

# 微正方形角锥棱镜定向反射特性\*

袁景和

(南开大学现代光学研究所, 天津 300071)

陈波 曾红军 杜春雷

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

**摘 要** 对微正方形角锥棱镜阵列定向反射器的特性进行了理论研究和模拟。证明了其定向反射特性, 并利用几何光学方法解决了全反射条件对入射孔径角的限制, 以及单元有效反射面积对定向反射率的影响问题, 同时也给出了阵列器件表面反射对定向反射率的影响。为了便于比较, 也给出了微三角形角锥棱镜阵列定向反射器的单元反射面积。所得结果为微正方形角锥棱镜阵列定向反射器的制作提供了理论依据。

**关键词** 定向反射, 正方形角锥棱镜, 微正方形角锥棱镜阵列。

## 1 引 言

如图 1 所示, 根据反射光线方向的不同, 主要有三种反射: 镜面反射[图 1(a)]、漫反射[图 1(b)]、定向反射[图 1(c)]。

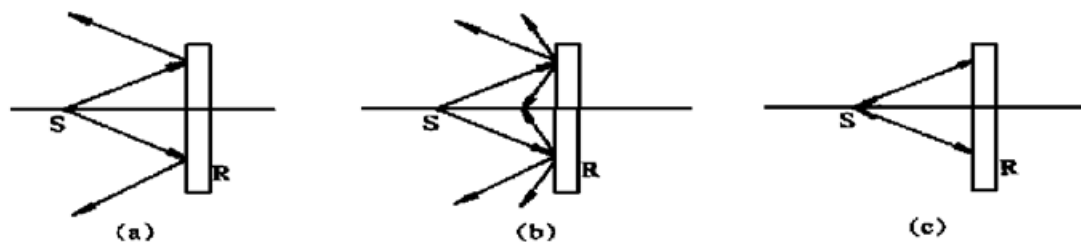


Fig. 1 Three types of reflection

定向反射器在公路交通、激光测距、光学器件以及文化娱乐中具有非常广泛的用途<sup>[1]</sup>。定向反射可以应用全反射角锥棱镜来实现, 全反射角锥棱镜主要有两种: 第一种三个全反射面为两两相互垂直的等腰直角三角形, 第二种的三个全反射面为两两相互垂直的正方形。作者称第二种全反射角锥棱镜为正方形角锥棱镜。微正方形角锥棱镜阵列定向反射器可看作棱镜单元按周期排列的光栅结构, 每个单元就是一个周期, 因而棱镜单元的结构和定向反射特性对定向反射将有很大影响。本文首先从几何光学角度研究了棱镜单元内全反射条件对入

\* 中国科学院光电技术研究所微细加工国家重点实验室资助项目。

收稿日期: 1998-09-25; 收到修改稿日期: 1999-07-12

射角的限制及单元有效反射面积, 然后利用菲涅耳公式计算了单元表面反射对定向反射的影响。同时将与第一种角锥棱镜列阵结构的有关特性作了比较。

### 2 微正方形角锥棱镜阵列的结构

微正方形角锥棱镜阵列是由连续排列的微正方形角锥棱镜组成, 图 2(a) 示出了其正面和沿双点划线的侧面图, 箭头表示入射光线, 阴影部分表示角锥棱镜材料, 背部为空气层。

以阵列的入射表面为  $yz$  平面, 其法线方向为  $x$  轴, 建立  $O-xyz$  坐标系。同时为了研究方便, 以棱锥的顶点为原点、以三条棱边为坐标轴建立局域坐标系  $O_0-x_0y_0z_0$ 。为了便于比较, 图 2(b) 示出了第一种角锥棱镜列阵的正向和沿双点划线的侧面结构图。

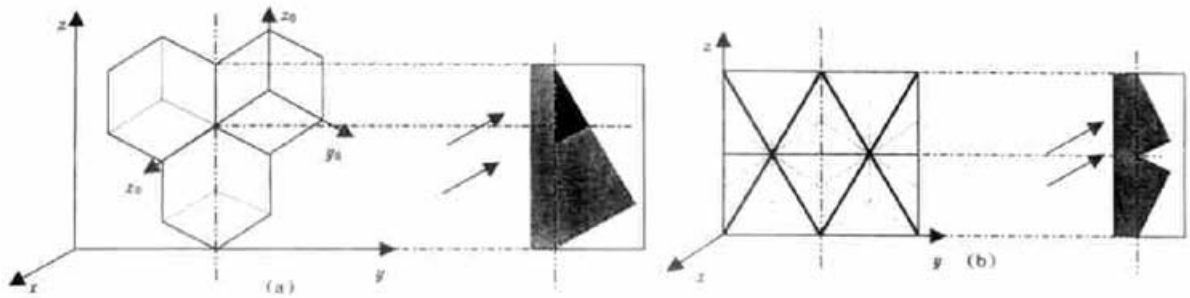


Fig. 2 The structure of the two types of prism array

(a) The structure of the micro-square-prism array; (b) The structure of the micro-triangle-prism array

### 3 单元内光线的传播特性

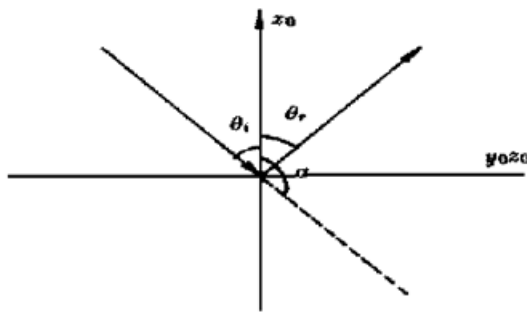


Fig. 3 Illustration of retro-reflection

设折射后进入棱镜单元内的光线在坐标系  $O_0-x_0y_0z_0$  中的方向余弦为  $l'_0, m'_0, k'_0$ , 如图 3 所示, 那么  $l'_0 = \cos \alpha$ , 当光线被棱面  $x_0 = 0$  反射后, 反射光线的方向余弦为  $l'_1, m'_1, k'_1$ , 显然有  $l'_1 = \cos \theta_r, m'_1 = m'_0, k'_1 = k'_0$ , 则由反射定律可知  $\theta_r = \pi - \alpha$ , 从而有  $l'_1 = -l'_0$ 。当光线分别被棱面  $y_0 = 0, z_0 = 0$  反射后, 将分别有  $m'_1 = -m'_0, k'_1 = -k'_0$ 。这样, 光线经三个反射面反射后传播方向将完全倒转, 这就是“回光”现象, 称之为定向反射。

### 4 全反射条件

角锥棱镜定向反射器是利用全反射原理来实现的, 全反射临界角将对入射孔径角有一定限制, 下面研究这个问题。

图 4 中  $A, B, C$  三点在  $yz$  平面内。设入射光线在  $O-xyz$  坐标系中方向向量  $A = \begin{bmatrix} l \\ m \\ k \end{bmatrix}$ , 转

换到  $O_0-x_0y_0z_0$  坐标系后为  $A_0 = \begin{bmatrix} l_0 \\ m_0 \\ k_0 \end{bmatrix}$ , 其转换矩阵为  $T = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$ ,

入射平面  $ABC$  的法向量  $N = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$ , 光线入射到平面  $ABC$  后

发生折射。设折射光线方向向量为  $A'_0 = \begin{pmatrix} l'_0 \\ m'_0 \\ k'_0 \end{pmatrix}$ , 则有

$$A_0 = TA, \tag{1}$$

$$A'_0 = \frac{n}{n'} [A_0 - (A_0 \cdot N)N] - N \sqrt{1 - \left[ \frac{n}{n'} \right]^2 + \left[ \frac{n}{n'} \right]^2 (A_0 \cdot N)^2}, \tag{2}$$

其中  $n, n'$  分别表示外界和棱镜材料的折射率, 式(2)取自文献[2]。

设棱镜对外界发生全反射的临界角为  $\theta_c$ , 于是有全反射条件

$$\begin{cases} |l'_0| \leq \cos\theta_c, \\ |m'_0| \leq \cos\theta_c, \\ |k'_0| \leq \cos\theta_c. \end{cases} \tag{3}$$

利用公式<sup>[2]</sup>

$$A_0 = \frac{n'}{n} [A'_0 - (A'_0 \cdot N)N] - N \sqrt{1 - \left[ \frac{n'}{n} \right]^2 + \left[ \frac{n'}{n} \right]^2 (A'_0 \cdot N)^2}, \tag{4}$$

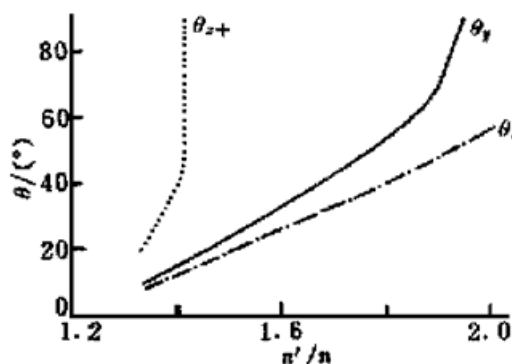


Fig. 5 The super limits to incident angles in different directions as  $n'/n = 1.33 \sim 2.00$

可求得全反射临界角对  $l_0, m_0, k_0$  的限制, 进而由

$$A = T^{-1}A_0 \tag{5}$$

求得对  $l, m, k$  的限制。

图 5 和表 1 示出了不同入射方向上入射孔径角上限随折射率的变化关系。其中,  $\theta_y$  表示入射光线垂直于  $z$  轴( $k = 0$ ) 时全反射条件限制出的最大入射角,  $\theta_{z-}$  表示入射光线垂直于  $y$  轴( $m = 0$ ) 且与  $z$  轴夹角大于  $90^\circ$  ( $k < 0$ ) 时全反射条件限制出的最大入射角,  $\theta_{z+}$  表示入射光线垂直于  $y$  轴( $m = 0$ ) 且与  $z$  轴夹角小于  $90^\circ$  ( $k > 0$ ) 时全反射条件限制出的最大入射角。表中空格表示全反射条件已经不会对入射角有所限制。

Table 1. The super limits to incident angles in different directions as  $n'/n = 1.33 \sim 2.00$

$\frac{n'}{n}$	1.33	1.40	1.45	1.50	1.55	1.59	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95	2.00
$\theta_y$	9.34	15.24	19.43	23.64	27.93	31.10	32.36	36.98	41.89	47.21	53.14	60.07	69.00		
$\theta_{z-}$	7.97	12.87	16.26	19.61	22.93	25.33	26.26	29.62	33.04	36.53	40.14	43.91	47.88	52.14	56.81
$\theta_{z+}$	18.87	39.55													

拿折射率  $n' = 1.59$  的聚碳酸酯材料为例, 在  $y$  轴方向的入射角范围可达  $62^\circ$  左右, 在  $z$  轴方向可达  $115^\circ$  左右。注意到第一种角锥棱镜列阵的排列形式, 可以得到, 对折射率  $n' = 1.59$  的材料, 其在  $y$  轴方向的入射角范围可达  $62^\circ$  左右, 在  $z$  轴方向可达  $180^\circ$  左右。

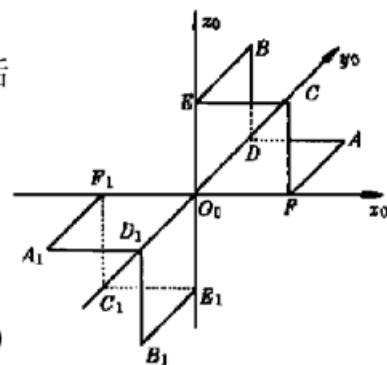


Fig. 4 The structure of a unit

### 5 定向反射的有效面积

不同的入射角，在棱锥单元底面上将只有不同的范围能实现定向反射，从而不同的入射角有不同的能量定向反射率。下面给出这个范围的求法，并给予简单证明。

图 4 所示，根据折射光线方向可以把入射光线分成三种类型：

1)  $l'_0$ 、 $m'_0$ 、 $k'_0$  中有两个为 0，即折射光线平行于  $O_0D$ 、 $O_0E$ 、 $O_0F$  中某一棱边，这种光线可实现定向反射。

2)  $l'_0$ 、 $m'_0$ 、 $k'_0$  中一个为 0，即折射光线垂直于  $O_0D$ 、 $O_0E$ 、 $O_0F$  中某一棱边，这种光线也能实现定向反射。

上述两种光线只限于几个固定方向，且第一种不能利用全反射，实际意义不大，不予讨论。

3)  $l'_0$ 、 $m'_0$ 、 $k'_0$  皆满足(3) 式条件，沿该方向入射到底面  $ABC$  上的光只有在局部区域内才能经三个棱面反射实现定向反射，该范围求法如下：设在棱镜内过棱镜顶点  $O_0$  和点  $D$ 、 $E$ 、 $F$  的四束平行折射光分别与入射平面  $ABC$  交于  $Q$ 、 $D'$ 、 $E'$ 、 $F'$ ，则  $A$ 、 $D'$ 、 $B$ 、 $E'$ 、 $C$ 、 $F'$  构成六边形。以  $Q$  为中心，在入射平面上分别作  $A$ 、 $D'$ 、 $B$ 、 $E'$ 、 $C$ 、 $F'$  的对称点  $A''$ 、 $D''$ 、 $B''$ 、 $E''$ 、 $C''$ 、 $F''$ ，则六边形  $AD'BE'CF'$  和六边形  $A''D''B''E''C''F''$  的相交区域即为有效反射面积(图 6 所示，图中  $C$ 、 $C''$ 、 $E''$ 、 $F''$  没有给出)。

这个问题可如下证明：图 4 中， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  六点经三个反射面反射后分别成虚像  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ 、 $D_1$ 、 $E_1$ 、 $F_1$ ，则经过  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  六点的平行折射光线经三个全反射棱面反射后，反射光线可认为分别由  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ 、 $D_1$ 、 $E_1$ 、 $F_1$  发出并沿相反方向行进，这六束反射光线与入射平面  $ABC$  的交点分别为  $A''$ 、 $B''$ 、 $C''$ 、 $D''$ 、 $E''$ 、 $F''$ ，因而有效反射面积为两六边形的重叠区域。

表 2 和图 7 示出了单元有效反射面积占总入射面积的比率随入射角的变化关系。

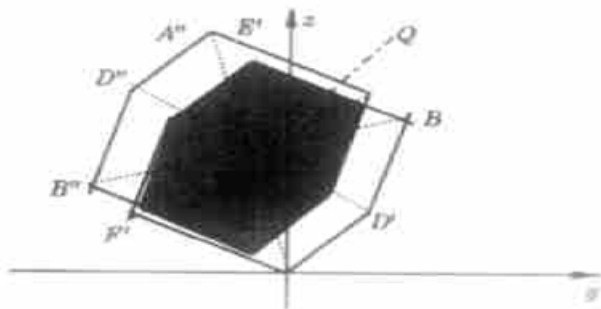


Fig. 6 The method to calculate the retroreflective available area

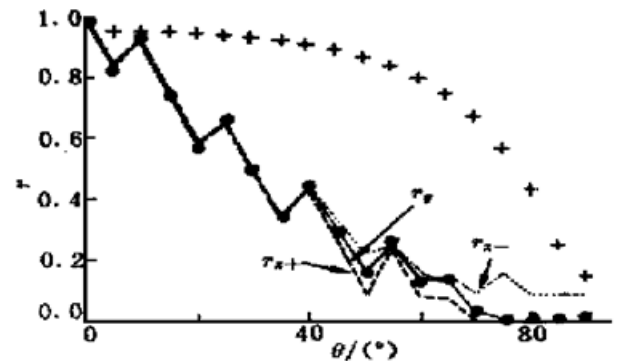


Fig. 7 For the micro-square-prism array retro-reflector, the ratio of the available area to the whole incident area versus the incidence angle

Table 2. The ratio of the available area to the whole incident area versus the incidence

$\theta/(^\circ)$	0.00	5.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00
$r_y$	1.00	0.83	0.91	0.74	0.58	0.65	0.49	0.35	0.43
$r_{z-}$	1.00	0.83	0.92	0.75	0.58	0.66	0.49	0.34	0.45
$r_{z+}$	1.00	0.83	0.92	0.75	0.58	0.67	0.50	0.34	0.42
$\theta/(^\circ)$	45.00	50.00	55.00	60.00	65.00	70.00	75.00	80.00	85.00
$r_y$	0.29	0.17	0.25	0.13	0.13	0.03	0.00	0.00	0.00
$r_{z-}$	0.32	0.22	0.25	0.15	0.15	0.09	0.16	0.09	0.09
$r_{z+}$	0.26	0.09	0.23	0.08	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00

图 7 中,  $r_y$  表示当入射光线垂直于  $z$  轴( $k=0$ ) 时单元有效反射面积占总入射面积的比率,  $r_{z-}$  表示当入射光线垂直于  $y$  轴( $m=0$ ), 与  $z$  轴夹角大于  $90^\circ$ ( $k<0$ ) 时单元有效反射面积占总入射面积的比率,  $r_{z+}$  表示当入射光线垂直于  $y$  轴( $m=0$ ), 与  $z$  轴夹角小于  $90^\circ$ ( $k>0$ ) 时单元有效反射面积占总入射面积的比率。

图 7 可以看出, 当入射角小于  $50^\circ$  时, 单元有效反射面积占总入射面积的比率仍可大于 25%, 而且在三个入射方向没有很大差别。

用同样的处理方法, 得到第一种角锥棱镜列阵的单元有效反射面积占总面积的比随入射角的变化曲线示于图 8<sup>[1]</sup>。比较图 7 和图 8 可以看出, 当入射角逐渐增大时, 第一种角锥棱镜列阵定向反射器单元有效反射面积下降较慢; 在正入射附近, 第二种角锥棱镜列阵定向反射器的单元有效反射面积占总入射面积的比率更大。

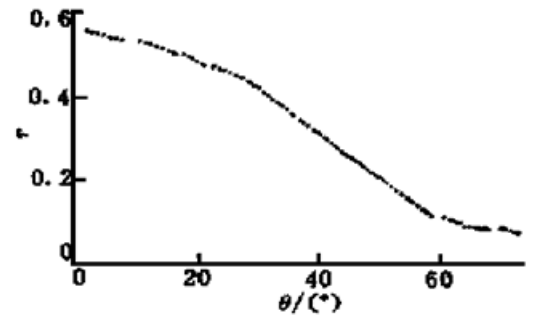


Fig. 8 For the first type of retro-reflector, the ratio of the available area to the whole incident area versus the incidence

## 6 微正方形角锥棱镜的能量反射特性

入射光照射于角锥棱镜底面(即“入射平面”)上将发生反射和折射, 再由三个棱面全反射后经底面出射时又发生一次反射和折射, 最后出射能量只是入射能量的透射部分。利用菲涅耳公式<sup>[3]</sup>, 计算出折射率为 1.59 的聚碳酸酯材料对自然光定向反射的光强反射率随入射角的变化关系如图 7 的“4”曲线所示, 从图中可以看出, 在入射角小于  $50^\circ$  时有近 90% 的光强定向反射率, 入射角大于  $50^\circ$  时, 光强反射率明显下降, 但在  $80^\circ$  时仍有 36% 的光强反射率。

**结 论** 综合上面的分析可以看出:

1) 微正方形角锥棱镜阵列定向反射器的定向反射率应为图 7 中“4”曲线分别与其它三条曲线的乘积。在正入射情况下, 其定向反射率可达 90%。随入射角的增大, 定向反射率逐渐减小, 但在  $50^\circ$  时仍有 20% 左右的定向反射率。

2) 微正方形角锥棱镜阵列定向反射器有比较大的入射角允许范围, 对于  $n'=1.59$  的材料,  $y$  轴方向的入射角允许范围可达  $62^\circ$  左右。在要求不低于 37% 的光强反射率时,  $z$  轴方向的入射角允许范围可达  $65^\circ$  左右; 在要求不低于 20% 的光强反射率时,  $z$  轴方向的入射角允许范围可达  $80^\circ$  左右。

3) 对入射角的限制,  $y$  轴方向和逆  $z$  轴方向( $k<0$ ) 主要来自全反射条件, 即折射率的限制; 顺  $z$  轴方向( $k\geq 0$ ) 主要来自几何形状的限制。由于几何形状不可变, 在一定反射率要求下, 增大  $n'/n$  的值即可增大入射孔径角。

4) 通过与第一种角锥棱镜列阵定向反射器的比较可以看出, 在正入射附近, 微正方形角锥棱镜阵列定向反射器的定向反射率较大, 但在大角入射时, 特别是在接近掠入射时, 第一种角锥棱镜列阵定向反射器的定向反射率较大。

上面的讨论仅是从几何光学角度考虑的, 由于单元尺寸是有限的, 必然会引入衍射效应, 这将不可避免地降低定向反射的光强反射率。当单元尺寸很小(如小于  $10\lambda$ ) 时, 衍射效应将非常明显。

## 参 考 文 献

- [1] 袁景和, 陈 波, 曾红军等. 微棱镜阵列型定向反射器特性. 光子学报, 1998, 27(11): 1023~ 1027  
[2] 连铜淑. 棱镜调整. 北京: 国防工业出版社, 1978. 19  
[3] 玻恩 M, 沃耳夫 E. 光学原理. 杨葭荪等译. 北京: 科学出版社, 1978. 61~ 71

**Retro-Reflective Properties of a Micro-Square-Prism**

Yuan Jinghe

*(Institute of Modern Optics, Nankai University, Tianjin 300071)*

Chen Bo      Zeng Hongjun      Du Chunlei

*(Institute of Optics & Electronics, Chinese Academy of Science, Chengdu 610209)*

(Received 25 September 1998; revised 12 July 1999)

**Abstract** The properties of the micro-square-prism array are studied theoretically. Its retro-reflective properties are demonstrated. By using the method of geometrical optics, the limit of the total reflection to the incidence and the influence of the available reflective area on the retro-reflectivity are studied. The effect of surface reflection of the array on retro-reflectivity is presented. For contrast, the properties of the micro-triangle-prism array is given as well. The result obtained is a theoretical foundation for designing and manufacturing the micro-square-prism retro-reflector.

**Key words** retro-reflection, square-prism, micro-square-prism array.