

圆柱坐标下多孔径扫描拼接技术的迭代方法*

郭红卫 陈明仪

(上海大学精密机械工程系, 上海 201800)

摘 要 从理论上提出了圆柱坐标下多孔径扫描拼接技术的迭代方法, 并通过计算机模拟验证了其收敛性及精确性, 证明这种算法对解决 360° 面形测量问题具有重要的意义。

关键词 多孔径扫描拼接技术, 迭代法, 360° 面形测量。

1 引 言

测量大的光学表面, 其困难在于需要大的参考平面。子孔径测试技术^[1]试图以小平面阵列代替大参考平面, 以克服这一困难。但存在各小参考平面难以共面, 且各子孔径之间关系无法确定的问题。

多孔径重叠扫描拼接技术^[2, 3]即是针对这一弊病发展起来的一项新技术。其基本原理是使相邻子孔径略有重叠, 利用重叠区域求解相邻两个子孔径的相对位置关系。进而实现多个子孔径的拼接。研究证明, 在直角坐标系中, 多孔径重叠扫描拼接技术以其简便的算法, 在实际问题的解决中表现出令人满意的效果。

近年来, 用途广泛的 360° 面形测量技术, 迫切要求多孔径重叠扫描拼接技术, 由直角坐标向圆柱坐标移植, 并已取得了一定进展。不同于直角坐标, 在圆柱坐标系中子孔径之间相互关系除了平移之外还存在着旋转; 并且由于圆柱坐标系下的坐标变换方程远比直角坐标下的复杂, 因而使得圆柱坐标系中的多孔径拼接变得异常困难。目前此项技术的算法主要建立在圆柱坐标系下的坐标变换方程上^[4, 5], 而使超定非线性方程组的求解不可避免, 且存在一定的方法误差。

本文在对重叠区域两个子孔径关系的重新认识基础上, 提出了一个新算法, 即迭代法。其目的是消除旧算法中存在的方法误差, 提高子孔径的拼接精度。同时, 应用了一组线性化的坐标变换方程, 在保证拼接精度的同时, 使算法大为简化。

2 基本原理

图 1 所示为一待测圆柱面, 其面形须由柱面上多个子孔径拼接而成。当测量系统由子孔径 I 出发, 经过与待测圆柱之间绕 z 轴的相对转动及沿 z 轴的移动, 而对准子孔径 II 时, 由于

* 由上海市科委科技发展基金资助。

收稿日期: 1998-11-19; 收到修改稿日期: 1999-01-29

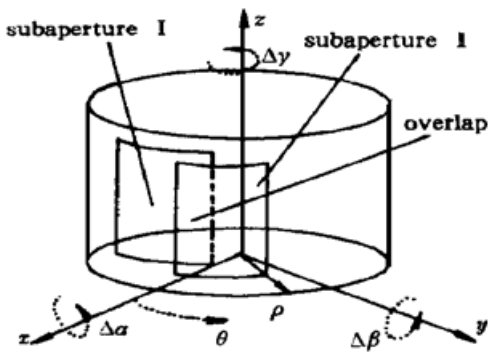


Fig. 1 The principle of subaperture connection

机械系统传动误差, 子孔径 II 的方位偏离名义位置, 即存在未知的、对应于空间方向与位置六个自由度的误差, 即关于 x 、 y 、 z 坐标轴的线位移误差 Δx 、 Δy 、 Δz , 以及角位移误差 $\Delta \alpha$ 、 $\Delta \beta$ 、 $\Delta \gamma$ 。有理由认为, 对于面形连续变化且变化较为平缓的待测物体, 其径向尺寸 ρ 对 Δz 、 $\Delta \gamma$ 的变化不敏感, 暂不将其计入。那么, 误差可表示为向量空间内的一个向量 $(\Delta x, \Delta y, \Delta \alpha, \Delta \beta)$ 。这样, 可以用下式表示多孔径重叠扫描拼接技术的原理

$$s_0(\rho_{0i}, \theta_{0i}, z_{0i}) = A s(\rho_i, \theta_i, z_i), \quad (1)$$

其中 s 表示圆柱坐标系下子孔径 II 中重叠区域的面形, A 为坐标变换算子, 它与向量空间中的一个向量 $(\Delta x_a, \Delta y_a, \Delta \alpha_a, \Delta \beta_a)$ 构成一一映射。算子 A 作用于面形 s , 使其变换为面形 s_0 。多孔径重叠扫描拼接技术的关键, 即是求解算子 A , 并保证: 1) s_0 与 s 只是空间方位不同, 而形状应保持一致; 2) s_0 与子孔径 I 的重叠区面形重合。当然, 这种重合只存在于理想状态下。工程中, 条件 2) 可以修正为 s_0 与子孔径 I 的重叠区面形距离取得最小值, 本文中采用的是最小二乘意义上的最小值。由(1)式可以看出, 由于 s 面形中的任意点 (ρ_i, θ_i, z_i) 在 s_0 上或子孔径 I 上的匹配点 $(\rho_{0i}, \theta_{0i}, z_{0i})$ 为未知, 因此, 直接求解算子 A 是非常困难的。

旧有的圆柱坐标系下的多孔径重叠扫描拼接技术的算法^[4, 5], 是建立在下式基础上的,

$$s_0(\rho_{0i}, \theta_i, z_i) = B s(\rho_i, \theta_i, z_i), \quad (2)$$

从(2)式中可以看出, 旧算法是近似以重叠区中坐标分量 θ_i 、 z_i 相同的点作为匹配点的。同样, 算子 B 与向量空间中的一个向量 $(\Delta x_b, \Delta y_b, \Delta \alpha_b, \Delta \beta_b)$ 构成一一映射。算子 B 只是算子 A 的近似值, 它不能满足前述条件 1)。因此, 旧算法存在一定的方法误差。

但是, 可以利用算子 B 与算子 A 的关系构造一个迭代过程, 来求解 A 的精确值, 其迭代过程可表示为

$$s_0^{(k)} = A^{(k)} s, \quad (3)$$

$$s_0 = B^{(k+1)} s_0^{(k)}, \quad (4)$$

其中, 由于误差向量 $(\Delta x_a, \Delta y_a, \Delta \alpha_a, \Delta \beta_a)$ 接近 0 向量, 因此, 可取 0 向量在 A 的算子空间中的映射为初值 $A^{(0)}$ 。而第 $k+1$ 次迭代值 $A^{(k+1)}$ 对应于向量 $(\Delta x_a^{(k)} + \Delta x_b^{(k+1)}, \Delta y_a^{(k)} + \Delta y_b^{(k+1)}, \Delta \alpha_a^{(k)} + \Delta \alpha_b^{(k+1)}, \Delta \beta_a^{(k)} + \Delta \beta_b^{(k+1)})$, 这样就形成了 A 的算子空间中的一个压缩映射^[6], 它收敛于算子空间中唯一的不动点 A , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A. \quad (5)$$

3 圆柱坐标系下的坐标变换方程

圆柱坐标系下, 上述算子 A 可以表示为下述过程, 圆柱坐标 (ρ_i, θ_i, z_i) 转换为直角坐标 (x_i, y_i, z_i) ; 再利用直角坐标的齐次坐标变换方程, 依据误差向量 $(\Delta x_a, \Delta y_a, \Delta \alpha_a, \Delta \beta_a)$ 将其变换至 (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}) ; 再转换为圆柱坐标 $(\rho_{0i}, \theta_{0i}, z_{0i})$ 。当然也可以根据上述过程推导出一组由 (ρ_i, θ_i, z_i) 直接求出 $(\rho_{0i}, \theta_{0i}, z_{0i})$ 的坐标变换方程, 文献[5]中是从几何关系出发推导了这组坐标变换方程的一种形式。若假设 $\theta_i = \theta_{0i}$, $z_i = z_{0i}$, 就可以在重叠区两子孔径面上取得若干个点的坐标, 将其坐标代入这组方程, 求解出未知量 $(\Delta x_b, \Delta y_b, \Delta \alpha_b, \Delta \beta_b)$ 的最小二乘解。

解向量就是算子 B 在向量空间中的映射。但由于这组方程表达式非常繁琐且存在严重非线性, 所以拟将上述方程代之以其关于误差向量的一阶泰勒级数。一阶泰勒级数的计算无需通过对坐标变换方程求导, 可以通过几何关系, 考察各误差分量对各坐标分量大小的影响, 直接求出, 其过程简述如下。

图 2 所示, 坐标系中任意点 P , 其直角坐标为 (x, y, z) , 圆柱坐标为 (ρ, θ, z) , 其中, $\rho = \overline{CP}$, $\theta = \angle xOP$ 。两者关系可以用下式表示

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad (7)$$

利用(6)、(7)两式可以求出圆柱坐标各分量对直角坐标分量的偏导数, 如下式所示

$$\begin{bmatrix} \rho/x & \rho/y & \rho/z \\ \theta/x & \theta/y & \theta/z \\ \alpha/x & \alpha/y & \alpha/z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta/\rho & \cos \theta/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

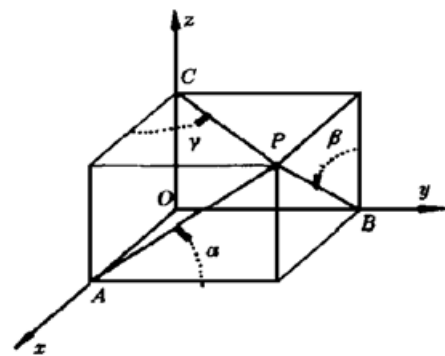


Fig. 2 The principle of coordinates transformation

相对而言, 圆柱坐标各分量对转角的偏导数的计算则相对复杂一些。如图 2 所示, 当 P 点围绕 x 轴转动时, \overline{AP} 与 x 保持不变, 则有以下三式成立。

$$\rho = \sqrt{x^2 + (\overline{AP} \cos \alpha)^2}, \quad (9)$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{AP} \cos \alpha}{x}, \quad (10)$$

$$z = \overline{AP} \sin \alpha, \quad (11)$$

由此可得

$$[\rho/x \quad \theta/x \quad \alpha/x]^T = [-z \sin \theta \quad -z \cos \theta/\rho \quad \rho \sin \theta]^T, \quad (12)$$

同理, 关于 β 可得

$$[\rho/y \quad \theta/y \quad \alpha/y]^T = [z \cos \theta \quad -z \sin \theta/\rho \quad -\rho \cos \theta]^T, \quad (13)$$

当 P 点围绕 z 轴转动时, \overline{CP} 与 z 保持不变, 且 $\theta = \angle xOP$, 则有下式成立

$$[\rho/z \quad \theta/z \quad \alpha/z]^T = [0 \quad 1 \quad 0]^T, \quad (14)$$

根据(8)、(12)、(13)、(14)各式, 可求得一阶泰勒级数为

$$\begin{bmatrix} \rho_0 \\ \theta_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & -z \sin \theta & z \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta/\rho & \cos \theta/\rho & 0 & -z \cos \theta/\rho & -z \sin \theta/\rho & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \sin \theta & -\rho \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \gamma \end{bmatrix}. \quad (15)$$

由(15)式可以看出 ρ 坐标分量对 Δz 、 $\Delta \gamma$ 的变化不敏感。利用(15)式第一行代替前述非线性方程^[5], 可使算法简化, 并且不会带来误差, 这是因为: 1) 级数二阶以上各项可看作无穷小量; 2) 中间结果的误差不会影响迭代的收敛结果; 3) 本方法中无论是利用精确的方程, 还是一阶泰勒展开式, 求得的算子序列在向量空间中的映射, 都将收敛于同一向量。

4 迭代步骤

为了便于操作, 将具体迭代步骤解释如下:

- 1) 取初值 $(\Delta x_a^{(0)}, \Delta y_a^{(0)}, \Delta \alpha_a^{(0)}, \Delta \beta_a^{(0)}) = (0, 0, 0, 0)$, 则 $s_0^{(0)} = s$;
- 2) 如上节所述, 在 $s_0^{(0)}$ 及子孔径 I 上选取若干坐标分量 θ, z 相同的点代入(15)式第一行表达式中, 求得最小二乘解 $(\Delta x_b^{(1)}, \Delta y_b^{(1)}, \Delta \alpha_b^{(1)}, \Delta \beta_b^{(1)})$;
- 3) 根据下式计算 $(\Delta x_a^{(1)}, \Delta y_a^{(1)}, \Delta \alpha_a^{(1)}, \Delta \beta_a^{(1)})$
 $(\Delta x_a^{(k+1)}, \Delta y_a^{(k+1)}, \Delta \alpha_a^{(k+1)}, \Delta \beta_a^{(k+1)}) =$
 $(\Delta x_a^{(k)} + \Delta x_b^{(k+1)}, \Delta y_a^{(k)} + \Delta y_b^{(k+1)}, \Delta \alpha_a^{(k)} + \Delta \alpha_b^{(k+1)}, \Delta \beta_a^{(k)} + \Delta \beta_b^{(k+1)});$ (16)
- 4) 将 s 转换为直角坐标, 根据误差 $(\Delta x_a^{(1)}, \Delta y_a^{(1)}, \Delta \alpha_a^{(1)}, \Delta \beta_a^{(1)})$, 将其代入齐次坐标变换矩阵, 求得直角坐标系下的面形 $s_0^{(1)}$, 并将其转换为圆柱坐标;
- 5) 类似于步骤 2), 求得 $(\Delta x_b^{(2)}, \Delta y_b^{(2)}, \Delta \alpha_b^{(2)}, \Delta \beta_b^{(2)})$;
- 6) 重复上述过程, 直至求解到足够精度的 $(\Delta x_a^{(k)}, \Delta y_a^{(k)}, \Delta \alpha_a^{(k)}, \Delta \beta_a^{(k)})$, 并依据其实现子孔径的拼接。

5 计算机模拟

构造一具有较为复杂面形的准圆柱面为待测对象, 以其轴线为坐标系 z 轴, 该准圆柱直径约为 100 mm, 高度为 100 mm, 其表达式为 $\rho = 50 + 0.01(z - 50) \sin \theta$ 的双 5 次最小二乘逼近多项式, 即 $\rho = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 a_{ij} (0.01z)^i (1.8\theta/\pi)^j$ 。这样做的原因是, 模拟过程中步骤中的面形以及最后拼接的结果是以最小二乘逼近多项式表示的, 有一定误差, 而逼近误差不是本文所要讨论的内容。使用一个最小二乘逼近多项式作为待测面形的方程, 可以最大限度地减小这些误差, 避免在分析模拟结果时受其干扰。此准圆柱面的径向等高图如图 3 所示。

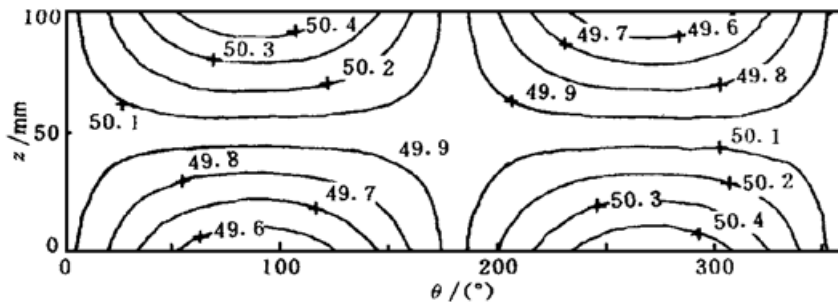


Fig. 3 Contour of the given surface (Unit: mm)

在此准圆柱面上取得六个子孔径, 各子孔径范围及给定误差如表 1 所示, 经过多次迭代将其拼接为一完整面形。

Table 1. The given errors and ranges of each subapertures

	subaperture I	subaperture II	subaperture III	subaperture IV	subaperture V	subaperture VI
θ/π	01/2	1/35/6	2/37/6	13/2	4/311/6	5/313/6
$\Delta x/\text{mm}$	0	1.5	- 2.2	1.4	1.3	- 1.5
$\Delta y/\text{mm}$	0	2.1	- 1.6	2.3	1.5	1.3
$\Delta \alpha/\text{rad}$	0	0.017	- 0.085	0.051	- 0.034	0.017
$\Delta \beta/\text{rad}$	0	0.034	0.017	- 0.051	0.034	0.017

表 2 所示, 为子孔径 II 的误差向量在不同迭代次数时的计算结果。从表 2 可见, 上述方法可以保证求得的误差向量迅速收敛于真值。

Table 2. The calculated results of subaperture II's errors

iterative times	$\Delta x/\text{mm}$	$\Delta y/\text{mm}$	$\Delta \alpha/\text{rad}$	$\Delta \beta/\text{rad}$
0	0	0	0	0
1	1.54035916999549	2.10321326285479	0.01933962464067	0.03492307908878
2	1.50063134112259	2.10125232035474	0.01700024196738	0.03396075752761
3	1.50000117670359	2.10000070042893	0.01700001349359	0.03400043495294
5	1.50000000009906	2.10000000002019	0.01700000000091	0.03400000005560
7	1.49999999999930	2.09999999999976	0.01700000000000	0.03400000000001
10	1.50000000000010	2.10000000000003	0.01700000000000	0.03400000000000
true value	1.5	2.1	0.017	0.034

表 3 所示, 为不同迭代次数下, 六个子孔径拼接所得面形与理论面形相比较的各项误差指标大小。由表中数据可以看出, 迭代法可以大幅度提高子孔径的拼接精度。本文所模拟的例子中, 只需迭代 5 次即可得到令人满意的结果。之后随迭代次数增加, 精度提高缓慢。这是因为, 此时的精度, 已逼近模拟运算过程中所用的最小二乘多项式逼近实际面形所能达到的精度。

Table 3. The deviations of the connected surface from the given surface

iterative times	$\Delta \rho_{\max}/\text{mm}$	$\Delta \rho_{\min}/\text{mm}$	$\Delta \rho_{p-v}/\text{mm}$	$\Delta \rho_{\text{rms}}/\text{mm}$
1	5.98×10^{-1}	-2.41×10^{-1}	8.39×10^{-1}	1.67×10^{-1}
2	8.04×10^{-3}	-5.05×10^{-3}	1.31×10^{-2}	2.31×10^{-3}
3	8.54×10^{-5}	-2.27×10^{-5}	1.09×10^{-4}	2.88×10^{-5}
5	6.35×10^{-9}	-3.47×10^{-9}	9.82×10^{-9}	1.77×10^{-9}
7	1.74×10^{-10}	-2.07×10^{-10}	3.82×10^{-10}	3.68×10^{-11}
10	6.49×10^{-10}	-7.71×10^{-10}	1.42×10^{-9}	1.75×10^{-10}

图 4 所示为 7 次迭代所得拼接结果与理论面形的径向差值等高图, 其坐标系横轴为圆周角 θ (0360°), 纵轴为圆柱高度 z (0100 mm)。由图 4 可见, 较大误差发生在圆周角 $\theta = 360^\circ$ 附近, 这是因为子孔径 II、III、IV、V 依次向子孔径 I 拼接, 会在离子孔径 I 较远的子孔径 V 上积累较大误差。

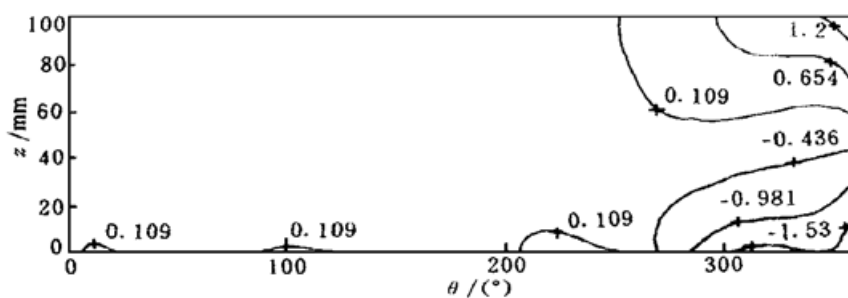


Fig. 4 Contour of the difference ($\Delta \rho$) between the connected surface and the given surface (Unit: 10^{-10} mm)

结 论 利用圆柱坐标下多孔径扫描拼接技术的迭代方法,可以保证子孔径拼接时面形不发生变化,且使拼接后拼接区的距离逼近最小值,从而提高了拼接精度。同时,采用线性方程组使算法大为简化。因此,这是一种对解决 360° 面形测量问题十分有效的方法。

本方法中,可以提高单幅面形的采样精度,以提高面形拼接精度。但迭代所能达到的精度主要受限于计算过程中,面形表达逼近函数或插值函数的精度。可以根据具体工程问题的精度要求,合理选择迭代次数,并合理采用面形逼近方程,如二元插值多项式、二元最佳逼近多项式及二元样条函数等^[7]。对于较高精度要求,可采用 NURBS(Non-Uniform Rational B-spline Surface) 方程,该方法作为 ISO 标准中精确定义工业产品各种复杂的自由曲面形状的唯一数学方法^[8],已广泛用于各种商业 CAD/CAM 系统中。

参 考 文 献

- [1] Chew W W, Lawrence G N. Method for subaperture testing interferogram reduction. *Opt. Lett.*, 1983, **8**(9): 468-470
- [2] Chen M Y, Cheng W M. Multi-aperture overlap scanning technique for large aperture test. *Proc. SPIE*, 1991, **1553**: 626635
- [3] 陈明仪, 吴德柱, 程维民. 用条纹图形拼接法测量三维大物体面形. *光学学报*, 1998, **18**(1): 7379
- [4] Cheng W M, Chen M Y. Surface measurement of optical cylinder using multiaperture overlap scanning technique (MAOST). *Proc. SPIE*, 1996, **2860**: 321328
- [5] 程维明, 陈明仪, 丁 峥等. 圆柱坐标下的多孔径拼接测量三维面形. *光学学报*, 1999, **19**(6): 811815
- [6] 龚怀云, 寿纪麟, 王绵森. 应用泛函分析. 西安: 西安交通大学出版社, 1985.
- [7] 王仁宏, 梁学章. 多元函数逼近. 北京: 科学出版社, 1988.
- [8] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京: 北京航空航天大学出版社.

An Iterative Algorithm of Multi-Aperture Transformation and Connection Technique in Cylindrical Coordinates

Guo Hongwei Chen Mingyi

(Precision Mechanical Department, Shanghai University, Shanghai 201800)

(Received 19 November 1998; revised 29 January 1999)

Abstract An iterative algorithm of multi-aperture transformation and connection technique in cylindrical coordinates is derived. The convergence and the accuracy of this algorithm have been examined by means of computer simulation. It is demonstrated that this algorithm will play an important role in 360° profilometry.

Key words multi-aperture overlap scanning technique, iterative, 360° profilometry.