

光束波前畸变的契伯格-山克斯顿 测量方法探讨*

刘兰琴 吴毅

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 大气光学重点实验室, 合肥 230031)

摘 要 利用数值模拟对契伯格-山克斯顿(Gerchberg-Saxton)方法用于湍流大气中激光传输波前的探测进行了研究, 分析了其误差特性, 并将该方法与哈特曼-夏克波前传感器的测量特征进行了比较。

关键词 数值模拟, 契伯格-山克斯顿方法, 波前探测。

1 引 言

激光在湍流大气中传输时, 由于其波前受到湍流的扰动而严重影响光束的传输特性。因此, 了解湍流大气中激光光束的波前畸变对于研究激光束的传输特性及自适应光学的波前校正至关重要。在实际测量中, 往往记录的只是光场的强度信息, 因而需要借用其它光学和数学的辅助手段来获取波前信息。Gerchberg-Saxton^[1]于 1971 年提出了一种由成像系统的已知接收瞳面和焦平面的强度分布来反演波前信息的契伯格-山克斯顿方法。本文利用这一原理, 并就迭代算法进行了二次驱动的改进, 克服了如离焦、像散等的不确定性^[2~4]。通过数值模拟, 对激光束在湍流大气中传输时的波前畸变信息进行提取, 分析了该测量方法的误差特性, 并将该方法与哈特曼-夏克波前传感器的测量特征进行了比较。

2 契伯格-山克斯顿方法

契伯格-山克斯顿方法的原理^[2~5]如下: 设激光在湍流大气中传输到接收瞳面的光场为

$$U_1(x_1, y_1) = |U_1(x_1, y_1)| \exp [i\mathcal{Q}(x_1, y_1)], \quad (1)$$

其对应的焦平面上的光场函数为

$$U_2(x_2, y_2) = |U_2(x_2, y_2)| \exp [i\mathcal{Q}(x_2, y_2)], \quad (2)$$

其中 $|U_1(x_1, y_1)|^2$ 、 $|U_2(x_2, y_2)|^2$ 为光强分布, $\mathcal{Q}(x_1, y_1)$ 、 $\mathcal{Q}(x_2, y_2)$ 为相位分布, 根据傅里叶光学原理, 它们满足正反傅里叶变换的关系

$$U_2(x_2, y_2) = \mathcal{F}\{U_1(x_1, y_1)\}, \quad (3)$$

* 国家科委 863 高科技项目。

收稿日期: 1999-03-10; 收到修改稿日期: 1999-05-21

$$U_1(x_1, y_1) = \mathcal{F}^{-1}\{U_2(x_2, y_2)\}. \quad (4)$$

契伯格-山克斯顿方法指出,由测量得到的接收瞳面光强分布和焦平面光强分布,通过迭代,求解正反傅里叶变换,可得到光束的相位分布。具体作法是:1)先给定一任意相位 $\mathcal{Q}(x, y)$,与 $|U_1(x_1, y_1)|$ 构成一光场函数 $U_1(x_1, y_1)$,进行傅里叶变换,获得焦平面光场 U_2 ,用测量量 $|U_2(x_2, y_2)|$ 替换其振幅,即振幅约束。2)将 U_2 进行逆傅里叶变换,获得瞳面光场 U_1' ,用 $|U_1(x_1, y_1)|$ 替换其振幅,即保留 U_1' 的相位信息。如此迭代,以振幅误差量控制所获得的 \mathcal{Q}' 即为该方法对于待测瞳面相位 \mathcal{Q} 的逼近。其中误差控制量 ϵ (如瞳面振幅误差)定义为

$$\epsilon = \Sigma[|U_1(x_i, y_j)| - |U_1'(x_i, y_j)|]^2 / \Sigma|U_1(x_i, y_j)|^2. \quad (5)$$

文献[2~4]对相位的唯一性作了许多讨论,认为唯一性是指某些像差[如策尼克(Zernike)多项式中的离焦、像散、球差等]的符号不确定性。作者在对某些单一相位的迭代数值反演研究中,发现唯一性不仅存在于相位符号的不确定性,而且存在于如下相位的镜面反转以及相位镜面反转后的共轭,即

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}(x, y) &= -\mathcal{Q}(x, y), \\ \mathcal{Q}(x, y) &= \mathcal{Q}(-x, -y), \\ \mathcal{Q}(x, y) &= -\mathcal{Q}(-x, -y), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

都可以在瞳面光强确定的情况下得到同样的焦面光强分布。也就是说在双强度相位反演时,焦面光强在迭代过程中不提供某些相位的上述不确定性信息,因此,在多相位耦合的迭代反演中,不仅使瞳面光强的收敛速度很慢,而且增加迭代次数亦于事无补。在上述分析的基础上,本文对迭代算法作了改进,经由 n 次迭代后的误差判断,选择或组合选择如下变换对瞳面光场 U_1' 进行处理

$$\left. \begin{aligned} U_1'(x, y) &\rightarrow U_1'(x, y), \\ U_1'(x, y) &\rightarrow U_1'(-x, -y) \rightarrow U_1'^*(-x, -y), \\ U_1'(x, y) &\rightarrow U_1'(-x, -y), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这样就克服了相位反演符号的不确定性。结合瞳面测量光强和傅里叶变换性质,可以证明上述变换不影响焦平面光强分布。事实上,对于那些焦面光强提供信息的相位部分,上述变换处理不影响迭代结果,这是单一相位的迭代数值研究证明了的。(7)式的变换在 $|U_1(x, y)|$ 的替代后,就是(6)式的相位变换,它只是数值计算语言的表达形式。数值计算表明,在大多数情况下,经少数迭代误差判断后的上述处理即可满足对振幅迅速收敛的要求。

在进行数值模拟中,可由激光大气传输计算程序^[6]得到激光传输到接收瞳面上的光场分布,再经成像变换获得焦面光场分布,并将光场中的相位与光强分布分离开来,光强部分作为模拟测量量,瞳面相位部分 $\mathcal{Q}(x, y)$ 作为本工作误差特性分析的参考量。

3 数值模拟计算结果

图1给出了不同湍流强度下 ϵ 随迭代次数收敛曲线的统计结果(图中纵坐标为 ϵ 的对数,横坐标为迭代次数)。用 D/r_0 描述大气湍流引起的光束波前起伏特征,其中 D 为接收口径, r_0 为大气相干长度(在传输数值模拟计算中设定),它是湍流强度的参数。由图可以看出, ϵ 随迭代次数表现出一些以较快收敛和缓慢变化所构成的周期特征。当湍流较弱即 D/r_0 较小时,周

期表现得较短; 随着湍流强度的增加(即 D/r_0 的增加), 周期表现得较长。图 1 表明, 在一定的反演误差要求下, 不同的湍流强度决定了不同的迭代次数。换言之, 同样的迭代次数, 对不同湍流强度下的光束相位起伏反演的光强与测量的相对误差有较大的差别。例如, 取迭代次数 $k = 100$, 当 $D/r_0 = 1.14$ 时, ϵ 约为 10^{-5} ; 当 $D/r_0 = 2.62$ 时, ϵ 约为 10^{-2} 。又例如, 若要求 ϵ 值为 10^{-5} , 随着 D/r_0 分别为 1.14、1.73、2.20、2.62 的湍流强度的增加, 达到相应振幅误差 ϵ 值时的迭代次数亦随之增加, 分别为 70、140、200、260。

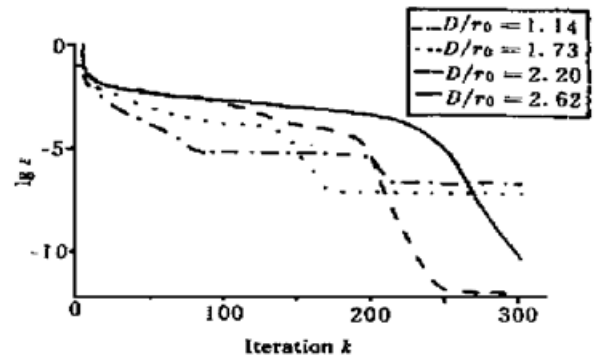


Fig.1 The variation of ϵ with iteration number k under different turbulence

ϵ 只反映了瞳面光强的迭代收敛误差, 为了进一步评价迭代反演的相位 Φ , 现用其与参考相位的归一化相关系数 R_r 来进行分析, R_r 的定义为

$$R_r = \frac{\frac{1}{N^2} \sum [\mathcal{R}(x_i, y_j) - \bar{\mathcal{R}}(x_i, y_j)][\Phi(x_i, y_j) - \bar{\Phi}(x_i, y_j)]}{\sqrt{\frac{1}{N^2} \sum [\mathcal{R}(x_i, y_j) - \bar{\mathcal{R}}(x_i, y_j)]^2} \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum [\Phi(x_i, y_j) - \bar{\Phi}(x_i, y_j)]^2}}, \quad (8)$$

其中, $\bar{\mathcal{R}}(x_i, y_j) = \frac{1}{N^2} \sum \mathcal{R}(x_i, y_j)$, N 为计算网格数。

另外, 我们还将该方法的反演结果与目前较常用的哈特曼-夏克波前探测法(同样在理想探测情况下)的结果进行了比较。哈特曼-夏克探测法的数值模拟采用的是文献[7]的方法。

图 2 给出了分别由契伯格-山克斯顿方法和哈特曼-夏克方法得到的 R_r 随 D/r_0 变化的曲线。各条曲线由不同传输距离的数值模拟获得。计算中设定 $\epsilon = 10^{-5}$, 当振幅误差小于 ϵ 时迭代结束。该图统计结果的迭代次数均小于 300。由图可以看出, 契伯格-山克斯顿方法所获得的 R_r 值在 D/r_0 较大时的下降速度大于哈特曼-夏克方法所获得的 R_r 值。但在 D/r_0 小于 3.0 时, 契伯格-山克斯顿方法 R_r 值大于哈特曼-夏克方法 R_r 值。这表明在小像差波前探测时, 契伯格-山克斯顿方法所反演的波前(从理论上讲)结构优于哈特曼-夏克方法。这是因为哈特曼-夏克方法的子孔径分割牺牲了对空间结构探测的能力。在 D/r_0 大于 3.0 时, 契伯格-山克斯顿方法 R_r 则远不如哈特曼-夏克方法 R_r 值。这是由于大像差在傅氏变换反演迭代算法中的信息混叠与有限计算网格的信息丢失。

图 3 给出了契伯格-山克斯顿方法与哈特曼-夏克方法探测的波前剩余方差曲线(各条曲

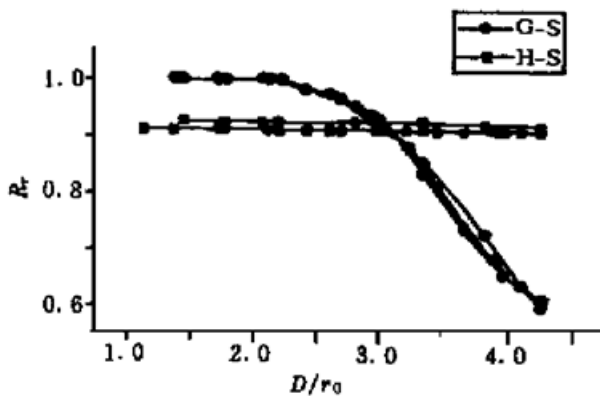


Fig.2 Correlations between retrieved phases from G-S/H-S and reference phase

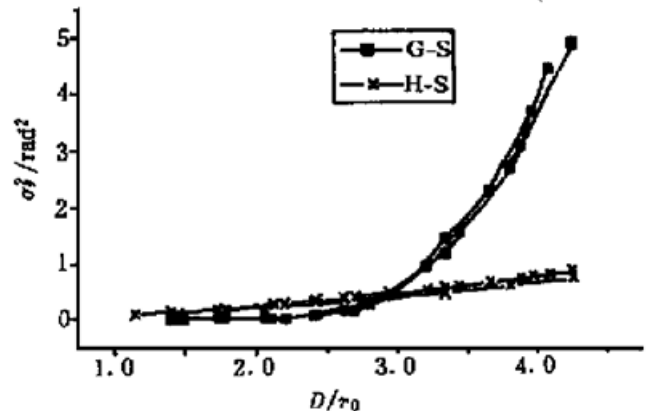


Fig.3 The residual errors of retrieved phases from G-S/H-S

线由不同传输距离的数值模拟获得, 迭代次数同图 2 的说明一致)。剩余方差 σ_r^2 定义为 $\Sigma(\Phi - \hat{\Phi})^2$ 。同样可以看到, 当 D/r_0 小于 3.0 时, 契伯格-山克斯顿方法波前剩余方差小于哈特曼-夏克方法的结果; 而当 D/r_0 大于 3.0 时, 其方差大于哈特曼-夏克方法的探测结果。而哈特曼-夏克测量方法的测量剩余波前方差与 $(d/r_0)^{3/4}$ 成比例, 为统一表述, 将其剩余波前方差表述为 $(D/r_0)^{3/4}$ 的比例关系, 计算中 $d = D/7^{1/4}$, 即 37 单元哈特曼-夏克传感器的数值模拟值。

结 论 综上结果表明, 在一定的测量反演分辨要求下, 契伯格-山克斯顿方法对于弱起伏波前探测有一定的能力; 对于强起伏波前探测, 尽管此时契伯格-山克斯顿方法反演的瞳面光强误差较小, 但相位误差以及与待测相位的相关性还不能令人满意。必须指出该方法的实际测量的量化与噪声误差对反演精度的影响还有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane picture. *Optik.*, 1972, **35**(2) : 237~ 246
- [2] Saxton W O. Computer techniques for image processing in electron microscopy. New York: *Academic Press*, 1978.
- [3] Gonsalves R A. Phase retrieval from modulus data. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(9) : 961~ 964
- [4] Foley J T, Butts R R. Uniqueness of phase retrieval from intensity measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**(8) : 1008~ 1013
- [5] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15) : 2758~ 2769
- [6] Wang Y J, Wu Y, Gong Z B. Simulation of adaptive optics compensation for wavefront degradation induced by turbulence. *Proc. SPIE Image Propagation through the Atmosphere*, 1996, **2828** : 457~ 462
- [7] 吴 毅, 王英俭. 哈特曼波前探测及波前校正的仿真与误差分析. *光学学报*, 1995, **15**(4) : 473~ 479

Features of G-S Method for Measuring Wavefront Distortion

Liu Lanqin Wu Yi

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of sciences, Hefei 230031)

(Received 10 March 1999; revised 21 May 1999)

Abstract Numerical simulation is used to study the features of Gerchberg-Saxton (G-S) method for measuring wavefront distortion of laser beam propagation through the turbulent atmosphere. The retrieved wavefront error is analyzed and compared with that from Hartmann-Shack wavefront sensor.

Key words numerical simulation, Gerchberg-Saxton method, wavefront measurement.