

应用哈特曼-夏克波前传感器 测量大气湍流参数*

饶长辉 姜文汉 凌 宁

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘 要 对非科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)湍流情况, 在利用哈特曼-夏克(Hartmann-Shack)波前传感器的波前斜率测量原理并结合其时空结构及相关分析的基础上, 提出了一种应用斜率结构-相关函数和斜率归一化相关系数测量大气湍流参数 β (归一化相位空间功率谱指数下降因子) 和 ρ_0 (大气湍流强度)的新方法。利用这种方法对 1 km 激光水平大气传输实验数据进行了分析。

关键词 非科尔莫戈罗夫湍流, 斜率结构-相关函数, 斜率归一化相关系数, 波前传感器。

1 引 言

在大气光学研究领域, 大气湍流一直为光学工作者所重视。长期以来, 光波在大气湍流中的传输理论以及大气湍流参数测量均是建立在科尔莫戈罗夫湍流统计理论基础之上, 并且得到实际验证和应用。在测量大气湍流相干长度 r_0 时, 通常采用这两种方法^[1, 2]: 一种是通过测量折射率结构常数求出 r_0 ; 另一种是通过测量到达角起伏求出 r_0 。前一种方法需要长期观测才能得到折射率结构常数分布函数的统计规律, 后一种方法则比较简单, 通常采用哈特曼-夏克波前传感器测量。

由于大气湍流与观测站址、天气、风速等诸多因素有关, 因此在很多情况下大气湍流并不符合科尔莫戈罗夫理论, 有关这方面的研究正越来越得到重视^[3, 4]。在国内外有关文献中, 关于测量非科尔莫戈罗夫湍流参数的报道很少, 文献[5]利用斜率结构函数测量大气湍流相干长度(对科尔莫戈罗夫湍流)。本文在利用哈特曼-夏克波前传感器的波前斜率测量原理并结合其时空结构及相关分析的基础上, 提出了一种应用哈特曼-夏克波前传感器所测量的斜率结构-相关函数和斜率归一化相关系数来测量大气湍流参数 β (归一化相位空间功率谱指数下降因子) 和 ρ_0 (大气湍流强度)的新方法。本文的分析也适合科尔莫戈罗夫湍流情形。

2 非科尔莫戈罗夫湍流引入

在本文中, 惯性区域内非科尔莫戈罗夫湍流定义为折射率三维功率谱随频率增加呈任意功率指数下降。根据文献[6], 非科尔莫戈罗夫湍流情况下, 归一化相位空间功率谱为:

* 国家科委 863 高科技项目和国家自然科学基金资助项目(No. 69908006)。

收稿日期: 1999-01-11; 收到修改稿日期: 1999-04-29

$$W_{\phi}(k) = A_{\beta} k^{-\beta} / \rho_0^{\beta-2}, \quad 2 < \beta < 4, \quad (1)$$

式中 k 为空间频率; ρ_0 类似于大气湍流相干长度 r_0 , 是一个表征大气湍流强度的参数, 当 $\beta = 11/3$ 时, $\rho_0 = r_0$; A_{β} 为当 $D = \rho_0$ (D 为观测系统口径) 和去除整体平移的波前残余方差为 1 rad^2 时的归一化系数,

$$A_{\beta} = \frac{2^{\beta-2} \Gamma(\beta/2) \{\Gamma[(\beta+2)/2]\}^2 \Gamma[(\beta+4)/2] \sin[\pi(\beta-2)/2]}{\pi^{\beta} \Gamma(\beta+1)}, \quad (2)$$

式中 $\Gamma(x)$ 为伽玛函数。文献[7]根据归一化相位功率谱推导出了相位空间结构函数为:

$$D_{\phi}(r) = \gamma_{\beta} (r/\rho_0)^{\beta-2}, \quad (3)$$

式中
$$\gamma_{\beta} = \frac{2^{\beta-1} \{\Gamma[(\beta+2)/2]\}^2 \Gamma[(\beta+4)/2]}{\Gamma(\beta/2) \Gamma(\beta+1)}, \quad (4)$$

根据泰勒(Taylor)湍流冻结假设, 大气湍流相位扰动满足:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, 0), \quad (5)$$

式中 \mathbf{v} 为风速。于是不难得到相位时空结构函数为:

$$D_{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t') = [\phi(\mathbf{r}_1, t) - \phi(\mathbf{r}_2, t')]^2 = \gamma_{\beta} \left[\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}(z)(t - t')|}{\rho_0} \right]^{\beta-2}. \quad (6)$$

3 哈特曼-夏克波前传感器测量模型

哈特曼-夏克波前传感器原理如图 1 所示。它主要由微透镜阵列、匹配透镜和 CCD 相机组成。

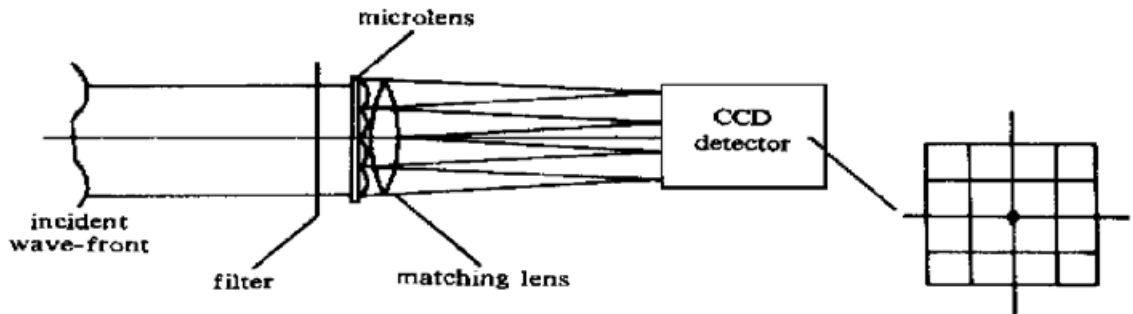


Fig. 1 Block diagram of Shack-Hartmann wavefront sensor

假设大气湍流波前满足各向同性, 则所测量的波前斜率可以表示为^[5]:

$$S_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{k_0} \int \mathbf{r} W(\mathbf{r} - \mathbf{x}) [\nabla \phi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{a}] = - \frac{1}{k_0} \int d\mathbf{r} [\nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}] \phi(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

式中 \mathbf{a} 表示测量方向; k_0 为波数, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 为探测光波长; $W(\mathbf{r})$ 为子孔径权重函数。对于方形子孔径,

$$W(\mathbf{r}) = \frac{1}{d^2} \text{rect} \left(\frac{\mathbf{r}}{d} \right) = \begin{cases} d^{-2}, & r_x \leq d/2, r_y \leq d/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (8)$$

式中 d 为子孔径尺寸。根据(8)式可以得到:

$$\begin{aligned} \nabla W(\mathbf{r}) &= \mathbf{i} \partial W(r_x, r_y) / \partial r_x + \mathbf{j} \partial W(r_x, r_y) / \partial r_y = \\ &= (\mathbf{i}/d^2) [\delta(r_x + d/2) - \delta(r_x - d/2)] \text{rect}(r_y/d) + \\ &+ (\mathbf{j}/d^2) [\delta(r_y + d/2) - \delta(r_y - d/2)] \text{rect}(r_x/d), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\delta(x)$ 为狄拉克函数; \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 分别为 x 、 y 方向上的单位矢量。

4 斜率结构-相关函数和斜率归一化相关系数与大气参数之间的关系

4.1 斜率结构-相关函数

斜率结构函数定义为:

$$D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = [S_a(\mathbf{x}, t) - S_a(\mathbf{x}', t')]^2. \quad (10)$$

为下面分析方便, 在此定义另外一个函数, 表示为:

$$C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = [S_a(\mathbf{x}, t) + S_a(\mathbf{x}', t')]^2. \quad (11)$$

根据(7)式和(9)式可以得到 x 方向上的斜率结构函数为^[15]:

$$D_s^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{k_0^2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}] [\nabla W(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{i}] D\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t') - \frac{1}{k_0^2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{i}] [\nabla W(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{i}] D\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t), \quad (12)$$

同理可得:

$$C_s^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = - \frac{1}{k_0^2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}] [\nabla W(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{i}] D\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t') - \frac{1}{k_0^2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{i}] [\nabla W(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{i}] D\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t). \quad (13)$$

在本文中, 定义斜率结构-相关函数为上述两个函数之差, 即:

$$R_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') - C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t'), \quad (14)$$

根据(12)式和(13)式可以得到:

$$R_s^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{2}{k_0^2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}] [\nabla W(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{i}] D\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t'), \quad (15)$$

将(6)式代入(15)式可得斜率结构-相关函数为:

$$R_s^x(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = 2\gamma_\beta k_0^{-2} d^{-3} \left(\frac{d}{\rho_0}\right)^{\beta-2} \int \text{utri}\left(\frac{u}{d}\right) \times \left[2 \left| \frac{x - x' + v_x(z)(t - t')}{d}, \frac{u + y - y' + v_y(z)(t - t')}{d} \right|^{\beta-2} - \left| \frac{x - x' - d + v_x(z)(t - t')}{d}, \frac{u + y - y' + v_y(z)(t - t')}{d} \right|^{\beta-2} - \left| \frac{x - x' + d + v_x(z)(t - t')}{d}, \frac{u + y - y' + v_y(z)(t - t')}{d} \right|^{\beta-2} \right] \quad (16)$$

式中

$$\text{utri}(u) = \begin{cases} 1 - |u|, & |u| \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$|x, y| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

从(16)式可看出, 斜率结构-相关函数是大气参数 β 和 ρ_0 的函数, 图 2 给出了 β 分别为 3.2、3.4、3.6 和 3.8 时的斜率结构-相关函数($d = \rho_0$) 与归一化子孔径间距之间的函数关系。

4.2 斜率归一化相关系数

定义斜率归一化相关系数为:

$$\mu_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') - D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')}{C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') + D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')}, \quad (17)$$

根据(6)式、(12)式和(13)式可以得到 x 方向上的斜率归一化相关系数为:

$$\begin{aligned} \mu_s^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') &= \frac{\iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}] [\nabla W(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}] D\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t')}{\iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{i}] [\nabla W(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{i}] D\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t, t)} = \\ &= \iint d\mathbf{u} \left[2 \left| \frac{x - x' + v_x(z)(t - t')}{d}, \frac{u + y - y' + v_y(z)(t - t')}{d} \right|^{\beta-2} - \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{x - x' - d + v_x(z)(t - t')}{d}, \frac{u + y - y' + v_y(z)(t - t')}{d} \right|^{\beta-2} - \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{x - x' + d + v_x(z)(t - t')}{d}, \frac{u + y - y' + v_y(z)(t - t')}{d} \right|^{\beta-2} \right] \times \\ &\quad \left[\iint d\mathbf{u} \text{tri}\left(\frac{u}{d}\right) \left[2 \left| 0, \frac{u}{d} \right|^{\beta-2} - \left| -1, \frac{u}{d} \right|^{\beta-2} - \left| 1, \frac{u}{d} \right|^{\beta-2} \right] \right]^{-1}. \quad (18) \end{aligned}$$

从(18)式可以看出,斜率归一化相关系数只与大气参数 β 有关,而与 ρ_0 无关。图3给出了 β 分别为 3.2、3.4、3.6 和 3.8 时的斜率归一化相关系数与归一化子孔径间距之间的函数关系曲线。

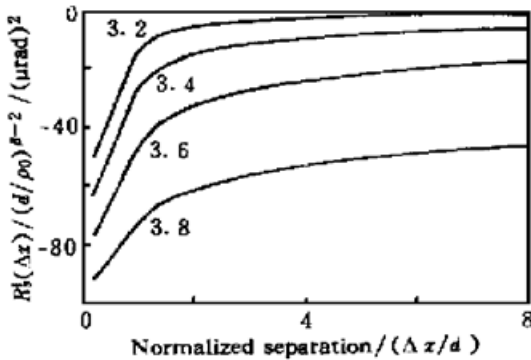


Fig.2 Slope structure-correlation function vs normalized separation for different β

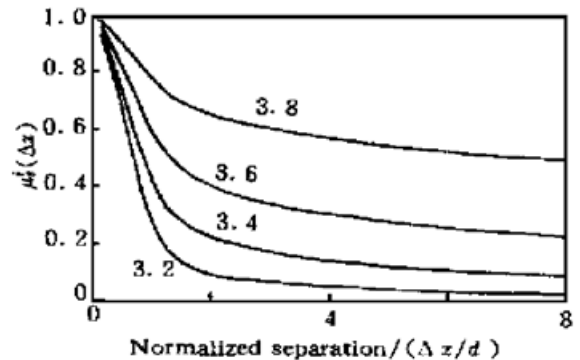


Fig.3 Slope correlation coefficient vs normalized separation for different β

4.3 测量噪声的影响

实际测量时,波前传感器都会引入噪声,此时波前传感器测到的波前斜率可表示为:

$$\tilde{S}_a(\mathbf{x}, t) = S_a(\mathbf{x}, t) + n_a(\mathbf{x}, t), \quad (19)$$

其中,文字上的“ \sim ”号,表示该参量的实际测量值,下同。

哈特曼-夏克波前传感器的其主要噪声为光子噪声和 CCD 读出噪声,一般情况下都为白噪声。假设信号与噪声不相关,不同位置、不同时刻的噪声也不相关,且噪声方差为 σ_{sa}^2 ,即:

$$n_a(\mathbf{x}, t) n_a(\mathbf{x}, t) = \sigma_{sa}^2, \quad (20)$$

于是:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') &= [\tilde{S}_a(\mathbf{x}, t) + \tilde{S}_a(\mathbf{x}', t')]^2 = \\ &= [S_a(\mathbf{x}, t) + S_a(\mathbf{x}', t') + n_a(\mathbf{x}, t) + n_a(\mathbf{x}', t')]^2 = \\ &= [S_a(\mathbf{x}, t) + S_a(\mathbf{x}', t')]^2 + [n_a(\mathbf{x}, t) + n_a(\mathbf{x}', t')]^2 = \\ &= C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') + 2\sigma_{sa}^2, \quad (21) \end{aligned}$$

同理可以得到所测量的斜率结构函数为:

$$\tilde{D}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') + 2\sigma_{sa}^2, \quad (22)$$

因此所测量的斜率结构-相关函数和斜率归一化相关系数可分别表示为:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') &= \tilde{D}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') - \tilde{C}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \\ &= D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') - C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t'), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') &= \frac{\tilde{C}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') - \tilde{D}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')}{\tilde{C}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') + \tilde{D}_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')} = \\ &= \frac{C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') - D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')}{C_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') + D_s^a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') + 4\sigma_{sa}^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

从(23)式和(24)式可以看出,斜率结构-相关函数消除了相加噪声的影响;斜率归一化相关系数与噪声有关。

5 实验结果

我们进行了 1 km 激光水平大气传输试验,试验中所采用的哈特曼-夏克波前传感器的有效子孔径数为 48 个,这样可以实时测量两个方向上共 96 个斜率数据序列。系统采样频率为 2900 Hz,采样数据长度为 9200 帧,连续采样。对于每一帧数据,可以求出其空间上的斜率互相关函数和斜率归一化相关系数,这样可以排除时间上的影响。在利用所测斜率数据测量大气湍流参数时,其主要步骤如下:

1) 计算每个子孔径的斜率测量方差,以检验哈特曼-夏克波前传感器的测量均匀性;假设所有子孔径斜率测量方差的均值为 v ,则选择斜率测量方差在 $[0.8v, 1.2v]$ 的子孔径作为实际计算有效子孔径,这样可使各子孔径对之间的计算结果偏差较小。一般子孔径对的计算结果均方差值与其均值之比在 2% 左右。

2) 按照(17)式求出每一帧的斜率归一化相关系数,进而由(18)式确定 β 。

3) 根据(14)式求出每帧的斜率结构-相关函数,再由(16)式和前面确定的 β 求出 ρ_0 。

必须指出,所采用的测量斜率数据必须扣除系统静态误差(光学系统本身产生)的影响。为了提高测量精度,首先分别求出同一方向上每帧所有间距相同的两两子孔径对的斜率归一化相关系数和斜率结构-相关函数,然后再求其平均。波前传感器测量数据实际有效子孔径数越多,测量结果越精确。

5.1 实验 1

图 4 给出了子孔径间距为 $\Delta x = d$ 时连续 100 帧所测量的斜率归一化相关系数和斜率结

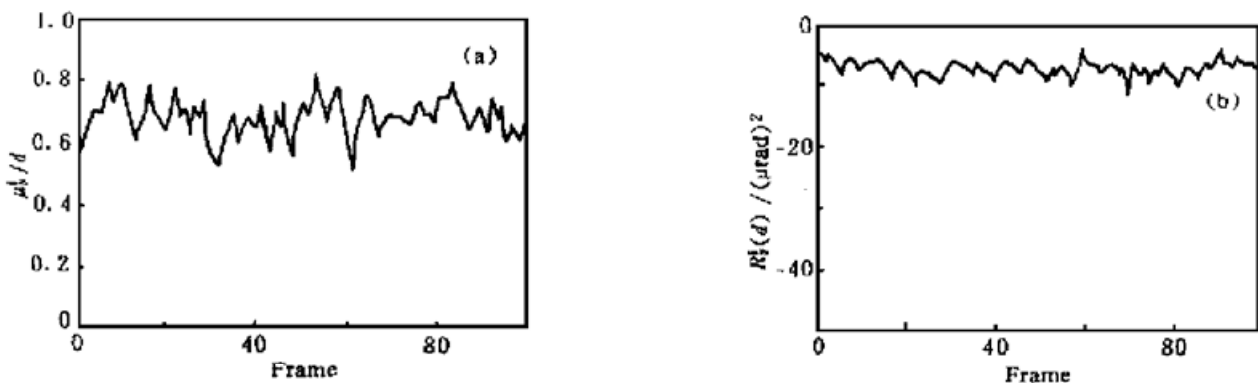


Fig. 4 The measured slope correlation coefficient (a) and slope structure-correlation function (b).

$$\Delta x = d, d = 7.1 \text{ cm}, \lambda = 0.82 \mu\text{m}$$

构-相关函数。其平均值分别为: $\mu_s^i(d) = 0.6804$; $R_s^i(d) = -7.2771$ 。均方差分别为: $\sigma_\mu(d) = 0.037$; $\sigma_R(d) = 0.051$ 。根据斜率归一化相关系数的平均值可以得到: $\beta = 3.695$ 。这表明大气湍流接近服从科尔莫戈罗夫谱统计规律。

图 5 给出了在 $\beta = 3.695$ 的条件下的斜率结构-相关函数测量值和理论曲线。在 $\beta = 3.695$ 的条件下, 根据所测量的不同子孔径间距时, 斜率结构-相关函数值位于 $\rho_0 = 23.62$ cm 的理论曲线附近, 表明在此情况下大气湍流强度实际测量值为: $\rho_0 = 23.62$ cm。

为了验证分析和计算的正确性, 还根据每个子孔径所测量的斜率数据计算其相应的到达角起伏方差, 进而求出大气湍流相干长度 r_0 。图 6 为 r_0 的分布直方图, 其平均值 $r_0 = 23.70$ cm。它与前面利用斜率结构-相关函数所计算出的湍流强度值非常吻合。

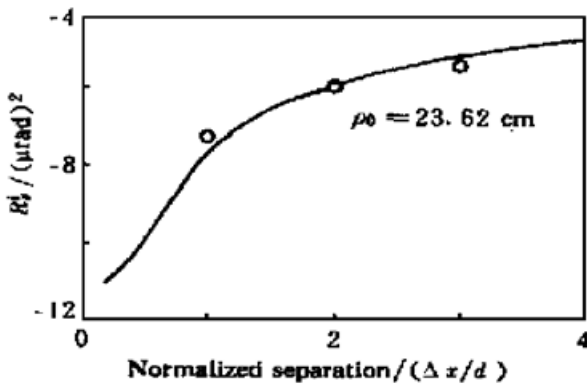


Fig. 5 Slope structure-correlation function vs normalized separation. "o": measured value, solid line: theoretical curve

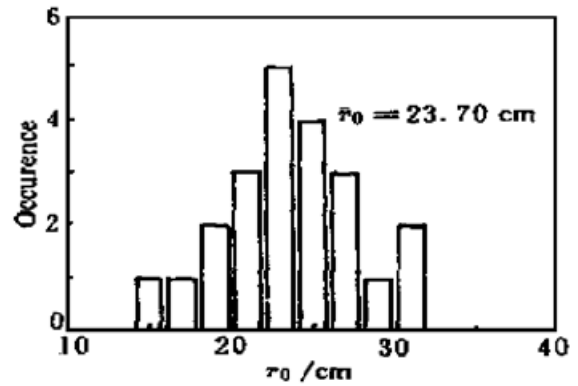


Fig. 6 The histogram of the atmospheric coherent length r_0

5.2 实验 2

图 7 和图 8 给出了另一次 1 km 激光水平大气传输试验的实验结果。图 7 是根据所测量的不同子孔径间距时的斜率归一化相关系数测量值和理论曲线。从图中可以看出, 测量值位于 $\beta = 3.800$ 的理论曲线附近。此实验结果表明: $\beta = 3.800$, 即大气湍流不符合科尔莫戈罗夫规律。图 8 是在 $\beta = 3.800$ 条件下, 根据所测量的不同子孔径间距时的斜率结构-相关函数测量值和理论曲线, 结果表明: $\rho_0 = 6.42$ cm。

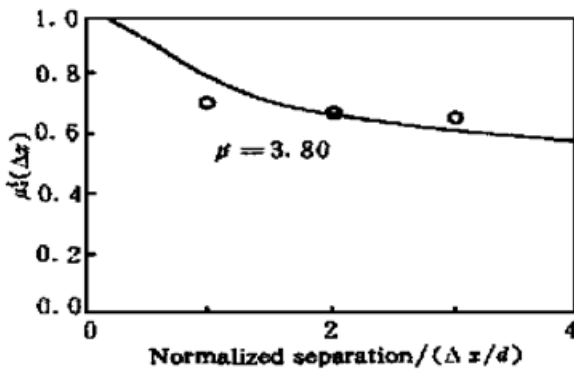


Fig. 7 Slope correlation coefficient vs normalized separation. "o": measured value, solid line: theoretical curve

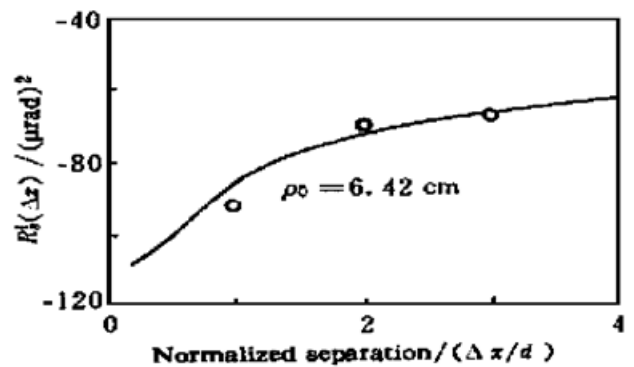


Fig. 8 Slope structure-correlation function vs normalized separation. "o": measured value, solid line: theoretical curve

结 论 本文提出了一种应用哈特曼-夏克波前传感器所测量的斜率结构-相关函数和斜率归

一化相关系数来测量大气湍流参数 β 和 ρ_0 的新方法, 并利用此方法得到大气湍流参数的测量结果。分析表明:

- 1) 斜率结构-相关函数是大气参数 β 和 ρ_0 的函数;
- 2) 斜率归一化相关系数只与大气参数 β 有关, 而与 ρ_0 无关;
- 3) 斜率结构-相关函数消除了相加噪声的影响, 斜率归一化相关系数与噪声有关。

论文中所用数据由中国科学院光电技术研究所的李新阳同志和鲜浩同志提供。在论文完成过程中, 作者还和李新阳同志进行了有益的讨论。在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] Li Huagui, Jiang Wenhan, Xian Hao. Atmospheric turbulence parameter measurement using H-S wavefront sensor. *ESO Proc.*, 1993, **48**: 21~ 28
- [2] Jiang Lingtao, Chen Li, Rao Xuejun *et al.*. High-resolution measurements for optical effect of atmosphere. *Proc. SPIE*, 1996, **2828**: 450~ 456
- [3] Stribling B E, Welsh B M, Roggemann M C. Optical propagation in non-Kolmogorov atmospheric turbulence. *Proc. SPIE*, 1995, **2471**: 181~ 196
- [4] Beland R R. Some aspects of propagation through weak isotropic non-Kolmogorov turbulence. *Proc. SPIE*, 1995, **2375A**: 6~ 16
- [5] Silbaugh E E, Welsh B M, Roggemann M C. Characterization of atmospheric turbulence phase statistics using wave-front slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(12): 2453~ 2460
- [6] Boreman G D, Dainty C. Zernike expansions for non-Kolmogorov turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(3): 517~ 522
- [7] 饶长辉, 姜文汉, 凌 宁. 低阶模式校正自适应光学系统的补偿效果分析. *光学学报*, 1999, **19**(12): 1615~ 1624

Atmospheric Parameters Measurements for Non-Kolmogorov Turbulence with Hartmann-Shack Wavefront Sensor

Rao Changhui Jiang Wenhan Ling Ning

(Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

(Received 11 January 1999; revised 29 April 1999)

Abstract Based on the principle of Hartmann-Shack wavefront sensor and the temporal and spatial analysis of the wavefront slope, a new method of measuring atmospheric parameters β (the power-law exponent of the generalized phase power spectrum) and ρ_0 (the strength of the turbulence) is developed for non-Kolmogorov turbulence, by using the slope structure-correlation function and the generalized slope correlation coefficient measured by Hartmann-Shack wavefront sensor. The Hartmann-Shack wavefront sensor data acquired in recent horizontal atmospheric experiments for 1000 m laser beam propagation are used to evaluate β and ρ_0 according to the method.

Key words non-Kolmogorov turbulence, slope structure-correlation function, slope correlation coefficient, Hartmann-Shack wavefront sensor.