

# 正多边形和狭缝的等效菲涅耳数\*

余礼平 徐晓玲 林 强 王绍民\*\*

(浙江大学西溪校区物理系, 杭州 310028)

**摘 要** 以正多边形的内切圆半径和狭缝的半宽度为特征尺度, 给出了匀幅平面波入射时正多边形和狭缝的等效菲涅耳数。

**关键词** 正多边形, 内切圆半径, 狭缝, 半宽度, 等效菲涅耳数。

## 1 引 言

菲涅耳数是分析光学系统的一个重要物理量。例如焦移现象的理论发现<sup>[1]</sup>, 边界衍射波中存在  $\pi$  相位跃变特性的证实和应用<sup>[2]</sup>等, 都是运用菲涅耳数进行定量分析得到的。文献[3]给出了球面波入射圆形光阑的菲涅耳数。对圆形光阑后带有一系列光学元件的菲涅耳数, 范滇元用光学矩阵元进行了表述<sup>[4]</sup>。更复杂的系统的菲涅耳数也已给出<sup>[5]</sup>。然而上述文献中讨论的菲涅耳数都是针对圆形光阑的。随着实验设计的多样化, 有必要讨论其它形状光阑的菲涅耳数。

本文以正多边形的内切圆半径和狭缝的半宽度为特征尺度, 给出了匀幅平面波入射时正多边形和狭缝的等效菲涅耳数。

## 2 方孔的等效菲涅耳数

圆孔的菲涅耳数等于从圆孔边缘和中心发出的两列子波的光程差除以半波长  $\lambda/2$ 。轴上出现的光强极值点都是在菲涅耳数为整数的地方, 当  $N$  为奇数时, 轴上光强是极大值(亮点); 当  $N$  为偶数时, 轴上光强是极小值(暗点)。与圆孔相类似, 对于方孔, 我们规定轴上光强极值位置对应整数菲涅耳数。

由菲涅耳衍射积分公式得:

$$E_2(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda} \exp(i\kappa l) \iint E_1(x_1, y_1) \exp\left\{\frac{ik}{2L}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]\right\} dx_1 dy_1, \quad (1)$$

其中  $\lambda$  为入射平面波的波长,  $E_1(x_1, y_1)$ 、 $E_2(x_2, y_2)$  分别是入射屏和观察屏上的光场分布,

\* 浙江省自然科学基金项目(198045 和 RC98029)资助课题。

\*\* 联系人。

收稿日期: 1999-07-08; 收到修改稿日期: 2000-01-10

波数  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $L$  为观察点离光阑的轴上距离。对轴上点  $x_2 = y_2 = 0$ , 上式可化为:

$$E_2(0, 0) = \frac{1}{i\mathcal{L}} \exp(i\kappa L) \iint E_1(x_1, y_1) \exp\left[\frac{ik}{2L}(x_1^2 + y_1^2)\right] dx_1 dy_1. \quad (2)$$

轴上光强为  $I_2(0, 0) = E_2^*(0, 0)E_2(0, 0)$ 。

图 1 是匀幅平面波(波长  $\lambda = 0.53 \mu\text{m}$ ) 分别入射到圆孔(半径  $a = 1 \text{ mm}$ ) 和方孔(半边距  $a = 1 \text{ mm}$ , 也即内切圆半径)后在轴上所形成的光强分布, 它由菲涅耳衍射积分(2)式算得。从图 1 中, 可发现两者都出现规律性极为相似的振荡; 但对应于光强  $I$  取极值时的轴上距离  $L$ , 方孔相对于圆孔有一右偏移量, 该偏移量随着轴上距离的增大而增大。

在光强取极值处:

$$\frac{dI_2}{dL} = E_2^*(0, 0) \frac{dE_2(0, 0)}{dL} + E_2(0, 0) \frac{dE_2^*(0, 0)}{dL} = 0. \quad (3)$$

将满足上式的  $L$  值, 从大到小依次定义为菲涅耳数等于 1、2、3、...、 $n$ ,  $n$  为光强极值点的数目。由于(3)式很复杂, 直接解这个方程相当困难, 因而很难得到其准确的解析解。但是, 用数值计算方法却很容易得到光强在轴上的分布, 因此我们根据计算得到的  $I-L$  曲线(光强分布), 找到极值点, 并将它们依次定义为整菲涅耳数, 然后作  $N-L$  曲线图, 对方孔进行双曲线拟合, 如图 2 所示。图中实线代表方孔的拟合曲线, 黑实点代表从图 1 中取出的方孔的光强极值点(即计算曲线)。

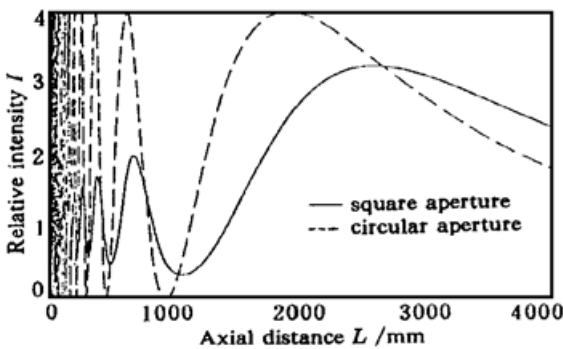


Fig. 1 The axial intensity distributions of uniform plane wave diffracted by circular and square apertures respectively

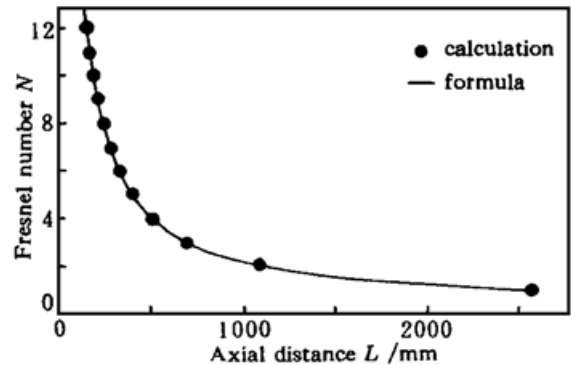


Fig. 2 The relation between axial distance  $L$  and Fresnel number  $N$  for square aperture

以拟合曲线方程作为方孔的菲涅耳数的一种近似表达式则为:

$$N = \frac{a^2}{\mathcal{L}} + \frac{1}{3.80}. \quad (4)$$

### 3 正多边形的等效菲涅耳数

匀幅平面波入射正三边形、正六边形、正八边形的轴上光强分布都十分类似, 随着边数  $m$  的增加, 光强极值所对应的轴上距离就向左( $L$  减小的方向)移动, 如图 3 所示。当  $m = \infty$  时, 即为圆孔衍射现象。由此, 再根据(4)式, 正  $m$  边形的菲涅耳数可表示为:

$$N = \frac{a^2}{\mathcal{L}} + \frac{1}{f(m)}, \quad (5)$$

其中  $a$  为正  $m$  边形的内切圆半径,  $f(m)$  是关于  $m$  的递增函数。随着正多边形边数  $m$  的增加,  $I-L$  的分布图越来越趋近于圆孔。当  $m = 36$  时, 其分布已基本上与圆孔的  $I-L$  分布图重合, 如

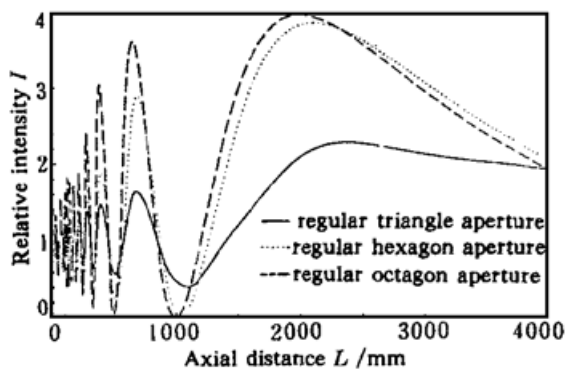


Fig. 3 The axial intensity distributions of uniform plane wave diffracted by regular triangle, regular hexagon and regular octagon apertures respectively

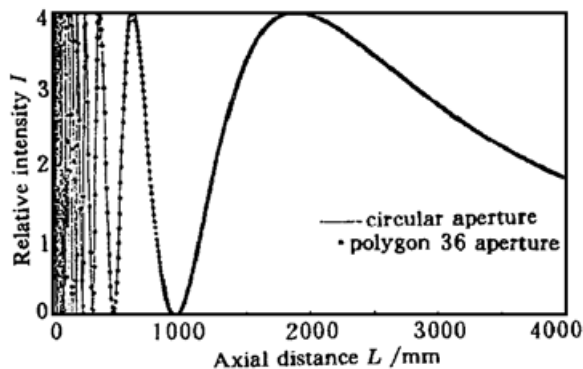


Fig. 4 The axial intensity distributions of uniform plane wave diffracted by circular and regular polygon 36 apertures respectively

图 4 所示。同样, 经过计算和曲线的拟合, 可得到

$$f(m) = 0.306m^2 - 0.105m - 0.681.$$

所以正多边形的等效菲涅耳数可表示为:

$$N = \frac{a^2}{\lambda L} + \frac{1}{0.306m^2 - 0.105m - 0.681}, \quad (6)$$

上式除正三角形在  $N < 5$  的情况下误差较明显外, 其它都能较好地符合, 误差均能控制在 1% 以内。

## 4 狭缝的等效菲涅耳数

当狭缝的半宽度和方孔的内切圆半径相等(均设为  $a$ ), 并都以匀幅平面波入射时, 它们的  $I-L$  曲线图(如图 5)形状很相似但光强大小不一样, 而且它们光强极值所在位置都一一对应, 这可以直接从菲涅耳衍射积分公式上来理解。由(2)式得匀幅平面波入射方孔后的轴上光场分布为:

$$\begin{aligned} E_{\text{sq}} &= \frac{1}{i\kappa L} \exp(i\kappa L) \times \\ &\int_a^a \int_a^a \exp\left[\frac{ik}{2L}(x_1^2 + y_1^2)\right] dx_1 dy_1 = \\ &\left(\frac{1}{i\lambda L}\right)^2 \exp(i\kappa L/2) \int_a^a \exp\left(\frac{ik}{2L}x_1^2\right) dx_1 \times \\ &\left(\frac{1}{i\lambda L}\right)^2 \exp(i\kappa L/2) \int_a^a \exp\left(\frac{ik}{2L}y_1^2\right) dy_1 = \\ &E_{\text{sl}}^2, \end{aligned}$$

其中  $E_{\text{sl}} = \left(\frac{1}{i\lambda L}\right)^2 \exp(i\kappa L/2) \int_a^a \exp\left(\frac{ik}{2L}x^2\right) dx$  为匀幅平面波入射到半宽度为  $a$  的狭缝后所形成的轴上光场分布。所以

$$I_{\text{sq}} = E_{\text{sq}}^* E_{\text{sq}} = (E_{\text{sl}}^*)^2 E_{\text{sl}}^2 = I_{\text{sl}}^2.$$

当  $\frac{dI_{\text{sq}}}{dL} = 2I_{\text{sl}} \frac{dI_{\text{sl}}}{dL} = 0$  时, 因为  $I_{\text{sl}} \neq 0$ , 所以  $\frac{dI_{\text{sl}}}{dL} = 0$ , 即在方孔出现极值点的地方, 狭缝也出

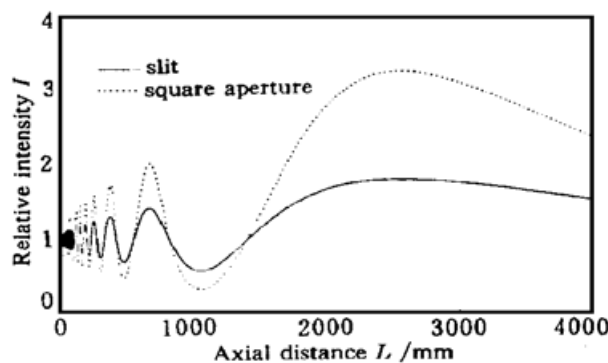


Fig. 5 The axial intensity distributions of uniform plane wave diffracted by square aperture and slit respectively

现极值点, 所以半宽度为  $a$  的狭缝的菲涅耳数可用内切圆半径为  $a$  的方孔的菲涅耳数表示, 如(4)式所示。

**结 论** 给出了匀幅平面波入射正多边形和狭缝的菲涅耳数近似表达式, 它是以正多边形的内切圆半径和狭缝的半宽度为特征尺度。若选用不同的特征尺度和数值拟合方法, 将得到不同的菲涅耳数表达式, 但它们在光强极值位置处为整菲涅耳数的表达形式是等效的。本文所给出的菲涅耳数, 形式简洁, 且光强极值位置都对应整菲涅耳数, 同时, 从各图中可看出, 所有正多边形和狭缝其极值均小于圆孔。这在理论上和应用上都具有实用价值。

### 参 考 文 献

- [1] Li Y, Wolf E. Focal shifts in diffracted converging spherical waves. *Opt. Commun.*, 1981, **39**(3): 211~ 214
- [2] 王绍民, 林 强, 陈千颂等. 用波阵面图分析光阑衍射及其实用性举例. *中国激光*, 1999, **A26**(4): 347 ~ 350
- [3] Campillo A J, Pearson J E, Shapire S L *et al.*. Fresnel diffraction effects in the design of high power laser systems. *Appl. Phys. Lett.*, 1973, **23**(2): 85~ 87
- [4] 范滇元. 用光线矩阵元表述的菲涅耳数. *光学学报*, 1983, **3**(4): 319~ 325
- [5] Wang S, Bernabeu E, Alda J. Unified and generalized Fresnel numbers. *Opt. Quantum Electron.*, 1992, **24**(12): 1351~ 1358

## Equivalent Fresnel Numbers for Regular Polygon Aperture and Slit

Yu Liping    Xu Xiaoling    Lin Qiang    Wang Shaomin

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028)

(Received 8 July 1999; revised 10 January 2000)

**Abstract** The equivalent Fresnel numbers of the regular polygon and slit are calculated by using the radius of inscribe circle and half-width of the slit as the feature length. The result can be obtained by incidence with uniform plane-wave.

**Key words** regular polygon, the radius of inscribe circle, slit, half-width, equivalent Fresnel number.