

激光大气水平传输湍流畸变波前的功率谱分析 I: 波前整体倾斜与泰勒频率*

李新阳 姜文汉 王春红 鲜 浩 吴旭斌

(中国科学院光电技术研究所, 国家863计划大气光学重点实验室, 成都 610209)

摘 要 利用自适应光学系统的哈特曼(Hartmann)波前传感器, 测量了激光实际大气水平传输湍流畸变波前中整体倾斜像差的时间功率谱, 发现功率谱谱形与科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)湍流理论不完全符合。建立了一种根据实际测量的整体倾斜功率谱估测自适应光学系统倾斜镜需要的控制带宽大小和大气湍流的泰勒(Tyler)频率指标的方法。

关键词 自适应光学, 大气湍流, 功率谱, 波前整体倾斜, 泰勒频率。

1 引 言

在激光通讯、激光能量传输等应用场合以及在许多光学传输实验中, 经常遇到光束近地面水平大气传输的情况。近地面条件下光束的湍流波前畸变现象非常严重。发展已经较成熟的自适应光学技术可以实时地探测和补偿这种波前畸变^[1, 2]。波前整体倾斜是波前畸变中的主要部分, 理论和实验表明, 仅仅校正波前整体倾斜就可以显著地提高光束质量。自适应光学系统中通常用一面高速倾斜反射镜(简称倾斜镜)专门校正波前整体倾斜像差。泰勒等研究了科尔莫戈罗夫湍流畸变波前中整体倾斜像差的时间特性, 得到了波前整体倾斜像差的时间功率谱, 据此建立了大气湍流的泰勒频率指标^[3, 4]。泰勒频率指标被方便地用来确定自适应光学系统中倾斜镜需要的控制带宽大小。但国内外许多实验发现整体倾斜像差的时间功率谱谱形与泰勒的理论分析结果不完全符合^[5~11]。作者在激光近地面水平1 km 大气湍流传输实验中也发现了类似的现象。这种情况下就不能完全利用理论计算公式, 而是必须根据测量的实验数据确定大气湍流的泰勒频率和自适应光学系统倾斜镜需要的控制带宽大小。本文以下所提到的功率谱都是指时间功率谱。

2 理论分析

2.1 波前整体倾斜功率谱的理论分析^[3]

光束通过大气传输的过程中, 大气湍流引起的波前畸变主要是整体倾斜像差, 即在整个接受望远镜孔径上的波前平均倾斜(Gradient Tilt, 即 G 倾斜):

* 国家科委863高技术资助项目。

收稿日期: 1999-02-08; 收到修改稿日期: 1999-03-31

$$\theta(t) = \frac{1}{kA} \iint \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) d^2\mathbf{r}, \quad (1)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长, A 为孔径面积, $\Phi(\cdot)$ 为波前畸变。根据泰勒的分析, 科尔莫戈罗夫湍流造成的波前整体倾斜的功率谱在低频段符合 $-2/3$ 规律, 在高频段符合 $-11/3$ 规律。考虑文献[3]的(29)式、(44)式和(48)式, 整体倾斜的功率谱表示为:

$$F_{\theta}(f) = \begin{cases} 1.608 \sec(\zeta) f^{-2/3} \int_0^L C_n^2(z) V(z)^{-1/3} dz & f \leq f_0, \\ 0.022 \sec(\zeta) D^{-3} f^{-11/3} \int_0^L C_n^2(z) V(z)^{2/3} dz & f > f_0, \end{cases} \quad (2)$$

其中功率谱的单位是 rad^2/Hz , f 为时间频率, D 为望远镜主孔径, $C_n^2(z)$ 为传输路径上的大气折射率常数, $V(z)$ 为传输路径上的横向风速, L 为传输路径长度, ζ 为天顶角, f_0 为功率谱高频段与低频段的交点频率。对于水平传输的情形, 不考虑天顶角的影响, 并且认为在传输路径上的大气折射率常数和横向风速是不变的, 这时容易得到:

$$f_0 = 0.239V/D, \quad (3)$$

根据泰勒的分析, 未补偿的大气湍流造成的整体倾斜方差为功率谱在频率上的积分:

$$\sigma_{\theta}^2 = \int_0^{\infty} F_{\theta}(f) df = 0.170(\lambda/D)^2 (D/r_0)^{5/6}, \quad (4)$$

$$\text{其中 } r_0 = [0.423 \sec(\zeta) (2\pi/\lambda)^2 \int_0^L C_n^2(z) dz]^{-3/5}, \quad (5)$$

是度量大气湍流强度的弗里德(Fried)常数。根据(4)式可以估算 r_0 的大小。因为望远镜主孔径上整体倾斜的数据量小, 一般利用哈特曼探测器子孔径上的多个波前斜率数据估算 r_0 , 计算结果统计处理后可以提高估算精度。

2.2 利用波前整体倾斜功率谱估计泰勒频率

自适应光学系统中倾斜镜需要的控制带宽大小与大气湍流整体倾斜像差的时间特性有关。不考虑系统中的时间延迟, 一个理想自适应光学系统倾斜镜的闭环传递函数为:

$$H(f, f_{3\text{dB}}) = [1 + (jf/f_{3\text{dB}})]^{-1}, \quad (6)$$

其中 $f_{3\text{dB}}$ 为倾斜镜控制回路的闭环带宽。经倾斜镜闭环校正后的整体倾斜残余方差为:

$$\sigma_{\theta}^2(f_{3\text{dB}}) = \int_0^{\infty} F_{\theta}(f) |1 - H(f, f_{3\text{dB}})|^2 df. \quad (7)$$

为了公式推导方便, 泰勒在文献[3]中假设闭环带宽 $f_{3\text{dB}}$ 很高时, 近似有:

$$|1 - H(f, f_{3\text{dB}})|^2 = (f/f_{3\text{dB}})^2 [1 + (f/f_{3\text{dB}})^2]^{-1} \approx (f/f_{3\text{dB}})^2. \quad (8)$$

在这个近似条件下, 对于科尔莫戈罗夫湍流的情形, 泰勒得到倾斜镜闭环校正后的整体倾斜的方差与倾斜镜闭环带宽成 -2 次方关系^[3]:

$$\sigma_{\theta}^2(f_{3\text{dB}}) = (f_{\tau}/f_{3\text{dB}})^2 (\lambda/D)^2, \quad (9)$$

$$f_{\tau} = 0.331 D^{-1/6} \lambda^{-1} \left[\int_0^L C_n^2(z) V^2(z) dz \right]^{1/2}, \quad (10)$$

其中 f_{τ} 就是泰勒频率。其物理意义是: 当倾斜镜的控制闭环带宽等于泰勒频率时, 校正后的整体倾斜残余方差等于衍射极限角的平方, 即 $\sigma_{\theta}^2(f_{\tau}) = (\lambda/D)^2$ 。泰勒在文献[3]中还指出,

实际自适应光学系统倾斜镜的控制带宽要高得多, 通常要达到4倍泰勒频率, 根据(9)式这时的整体倾斜残余方差会小得多: $\sigma_0^2(4f_T) = (1/16)(\lambda/D)^2$ 。

理论上如果知道大气湍流的 C_n^2 和风速 V , 可以用(10)式近似计算泰勒频率指标。另外如果知道整体倾斜像差的功率谱, 计算(7)式的积分, 按照 $\sigma_0^2(f_T) = (\lambda/D)^2$ 的标准即泰勒频率的定义, 也可以确定出泰勒频率指标。作者发现这两种方法计算出的泰勒频率指标间有差异。图1是在大气湍流相干长度 $r_0 = 10$ cm, 横向风速 $V = 6$ m/s 的条件下, 分别用(7)式的准确积分计算和用(9)式的泰勒近似计算得到的整体倾斜校正残余方差与控制带宽的关系。从图1可见, 当闭环带宽较小时, 由于(8)式的近似误差较大, 泰勒的近似计算与准确积分结果的差异很大; 当闭环带宽较大时, 近似计算与准确积分的结果就比较接近了。对于不同的湍流强度, 按照校正残余方差 $\sigma_0^2 = (\lambda/D)^2$ 的标准, 分别按泰勒的近似公式和准确积分计算出倾斜镜需要的控制带宽如图2所示。当大气湍流较弱, r_0 为20 cm左右时, 按照泰勒近似计算公式得到的结果比对功率谱直接准确积分计算出的结果大几倍到几十倍。可见这两种确定泰勒频率方法的结果差异很大。图3是按照较高的 $\sigma_0^2 = (1/16)(\lambda/D)^2$ 的标准计算出倾斜镜需要的控制带宽。根据前面的分析, 这时的控制带宽大小应等于4倍泰勒频率, 控制带宽增大后(8)式的近似误差减小了, 所以这时两种方法计算结果的差异不大。

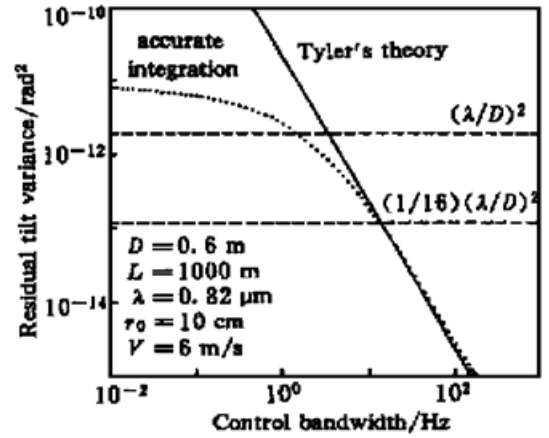


Fig. 1 The relationship between control bandwidth and residual tilt variance. Dash line: accurate integration result. Solid line: Tyler's theory result

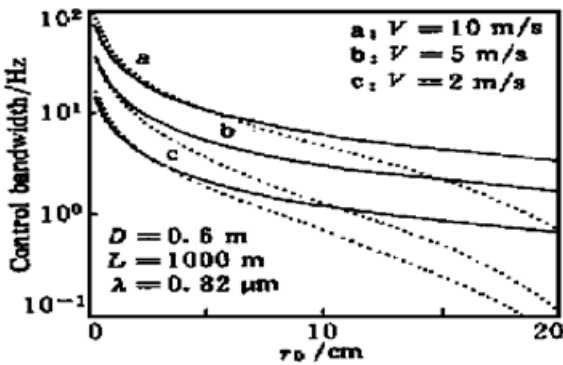


Fig. 2 The relationship between r_0 and needed control bandwidth when $\sigma_0^2 = (\lambda/D)^2$. Dash line: accurate integration result. Solid line: Tyler's theory result

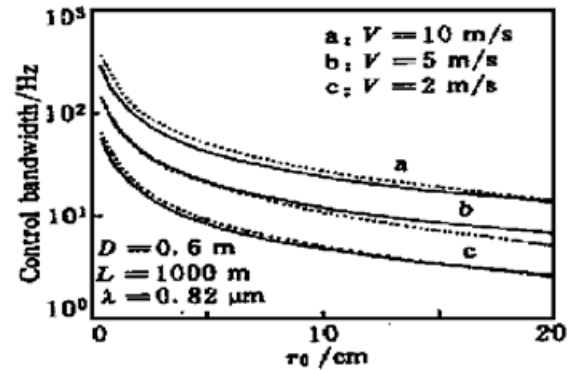


Fig. 3 The relationship between r_0 and needed control bandwidth when $\sigma_0^2 = (1/16)(\lambda/D)^2$. Dash line: accurate integration result. Solid line: Tyler's theory result

实际工作中常常无法准确知道大气湍流的 C_n^2 和风速 V 的值, 但是却可以测量得到大气湍流畸变波前整体倾斜像差的功率谱。上面的分析提供了一种可以较准确地根据整体倾斜像差的功率谱确定大气湍流泰勒频率指标的方法。具体做法是: 首先按照(7)式对整体倾斜像差的功率谱数据计算积分, 得到校正残余方差与倾斜镜闭环带宽的关系曲线 $\sigma_0^2(f_{3dB})$ 。然后按照校正残余方差 $\sigma_0^2 = (1/16)(\lambda/D)^2$ 的标准确定出需要的控制带宽大小 f_{3dB} , 则泰勒频率指标的估计值为 $f_T \approx f_{3dB}/4$ 。

这种方法的一个优势是: 确定出的泰勒频率指标与自适应光学系统倾斜镜控制带宽需求

的关系很密切。在研究大气湍流畸变波前自适应光学校正的实际工作中，经常发现整体倾斜像差功率谱的测量结果与泰勒的理论不一致，这时仍然根据泰勒推导的公式计算大气的泰勒频率指标显然是不合适的。但是对于任意的功率谱谱形，都可以用上面的方法得到校正残余方差与倾斜镜闭环带宽的关系曲线 $\sigma_0^2(f_{3dB})$ ，然后可以根据任意需要的校正精度确定倾斜镜需要的控制带宽大小。所以上面的方法在实际工作中很实用。

3 实验结果分析

3.1 实验系统描述^[8-10]

激光近地面1 km 水平大气湍流传输与自适应光学补偿实验系统如图4所示。系统的主体是一个主口径 $D = 0.6\text{ m}$ 的望远镜和一套61单元自适应光学系统^[10]。自适应光学系统的变形镜有61个驱动器，哈特曼波前探测器的有效子孔径48个，子孔径口径 $d = 0.071\text{ m}$ 。系统波前探测器的采样频率和采样长度可以根据需要选择，最高采样频率为2900 Hz，最多可以连续采集 1×10^4 帧波前斜率数据。探测信标是一个功率1 W 的连续半导体激光器，波长 $\lambda = 0.82\ \mu\text{m}$ ，距离望远镜 $L = 1000\text{ m}$ 。水平传输路径与地面距离10 m 左右，水面和陆地各占一半。在本文的实验中，自适应光学系统不闭环，仅仅利用系统中的哈特曼波前探测器对大气湍流畸变波前进行探测和记录。

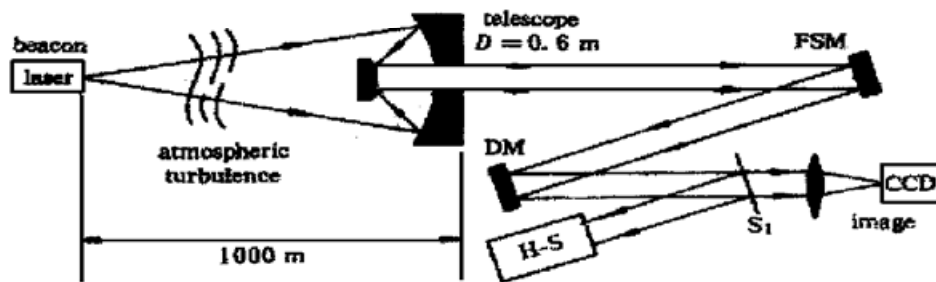


Fig. 4 The near-ground 1km atmosphere propagation and adaptive optics compensation experiment system

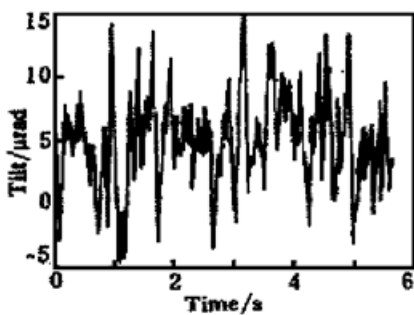


Fig. 5 A typical overall tilt signal measured on 61 elements adaptive optical system

一般选择天气晴朗、大气透过率高、风速较小的时候进行实验。在不同的大气湍流条件下采集了大量波前斜率数据，从中提取出波前整体倾斜进行分析。图5所示是一个典型的整体倾斜变化信号。对信号进行快速傅里叶变换(FFT)，分析得到波前整体倾斜的功率谱。根据采样定理，功率谱分析的有效频率范围取决于采样频率和采样时间长度。如以2900 Hz 连续采样 1×10^4 帧，有效频率范围是0.29~ 1450 Hz。合理地选择采样频率和采样长度，这套系统的频率分析范围可以从百分之一赫兹直到上千赫兹，得到的数据较有研究价值。

3.2 波前整体倾斜功率谱的实验结果分析

1998年10月到11月间共采集了48个有效的单轴整体倾斜大气湍流数据。数据采样长度都是8192帧，采样频率不等。为了分析方便，按采集时间和湍流相对强弱把数据分为3组。第一组14个数据的估测，大气 r_0 平均为4.6 cm；第二组14个数据的平均 r_0 为13 cm；第三组20个数据平均 r_0 为24 cm。实验时横向风速都较小，但没有准确测量数据。图6是从这48个数据中选取出的比较有代表性的功率谱谱形。

如图6(a)、图6(b)所示,当采样频率较低、采样时间较长时,功率谱曲线中有明显的高低频段转折点,它们的低频功率谱符合 $-2/3$ 规律。48个数据中有23个数据是这种情况。如图6(c)、图6(d)所示,当采样频率较高、采样时间较短时,有效频率范围在功率谱曲线的高频段,看不出低频功率谱的形状。48个数据中有25个数据是这种情况。国内外许多类似的实验结果也验证整体倾斜功率谱的低频段比较合理理论分析的 $-2/3$ 规律^[5-10]。

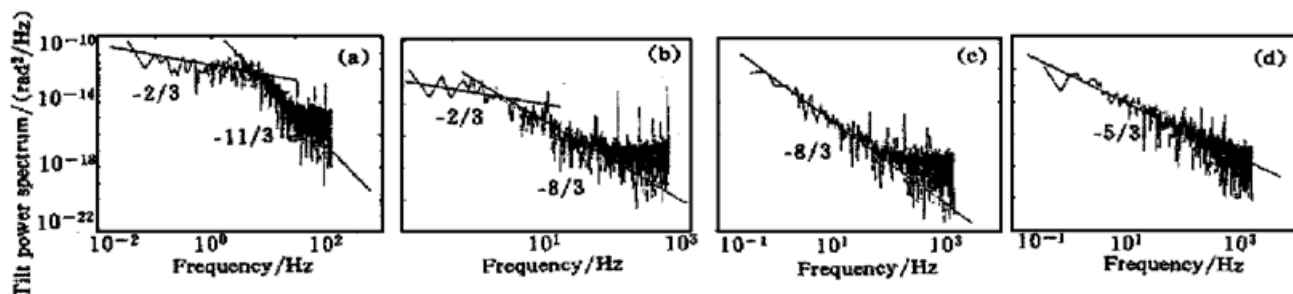


Fig. 6 Four typical shapes of overall tilt power spectrum in 48 measured data. (a) Data # 6 of group 1, sample frequency = 290 Hz, calculated $r_0 = 4.68$ cm, (b) Data # 3 of group 3, sample frequency = 967 Hz, calculated $r_0 = 28$ cm, (c) Data # 1 of group 2, sample frequency = 2900 Hz, calculated $r_0 = 10.2$ cm, (d) Data # 10 of group 3, sample frequency = 2900 Hz, calculated $r_0 = 24.4$ cm

整体倾斜功率谱的高频段形状呈现一定的分布。有的数据符合泰勒理论的 $-11/3$ 规律,也有相当多的数据符合 $-8/3$ 或 $-5/3$ 的规律。典型的数据如图6(a)~图6(d)所示。图6(a)中由于采样频率低,有效频率范围在中低频段,对高频段特性反映不完全。高频尾段偏离 $-11/3$ 次方规律可能是由于复杂地形使传输路径上的湍流不一致。而图6(b), (c), (d)中功率谱曲线高频段尾端的平台反映的是探测白噪声的影响。噪声水平在 10^{-18} rad²到 10^{-17} rad²之间,远小于有效数据,对下面的分析没有明显影响。按测量分组统计的结果如表1所示(所有的谱形都近似到 $-11/3$ 、 $-8/3$ 和 $-5/3$ 三种情况,如 $-6/3$ 近似为 $-5/3$)。对于湍流较强的第一组数据,功率谱高频段多数是 $-11/3$ 规律,与泰勒理论符合;湍流较弱的第二、三组数据,功率谱的高频段多数呈现 $-8/3$ 规律,部分呈现 $-5/3$ 规律,这与泰勒理论不符。

Table 1. The statistic result of the measured overall tilt power spectrum shape

high frequency range shape	group 1	group 2	group 3	total
$-11/3$ law	10	1	0	11
$-8/3$ law	3	12	10	25
$-5/3$ law	1	7	4	12
total number	14	20	14	48

国内外许多文献都发现整体倾斜功率谱的高频段谱形与泰勒理论的 $-11/3$ 次方规律不完全符合。国外的Greenwood和Max等人、国内的王英俭和李新阳等人曾发现整体倾斜功率谱的高频段按较缓慢的 $-8/3$ 次方规律变化^[5-10]。Kibblewhite等人对天文观察数据分析的结果发现整体倾斜的高频段功率谱按更缓慢的 -2 次方规律变化^[11]。这些实验结果是分别在不同的实验地点、不同的实验系统上得到的。而本文是在同一实验地点、在同一个实验系统上较完整地观察到了功率谱高频段谱形的这种分化现象。这得益于本测量系统高达上千赫兹的动态范围,克服了国内外同类实验动态范围低的缺点。

对于整体倾斜功率谱高频段谱形的分化现象目前还没有很好的理论解释。Kibblewhite认为不能据此就把这种湍流认为是非科尔莫戈罗夫湍流,因为可能还有其他的原因造成这种

现象^[11]。对自适应光学系统的研究来说,更重要的是如何根据大气湍流的波前扰动特性确定自适应光学系统需要的参数。例如,希望根据整体倾斜像差的功率谱确定校正这种湍流需要的倾斜镜控制带宽大小。

3.3 倾斜镜需要的控制带宽和大气湍流泰勒频率的实验测量结果

利用2.2节讨论的方法,可以方便地从整体倾斜像差的功率谱数据中确定出倾斜镜需要的控制带宽大小和大气湍流的泰勒频率。对于图6的4个不同谱形的典型整体倾斜功率谱数据,分别计算了他们的控制带宽与校正残余方差的关系,如图7所示。按照 $\sigma_0^2 = (1/16)(\lambda/D)^2$ 的校正要求,可以确定出每个数据需要的控制带宽大小和泰勒频率。从图7中还可以看出如果按照 $\sigma_0^2 = (\lambda/D)^2$ 的标准,将无法准确确定出湍流较弱数据的泰勒频率。用这种方法计算了湍流最强的第一组14个测量数据的泰勒频率,其统计分布如图8所示,平均4.6 Hz,最高12 Hz。根据实际工作中倾斜镜的有效控制带宽为四倍泰勒频率的要求可知,在本实验的大气湍流条件下,自适应光学系统倾斜镜的有效控制带宽有40~50 Hz就足够了。

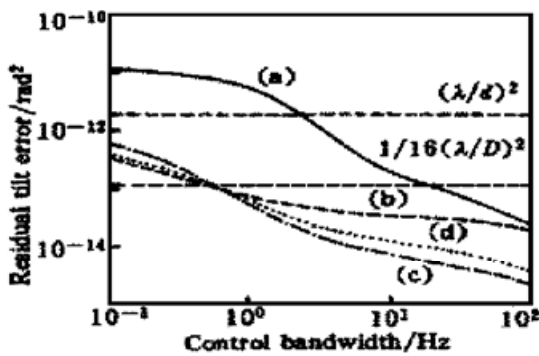


Fig. 7 The relationship between control bandwidth and residual tilt error using measured tilt power spectrum. Data as same as in Fig. 6

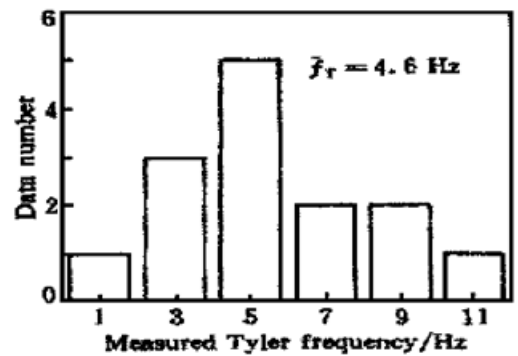


Fig. 8 The statistic result of the measured Tyler frequency of group 1

结 论 在不同的大气湍流条件下,利用61单元自适应光学系统的哈特曼波前传感器,测量了实际水平大气湍流畸变波前中整体倾斜像差的时间功率谱。实验结果显示波前整体倾斜的功率谱低频段符合科尔莫戈罗夫湍流理论预测的 $-2/3$ 次方规律,但高频段的谱形除了有科尔莫戈罗夫湍流理论预测的 $-11/3$ 次方规律外,还呈现 $-8/3$ 次方和 $-5/3$ 次方的规律。

本文提出了一种用整体倾斜功率谱估计大气湍流泰勒频率指标的方法,这种方法只需要知道整体倾斜像差的时间功率谱,不需要知道大气湍流的折射率结构常数和横向风速等特征参数,在实际工作中应用方便。本文用这种方法估测了水平1 km 大气传输实验中倾斜镜需要的控制带宽大小和大气湍流的泰勒频率。并将这种方法成功地应用在61单元自适应光学系统的外场实验中,方便地根据大气湍流强度等的变化及时调整倾斜镜的控制带宽,使系统主动适应环境的变化,提高了校正效果。

感谢中国科学院安徽光机所龚知本、吴毅、王英俭、汪超等老师在实验工作中给予的支持和帮助。

参 考 文 献

- [1] Tyson R K, Martinsen E A, Wirth A. *Principles of Adaptive Optics*. San Diego: Academic Press Inc., 1991
- [2] Levine B M, Martinsen E A, Wirth A *et al.*. Horizontal line of sight turbulence over near ground paths and implications for adaptive optics corrections in laser communications. *Proc. SPIE*, 1997, **3125** ·354~ 365
- [3] Tyler G A. Bandwidth considerations for tracking through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1) ·358~ 367
- [4] Greenwood D P, Fried D L. Power spectra requirements in adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1976, **66**(3) ·193~ 206
- [5] Greenwood D P, Primmerman C A, Murphy D V *et al.*. Measurements of atmospheric phase and tilt, and comparison with theory. Proceeding of the ESO conference on very large telescopes and their instrumentation. *Garching, Germany*, 1988. 675~ 682
- [6] McGaughey D R, Aitken G J M. Temporal analysis of stellar wave-front-tilt data. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1997, **14**(8) ·1967~ 1974
- [7] Max C E, Avicda K, Brase J M *et al.*. Design, layout, and early results of a feasibility experiment for sodium-layer laser-guide-star adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1994, **11**(2) ·813~ 824
- [8] 李新阳, 姜文汉, 王春红等. 自适应光学系统控制效果分析的功率谱方法. *强激光与粒子束*, 1998, **10**(1) ·6~ 10
- [9] 王英俭, 吴毅, 汪超等. 激光实际大气传输湍流效应相位校正一些实验结果. *量子电子学报*, 1998, **15**(2) ·164~ 168
- [10] 姜文汉, 王春红, 凌宁等. 61单元自适应光学系统. *量子电子学报*, 1998, **15**(2) ·193~ 199
- [11] Kibblewhite E J, Chun M R. Design of tip-tilt and adaptive optics servos using measured angle of arrival and phase power spectrum. *Proc. SPIE*, 1998, **3353** ·522~ 530

Power Spectra Analysis of the Disturbed Wavefront in Laser Beam Horizontal Atmospheric Propagation I: Wavefront Overall Tilt and Tyler Frequency

Li Xinyang Jiang Wenhan Wang Chunhong Xian Hao Wu Xubing

(The Key Laboratory of the Atmospheric Optics of National High Technology,
Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

(Received 8 February 1999; revised 31 March 1999)

Abstract By using the Hartmann-Shack wavefront sensor of an adaptive optical system, power spectra density (PSD) of the atmosphere disturbed wavefront overall tilt was measured and analyzed. It is shown that the measured PSDs are different from the theoretic results of Kolmogorov turbulence given by Tyler. A method of calculating the Tyler frequency and the required control bandwidth of the fast steering mirror of an adaptive optical system from measured overall tilt PSDs was discussed too.

Key words adaptive optics, atmospheric turbulence, power spectra density, wavefront overall tilt, Tyler frequency.