3
- [6] Belic M R, Timotijevic D, Petrovic M *et al.* Exact solution to photorefractive two - wave mixing with arbitrary modulation depth. *Opt. Commun.*, 1996, **123** (1~ 3): 201~ 206
- [7] Lee Y H, Kim Y H, Kim J C *et al.* Photorefractive grating formation in the region of large intensity modulation, *Opt. Commun.*, 1997, **144**(8): 70~ 74
- [8] Buchave P. Computer simulation of multiple dynamic photorefractive gratings. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1998, **15**(7): 1865~ 1870
- [9] Liu L, Liu X. Matrixing coupled wave theory of photorefractive hologram recorded by two-beam coupling. *J. Modern Optics*, 1993, **40**(1): 2257~ 2265
- [10] Jeganathan M, Bashaw M C, Hesselink L. Evolution and propagation of grating envelopes during erasure on bulk photorefractive media. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1995, **12**(7): 1370~ 1383

Analytic Steady-State Solutions to Dynamic Grating Envelope

Guo Yingchun Liu Liren Li Jianlang Zhou Changhe

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(received 19 July 1999; revised 8 October 1999)

Abstract: Based on the Kukhtarev's model and the Moharam's field function exact steady state analytic expressions for dynamic grating envelopes are deduced for any constant values of light modulation depth and light excitation efficiency. Furthermore the diffraction efficiency is considered for nondestructive readout.

Key words: photorefractive effect; dynamic grating; beam-coupling; thermal excitation; photo excitation