第20卷 第7期
2000年7月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 20, No. 7
July, 2000

原子质心运动和场模结构对场相位动力学的影响*

陈菊梅[1)] 方卯发[1), 2)]

1), 湖南师范大学物理学系, 长沙 410081
2), 中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031

摘 要 运用 Pegg-Barnett 的厄米相位公式, 研究了 J-C 模型中原子质心运动和场模结构对场相位动力学的影响。在未考虑原子质心运动和考虑原子质心运动两种情况下, 分别给出了场相位概率分布和相位涨落随时间的变化规律, 并比较了两种情况下的场相位动力学。结果表明: 原子质心运动导致场相位动力学的周期性演化, 场模结构参数决定其周期的大小。

关键词 相位动力学, 原子质心运动, 场模结构。

1 引 言

Pegg-Barnett(P-B) 相位理论提出后, 人们对光场的量子相位特性作了广泛的研究[1~4], 其中文献[4] 研究了 Jaynes-Cummings(J-C) 模型中原子与场之间的相互作用对光场相位特性的影响, 发现原子与场相互作用使场的相位概率分布由原来的单峰结构变为双峰结构, 并且原子的初始相干性也对其有一定的影响, 能调制峰的高度; 适当选取原子的初始激发状态, 原子与场的相互作用可导致相位涨落的压缩, 但不影响场相位算符的平均值。许多研究工作表明: 在 J-C 模型中, 原子质心运动和场模结构对其动力学特性有重要影响。Schlier 和 Joshi[5~7] 证明了原子质心运动导致原子布居数的非线性瞬时效应, 这类似于自感应透明和绝热效应; Bartzis 等人[8] 发现原子质心运动并不破坏压缩但减少了压缩时间; 作者之一在文献[9] 中揭示了在 J-C 模型中原子质心运动导致原子反转和场熵的周期演化, 并破坏薛定谔猫态的形成。但原子质心运动和场模结构对场的相位动力学特性的影响至今未见涉及。本文将讨论原子质心运动和场模结构对场相位动力学的影响, 具体讨论了 J-C 模型中具有原子质心运动和不同模场结构条件下场的相位概率分布, 相位算符平均值和相位涨落。

2 具有原子质心运动的 J-C 模型及其解

在现代腔量子电动力学实验中[10, 11], 采用让原子束沿轴向通过矩形或者园柱腔, 与不同场模耦合的方法, 来研究运动原子与场模之间的相互作用。本文具体考虑一个运动的二能级

* 国家自然科学基金资助项目(No. 19874020)。
收稿日期: 1998-12-14; 收到修改稿日期: 1999-04-20

原子与量子光场通过单光子跃迁而发生相互作用。在旋波近似下，系统的哈密顿量为[5~7]:

$$H = \omega a^{+} a + \omega_0 s_z + g f(z)(s_{+} a + s_{-} a^{+}), \qquad (\hbar = 1) \tag{1}$$

式中，a^{+} 和 a 分别为频率 ω 的场的产生和湮灭算符，s_z 和 $s_{\pm}$ 分别为原子反转和跃迁算符，ω_0 为原子跃迁频率，g 为原子与场的耦合常数，$f(z)$ 为场模形式函数。假定原子质心运动沿 z 轴，那末场模形式函数只需考虑对 z 分量的依赖关系。一般情况下，假定在原子寿命时间内不发生碰撞，并取原子与场发生作用的时间和位置为计时起点，原子质心运动可以通常的方法表述为[5]

$$f(z) \to f(vt), \tag{2}$$

式中 v 表示原子质心运动速度。定义 TEM_{mnp} 模为

$$f(z) = \sin(p\pi vt/L), \tag{3}$$

式中，p 代表长度为 L 的腔中场模半波数。为讨论方便，考虑共振情况($\omega = \omega_0$)，并假定原子在 $t = 0$ 时刻进入腔时处在激发态$|+\rangle$，在 p 个半波长之后离开腔。在相互作用表象中，利用(1)式的哈密顿量，在二维原子基矢下戴森时间演化算符可写为

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} \cos[\sqrt{aa^{+}}\, g\Theta(t)] & -\mathrm{i}a\dfrac{\sin[\sqrt{a^{+}a}\, g\Theta(t)]}{\sqrt{a^{+}a}} \\ -\mathrm{i}a^{+}\dfrac{\sin[\sqrt{aa^{+}}\, g\Theta(t)]}{\sqrt{aa^{+}}} & \cos[\sqrt{a^{+}a}\, g\Theta(t)] \end{pmatrix}, \tag{4}$$

式中，

$$\Theta(t) = \int_0^t f(vt')\,\mathrm{d}t' = \frac{L}{p\pi v}\left[1 - \cos\left(\frac{p\pi vt}{L}\right)\right], \tag{5}$$

不失一般性，选择原子的速度 $v = gL/\pi$，则

$$\Theta(t) = (1/pg)[1 - \cos(pgt)], \tag{6}$$

假设初始时刻，原子处在激发态$|+\rangle$，腔模场处在相干态

$$|\Psi_f(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle,$$

$$C_n = \exp(-|\alpha_0|^2/2)\,\alpha_0^n/\sqrt{n!}, \tag{7}$$

式中 $\alpha_0 = \sqrt{\bar{n}}\exp(\mathrm{i}\beta)$，$\bar{n}$ 为初始平均光子数，β 为相干场的激发方向角。假定 $t = 0$ 时刻，原子与场退耦合，那么系统的初态为

$$|\Psi_1(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n, +\rangle. \tag{8}$$

在 $t > 0$ 的任意时刻，

$$|\Psi_1(t)\rangle = U_1(t)|\Psi_1(0)\rangle, \tag{9}$$

将(4)式、(8)式代入(9)式得

$$|\Psi_1(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\{C_n\cos[\sqrt{n+1}\, g\Theta(t)]|n, +\rangle - \mathrm{i}C_{n-1}\sin[\sqrt{n}\, g\Theta(t)]|n, -\rangle\}, \tag{10}$$

式中$|-\rangle$为原子基态。很明显，由(10)式确定的态矢在将 $\Theta(t)$ 代替为 t 时描述了不考虑原子质心运动的标准 J-C 模型的动力学行为。现利用(10)式和 P-B 相位理论来讨论原子质心运动和场模结构对场相位动力学的影响。

3 原子质心运动和模结构对场相位动力学的影响

3.1 考虑原子质心运动的 J-C 模型场的相位概率分布、相位算符期望值和相位涨落公式

P-B 的厄米相位公式是基于有限的 $s+1$ 维希尔伯特空间的一组正交完备相位态矢 $|\theta_m\rangle$[12] 而定义的

$$\left.\begin{aligned}|\theta_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s+1}}\sum_{n=0}^{s}\exp(in\theta_m)|n\rangle,\\ \theta_m &= \theta_0+2\pi m/(s+1), \qquad m=0,1,2,\cdots,s,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 θ_0 为参考相位，$|n\rangle$ 为数态。P-B 位相理论假定：所有相位算符的期望值均在 $s+1$ 维希尔伯特空间进行，然后允许 s 趋于无穷。在该有限空间中，厄米相位算符被定义为

$$\hat{\phi}_\theta=\sum_{m=0}^{s}\theta_m|\theta_m\rangle\langle\theta_m|, \qquad \hat{\phi}_\theta|\theta_m\rangle=\theta_m|\theta_m\rangle. \tag{12}$$

考虑原子质心运动和场模结构时，J-C 模型场的相位概率分布为

$$P(\theta_m,t)=|\langle\theta_m|\psi_I(t)\rangle|^2, \tag{13}$$

将(10)式，(11)式代入(13)式得

$$\begin{aligned}P(\theta_m,t)=&\frac{1}{s+1}\{|\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos[\sqrt{n+1}g\Theta(t)]\exp(-in\theta_m)|^2+\\&|\sum_{n=0}^{\infty}-iC_{n-1}\sin[\sqrt{n}g\Theta(t)]\exp(-in\theta_m)|^2\}=\\&\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+1}\{\sum_{n>k}b_nb_k[C_{n,k}(t)+S_{n,k}(t)]\cos(n-k)(\theta_m-\beta)\},\end{aligned} \tag{14}$$

式中

$$\begin{aligned}C_{n,k}(t)&=\cos[\sqrt{n+1}g\Theta(t)]\cos[\sqrt{k+1}g\Theta(t)],\\S_{n,k}(t)&=\sin[\sqrt{n+1}g\Theta(t)]\sin[\sqrt{k+1}g\Theta(t)],\\b_n&=\exp(-\frac{1}{2}|\bar{n}|^2)\frac{\bar{n}^{n/2}}{n!},\\b_k&=\exp(-\frac{1}{2}|\bar{n}|^2)\frac{\bar{n}^{k/2}}{k!},\end{aligned}$$

本文取

$$\theta_0=\beta-\pi s/(s+1), \tag{15}$$

则由(11)式得

$$\theta_m=\beta+(2\pi\mu)/(s+1), \tag{16}$$

式中 $\mu=m-s/2$ 为 $-s/2$ 到 $s/2$ 整数步长的新相位标号。由此处理，场相位概率分布(14)式变得相对于 μ 对称。在 $s\to\infty$ 的连续谱极限下，θ_m 为连续变量，可用 θ 代替 $2\pi\mu/(s+1)$，用 $d\theta$ 代替 $2\pi/(s+1)$，这样，连续相位概率分布为

$$P(\theta,t)=\frac{1}{2\pi}\{1+2\sum_{n>k}b_nb_k[C_{n,k}(t)+S_{n,k}(t)]\cos[(n-k)\theta]\}. \tag{17}$$

可以证明，$P(\theta,t)$ 在 $-\pi$ 到 π 的对称区域内是归一化的：

$$\int_{-\pi}^{\pi}P(\theta,t)d\theta=1. \tag{18}$$

由于(17)式包含了原子质心运动速度 v 和场模结构参数 p，因此(17)式包含原子质心运动和场模结构对模场相位概率分布的影响。当将 $\Theta(t)$ 代换为 t 时，相位概率分布回到不考虑

原子质心运动的标准 J-C 模型的情况，这与文献[4]的结论一致。利用上面求出的相位概率分布可以求出场相位的厄米算符的期望值 $\langle\hat{\phi}_\theta\rangle$ 以及其相位涨落 $\langle\Delta\hat{\phi}_\theta^2\rangle$。

$$\langle\hat{\phi}_\theta\rangle = \sum_m \theta_m P(\theta_m, t), \tag{19}$$

$$\langle\Delta\hat{\phi}_\theta^2\rangle = \sum_m (\theta_m - \langle\hat{\phi}_\theta\rangle)^2 P(\theta_m, t), \tag{20}$$

在 $s \to \infty$ 的情况下，θ_m 为连续变量。用 θ 代替 $2\pi\mu/(s+1)$，在 θ 的对称区域 $-\pi$ 到 π 积分(19)和(20)式，得到

$$\langle\hat{\phi}_\theta\rangle = \beta, \tag{21}$$

$$\langle\Delta\hat{\phi}_\theta^2\rangle = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n>k} b_n b_k [C_{n,k}(t) + S_{n,k}(t)] \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2}. \tag{22}$$

由(21)式可知：场相位算符期望值为常数 β，与原子质心运动和场模结构参数无关；而(22)式不能精确作和，对(17)式和(22)式作数值计算，结果如图1和图2所示。

3.2　数值结果

图1中显示相位概率分布随标度时间 gt 的变化规律，图2揭示相位涨落随标度时间 gt 的变化规律。

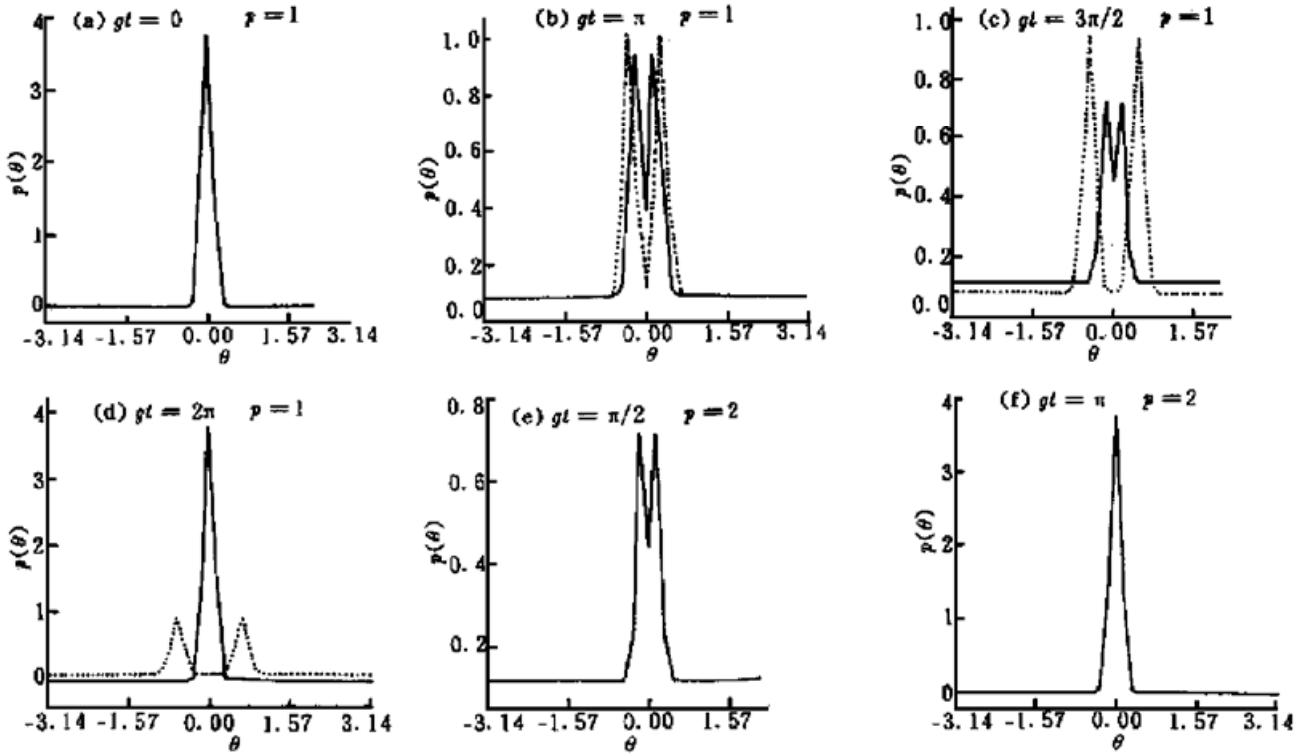

Fig. 1 The time evolution of the phase probability distribution. The field is initially in coherent state with mean photon number $n_c = 25$ and the atom initially in excited state. Dash line stands for the motion of atomic mass centre is neglected, solid line stands for the atom is in motion at velocity $v = gL/\pi$.

在图1中，虚线和实线分别为未考虑原子质心运动和考虑原子质心运动两种情况下场的相位概率分布。图1(a)为 $gt = 0$ 时场相位概率分布，在两种情况下均为单峰，这是因为初始时刻场处于相干态。而相干态的相位概率分布为单峰结构。图1(b)，(c)和(d)为 $p = 1$ 的情况。图1(e)和图1(f)为 $p = 2$ 的情况。由图1(a)、(b)、(c)和(d)中的虚线可以看出，未考虑原子质心运动时场的相位概率分布随时间的增加慢慢地变为随机分布。由图1(a)、(b)、(c)和

(d) 中的实线可以看出：考虑原子质心运动时其相位概率分布是由单峰变为双峰，然后又由双峰变为单峰这样一个以 2π 为周期的演化过程，还可以想见其周期实际上为 $2\pi/p$。因为图1(e) 和图1(f) 表明 $p = 2$ 时其演化周期变为 π。

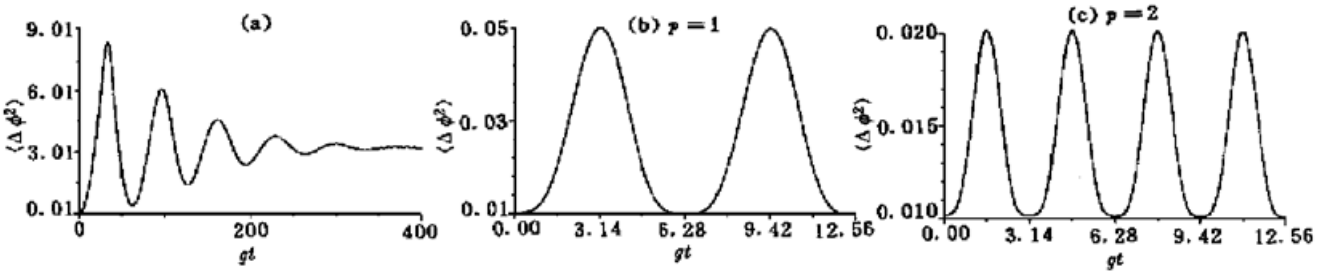

Fig. 2 The time evolution of the phase fluctuation. The initial conditions are same as Fig. 1. (a) The motion of atomic mass centre is neglected; (b) The atom is in motion at velocity $v = gL/\pi$ and $p = 1$; (c) The atom is in motion at velocity $v = gL/\pi$ and $p = 2$

在图2(a) 显示了未考虑原子质心运动时的情况，可以看出相位涨落随标度时间 gt 的增加趋向于一个固定值 $\pi^2/3$，其时间演化无周期性。图2(b) 和图2(c) 表明考虑原子质心运动时，相位涨落随标度时间 gt 作周期性的演化。这表明：原子质心运动导致场相位动力学的周期性，同时从图2(b) 中场模结构常数 $p = 1$，图2(c) 中场模结构常数 $p = 2$ 的情况可以看出其相位涨落的周期分别为 2π 和 π，即 $2\pi/p$。这表明场模结构参数 p 的增大导致相位动力学的时间演化周期缩短。

在物理上，所有这些特点归结为原子质心运动导致了场与原子相互作用时间的改变，可作出如下具体物理解释。

考虑强场 ($\bar{n} \gg 1$) 下的相位概率分布和相位的涨落。由于初始时刻场处于相干态，其光子数分布为泊松分布，在强场($\bar{n} \gg 1$) 情况下，可用高斯分布代替[12]：

$$|C_n|^2 = \exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n! \simeq 1/(2\pi\bar{n})\exp[-(\bar{n}-n)^2/2\bar{n}], \tag{23}$$

而且 $\sum_n \to \int \mathrm{d}n$。经过简单的运算，相位概率分布(14) 式可以变为

$$P(\theta, t) \simeq \sqrt{\bar{n}/2\pi}\Big(\exp\{-2\bar{n}[g\Theta(t)/(2\sqrt{\bar{n}}) - \theta]^2\} + \exp\{-2\bar{n}[-g\Theta(t)/(2\sqrt{\bar{n}}) - \theta]^2\}\Big), \tag{24}$$

而相位涨落(22) 式变为

$$\langle\Delta\phi_\theta^2\rangle \simeq 1/(4\bar{n}) + [g\Theta(t)]^2/(4\bar{n}). \tag{25}$$

把(24) 式、(25) 式与文献[2] 比较可以看到，在数学上，与未考虑原子质心运动的情况相比，相位概率分布和相位涨落在考虑原子质心运动后，其差别是时间因子 gt 和 $g\Theta(t)$。因此涉及到原子质心运动和场模结构对场相位动力学特性的影响可以通过考虑 $g\Theta(t)$ 与 gt 之间的关系来说明：当原子质心运动被忽略时，场相位动力学是非周期的(如图 1 虚线，图 2(a) 所示)；当考虑原子质心运动时，从方程(6) 有 $g\Theta(t) = 1/p[1-\cos(pgt)]$。可以看到 $g\Theta(t)$ 是一个关于标度时间 gt 的周期函数，周期为 $2\pi/p$。$g\Theta(t)$ 对 gt 的这种周期性恰恰导致场相位动力学特性的周期性演化[如方程(24)，(25)]。当 $p = 1$ 时相位动力学特性的演化周期为 2π；当 $p = 2$ 时，演化周期为 π。所以场的相位动力学周期特性依赖于原子速度 v 和场模结构参数 p。

结 论 讨论了原子质心运动和场模结构对 J-C 模型场相位动力学的影响，结果表明原子质

心运动导致场相位动力学的周期性演化, 场模结构参数决定其周期大小。

参 考 文 献

[1] Gantsog T, Tanas R. Phase properties of pair coherent states. *Opt. Commun.*, 1991, **82**(1, 2) ·145~152

[2] Grønbech-Jensen N, Christiansen P L. Phase properties of squeezed states. *J. Opt. Soc. Am.* (*B*), 1989, **6**(12) ·2423~2429

[3] Dung H T, Tanas R, Shumovsky A S. Dynamical properties of the field phase in the Jaymes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(10) ·2069~2083

[4] 周 鹏. 与原子相互作用的量子光场的相位特性. 科学通报, 1992, **37**(12) ·1078~1082

[5] Schlicher R R. Jaynes-Cummings model with atomic motion. *Opt. Commun.*, 1989, **70**(1) ·97~101

[6] Joshi A, Lawande S V. Effect of atomic motion on Rydberg atoms undergoing two-photon transition in a lossless cavity. *Phys. Rev.* (*A*), 1990, **42**(3) ·1752~1756

[7] Joshi A, Lawande S V. Squeezing and quasiprobabilities for a two-photon Jaynes-Cummings model with atomic motion. *Int. J. Mod. Phys.* (*B*), 1992, **6**(10) ·3539~3545

[8] Bartzis V. Generalized Jaynes-Cummings model with atomic motion. *Physica.* (*A*), 1992, **180**(4) ·428~434

[9] Fang Maofa. Effect of atomic motion and field mode structure on the field entropy and Schr dinger-cat states in the Jaynes-Cummings model. *Physica* (*A*), 1998, **259**(2) ·193~204

[10] Meschede D, Walther H, Muller G. One-atom maser. *Physical Rev. Lett.*, 1985, **54**(2) ·551~554

[11] Rempe G, Walther H, Klein N. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **58**(2) ·353~356

[12] Barnett S M, Pegg D T. On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1) ·7~19

Effects of the Motion of Atomic Mass Centre and Field Mode Structureon Dynamics of Field Phase

Chen Jumei[1)] Fang Maofa[1), 2)]

1), *Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha* 410081

2), *Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei* 230031

(Received 14 December 1998; revised 20 April 1999)

Abstract The effects of the motion of atomic mass centre and field mode structure on the dynamics of the field phase in the Jaynes-Cummings model are discussed by means of the Hermitian phase formulas of Pegg and Barnett. The time evolutions of the phase probability and the phase fluctuation, with the motion of atomic mass centre neglected and the motion not neglected, respectively, is derived. Under the two conditions, the dynamics of the field phase are compared. The results show that the motion of atomic mass centre leads to the periodic evolution of the dynamics of the field phase and this period depends on the field mode structure parameter.

Key words dynamics of phase, motion of atomic mass centre, field model structure.