

离子阱中量子受控非门的操作误差的分析与提纯*

冯 芒 朱熙文 方细明 高克林 施 磊

(中国科学院武汉物理与数学研究所, 波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要 处理了离子阱中量子受控非门的操作出错问题。通过增加一次投影测量, 可以对输出结果作有效的提纯, 使误差减至一阶小量, 在某些情况下甚至能减小到二阶小量。对本方案的局限性进行了讨论。

关键词 操作误差, 受控非门, 离子阱, 投影测量。

1 引 言

量子计算是近年来科学前沿的一个热门课题^[1]。由于其信息的存储、传输与处理是在原子层次上按照量子力学的原理来进行, 它能真正模拟一个量子系统的演化^[2]; 能用较短的程序和在较短的时间内迅速地分解一个大数^[3]; 还能很快地从杂乱无章的千万个数据中搜索到一个符合要求的数据^[4]; 另外, 它对所输入的量子叠加和纠缠态能进行量子并行计算^[5], 这能使计算效率获得最大限度的提高。它的某些功能是目前使用的计算机所难以完成的。

近年来, 对于如何实现量子计算, 人们已提出了不少方案, 如利用腔量子电动力学技术^[6]、光子的偏振^[7]、自旋体系的双共振^[8]、半导体中的量子点^[9]以及多路脉冲磁共振技术^[10]等等。已有人证明, 任何一个量子运算都可以由一系列的量子受控非门和对单个量子位的旋转的组合来完成。因此, 问题的关键便是如何实现量子受控非门。最近, Cirac 和 Zoller 提出了一个新颖别致且容易实现的方法, 即利用离子阱技术来实现量子计算^[11]。他们设想将一串二能级离子囚禁在一个线性离子阱中, 限制它们作一维运动并运用边带冷却技术将它们冷却至质心振动基态。这些离子一方面在囚禁场的作用下作集体运动, 同时由于各自相距有几个波长远的距离, 又能各自独立地与激光作用。理论分析表明, 通过将激光器调节到合适的频率, 一系列的 π 脉冲和 2π 脉冲将使离子顺利完成受控非门的运算, 每个离子便是一个量子位。Monroe 等人对单个 ${}^9\text{Be}^+$ 离子所完成的实验^[12]充分表明离子阱技术完全可以应用于量子计算。

但是, 实验中存在各种不利因素会使量子计算的最终结果受到影响。如在制备量子初态时可能会出现误差, 来自外部环境的消相干效应也会使量子态的演化和储存出错。另外, 门

* 国家自然科学基金资助课题(19734060)。

收稿日期: 1998-06-23; 收到修改稿日期: 1999-03-08

操作过程中也可能由于激光脉冲的实际功率、宽度以及激光束与离子的相对位置偏离精确设定值而出错^[12]。一次操作后的误差所造成的影响可能还不太明显,但多次操作之后便会出现严重的负面效应,以致对正确的结果构成危害。因而,如何克服这些负面影响是量子计算能否顺利进行的关键。

本文着重讨论门操作出错及如何纠错的问题。不涉及环境造成的消相干效应,也不考虑制备初态过程中可能出现的误差,并假定测量是无误差的。我们以文献[11]提出的超冷离子量子受控非门为例,当门操作出错时,如何引入一个新的操作来提纯输出结果,使其中的误差减至最小。

2 误差的产生及消除

按照文献[11]的方案,每完成一次受控非门操作,实际上是进行5次么正变换。每次变换实质上是离子在某一激光束的作用下的时间演化,也称为一个脉冲过程。在实际操作过程中,误差是不可避免的。例如,对于 U 操作,可写为

$$U_n^{k,q}(\Phi) = \exp[-i(\frac{k\pi}{2} + \delta)(|e_q\rangle_n \otimes |g\rangle_n \exp(-i\Phi) + H.C)], \quad (1)$$

式中 δ 便是由于对激光脉冲的控制不准确造成的误差。其它变量的含义与文献[11]中的相同。于是,在(1)式的作用下,系统初态的演化主要有

$$\begin{aligned} |g\rangle_n |0\rangle &\rightarrow |g\rangle_n |0\rangle, \\ |g\rangle_n |1\rangle &\rightarrow \cos(\frac{k\pi}{2} + \delta) |g\rangle_n |1\rangle - i \exp(-i\Phi) \sin(\frac{k\pi}{2} + \delta) |e_q\rangle_n |0\rangle, \\ |e_q\rangle_n |0\rangle &\rightarrow \cos(\frac{k\pi}{2} + \delta) |e_q\rangle_n |0\rangle - i \exp(i\Phi) \sin(\frac{k\pi}{2} + \delta) |g\rangle_n |1\rangle, \end{aligned}$$

其中 $|0\rangle(|1\rangle)$ 代表没有(一个)声子的质心运动态。相应地, V 操作中也会由于操作的不准确而导致出错,于是

$$V_n^k(\Phi) = \exp\{-i(\frac{k\pi}{2} + \theta)(|e_0\rangle_n \otimes |g\rangle_n \exp(-i\Phi) + H.C)\}, \quad (2)$$

式中 θ 为出错误差。系统的演化为

$$\begin{aligned} |g\rangle_n &\rightarrow \cos(\frac{k\pi}{2} + \theta) |g\rangle_n - i \exp(-i\Phi) \sin(\frac{k\pi}{2} + \theta) |e_0\rangle_n, \\ |e_0\rangle_n &\rightarrow \cos(\frac{k\pi}{2} + \theta) |e_0\rangle_n - i \exp(i\Phi) \sin(\frac{k\pi}{2} + \theta) |g\rangle_n. \end{aligned}$$

为了使讨论的问题具有一般性,假定每一步么正变换中出现的误差都不一样,对应于 $C_{mn} = V_n^{1/2}(\pi/2) U_m^{1,0}(0) U_n^{2,-1}(0) U_m^{1,0}(0) V_n^{1/2}(-\pi/2)$ 的步骤,误差分别假定为 $\theta_2, \delta_3, \delta_2, \delta_1, \theta_1$ 。当完成 $U_m^{1,0}(0) U_n^{2,-1}(0) U_m^{1,0}(0)$ 操作后,则有

$$\begin{aligned} |g\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle &\rightarrow |g\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle, \\ |g\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle &\rightarrow |g\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle, \\ |e_0\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle &\rightarrow (\sin \delta_1 \sin \delta_3 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \delta_3) |e_0\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle + \\ &\quad i(\sin \delta_1 \cos \delta_3 - \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \delta_3) |g\rangle_m |g\rangle_n |1\rangle + \\ &\quad \cos \delta_1 \sin \delta_2 |g\rangle_m |e_1\rangle_n |0\rangle, \\ |e_0\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle &\rightarrow -\cos(\delta_1 + \delta_3) |e_0\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle + \end{aligned}$$

$$i \cos \delta_1 \sin \delta_3 |g\rangle_m |e_0\rangle_n |1\rangle,$$

其中 $|e_1\rangle$ 是文献[10]中引入的一个辅助态。尽管 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 的值很小, 但却导致系统的末态比初态复杂了许多。为了使结果尽可能地纯洁, 有必要对以上结果进行提纯, 去掉不需要的态。为此, 引入一个投影测量, 将以上结果投影于 $|0\rangle$ 态上, 则

$$\begin{aligned} |g\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle &\rightarrow |g\rangle_m |g\rangle_n, \\ |g\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle &\rightarrow |g\rangle_m |e_0\rangle_n, \\ |e_0\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle &\rightarrow (\sin \delta_1 \sin \delta_3 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \delta_3) |e_0\rangle_m |g\rangle_n + \\ &\quad \cos \delta_1 \sin \delta_2 |g\rangle_m |e_1\rangle_n, \\ |e_0\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle &\rightarrow -\cos(\delta_1 + \delta_3) |e_0\rangle_m |e_0\rangle_n. \end{aligned}$$

由于 V 操作只是作用在第 n 个离子的内部电子态上, 且选定的目标位和控制位仅与 $|e_0\rangle$ 、 $|g\rangle$ 有关(上式的 $|g\rangle_m |e_1\rangle_n$ 可以不予考虑), 故可以认为以上投影操作将多余的态都淘汰掉了, 只剩下需要的结果。不过, 此时输出态的强度不再是 100%, 而是与误差有关。如果将 V 操作也考虑上, 即

$$V_n^{\frac{1}{2}}(\pi/2) P(0) U_m^{1,0}(0) U_n^{2,1}(0) U_m^{1,0}(0) V_n^{\frac{1}{2}}(-\pi/2),$$

$P(0)$ 表示对 $|0\rangle$ 的投影测量, 则

$$\begin{aligned} |g\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle &\rightarrow |g\rangle_m |g\rangle_n, \\ |g\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle &\rightarrow |g\rangle_m |e_0\rangle_n, \\ |e_0\rangle_m |g\rangle_n |0\rangle &\rightarrow A |e_0\rangle_m |g\rangle_n + B |e_0\rangle_m |e_0\rangle_n, \\ |e_0\rangle_m |e_0\rangle_n |0\rangle &\rightarrow C |e_0\rangle_m |e_0\rangle_n + D |e_0\rangle_m |g\rangle_n, \end{aligned}$$

其中

$$A = \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \delta_1 \sin \delta_3 - \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos^2 \frac{\delta_2}{2} \cos \delta_1 \cos \delta_3,$$

$$B = D = \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos^2 \frac{\delta_2}{2} \cos \delta_1 \cos \delta_3,$$

$$C = \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \delta_1 \sin \delta_3 + \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos^2 \frac{\delta_2}{2} \cos \delta_1 \cos \delta_3.$$

由于 θ_1 、 θ_2 、 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 都是很小的量, 所以 $A \approx C \ll B = D$, 即 B 和 D 趋近于 1。而 A 和 C 接近 0, 所以受控非门操作的正确结果能有效地显示出来。显然, 如果 V 操作比较精确, 误差极小, 即 θ_1 和 θ_2 都趋于零, 则误差仅为二阶小量。另外, 若能使 $\theta_2 \approx -\theta_1$, 误差也将只是二阶小量。如果 $\theta_1 = \theta_2 = 0$, 且 δ_1 或 $\delta_3 = 0$ 则 $A = C = 0$ 。这时的受控非门操作是完全正确的, 不过输出强度没有 100% 而已。

3 讨 论

在 Monroe 等人完成的实验中^[12], 文献[10]的理论设想被稍作修改。因为实验是在 Paul 阱中完成的, 而在 Paul 阱中同时将两个离子冷却到运动基态目前还有困难, 所以实验中选用的是一个超冷的 ${}^9\text{Be}^+$ 离子。两个量子位由该离子的内部能态 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 以及外部运动态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 代表。该实验的基本原理同上面的理论方案并无二样, 但只需要三次激光脉冲便可完成以上的受控非门操作。随后 Monroe 等人针对文献[11]又提出了一个更为简洁的办法^[13], 利用不同跃迁的拉比(Rabi)频率的差异来控制门脉冲参数, 只需一个激光器, 即可在一个离子

上完成受控非门的操作。但是,在文献[12, 13]的方案中除了用作目标位和控制位的态之外,不存在多余的态,故上节采用的投影测量提纯法不能使用。

计算中的出错是经常遇到的事情。目前关于纠错的方案主要是针对在寄存器中如何保持一个给定的量子态^[14],以及如何纠正量子信息传输过程中消相干的影响^[15]。对于在操纵量子态的动力学过程中纠正出现的错误(即门操作纠错)则讨论得较少。Cirac等人曾提出了一个利用三次测量来有效纠正门操作中出现的一阶错误的方案^[16]。方案的主要思路是通过三次测量来完成出错判断,恢复初态和重复逻辑门操作,以及将正确的信息投影到一个理想态上去的过程。纠错之后误差仅为二阶小量。本文的方法没有这么复杂,既没有判断的步骤,也无需重建初态。不管操作中是否出了错,操作程序都是一样的,即在 C_{mn} 过程中增加一个投影操作 $P(0)$ 。如果操作是理想的,那么增加的这个 $P(0)$ 对最后结果没有任何影响。如果操作中出现了误差,则 $P(0)$ 能将许多多余的态淘汰,使操作的误差变为一个小量。由于本方案较文献[16]简单,所以在实际操作中将不仅容易实施,而且不会对门操作的速度有太大影响。当然,如果 V 操作比较精确,那么我们的方案便能达到文献[16]的效果。另外,由于门操作靠激光脉冲来完成,也可以通过控制脉冲的长短来达到纠错的目的。如在第二次操作 V 脉冲时,可有意缩短脉冲长度,使 $\theta_2 \approx -\theta_1$,于是误差也就成了二阶小量。

本文针对文献[11]的理论方案,讨论了门操作过程中偏离设定值时出现的误差。本文的核心是在 C_{mn} 过程中增加一个投影操作 $P(0)$,使 C_{mn} 的正确结果在多次操作之后仍能有效地显示出来。对于理想操作, $P(0)$ 的增加不会对最后结果产生任何负面影响。这对于实验中的实际操作是十分有用的。但对文献[12, 13]中的量子受控非门操作的误差,本文的方法不适用,需采用其它的办法。限于篇幅,我们将另文讨论这一问题。

参 考 文 献

- [1] Ekert A, Jozsa R. Quantum computation and Shor's factoring algorithm. *Rev. Mod. Phys.*, 1996, **68** (3) :733~ 754
- [2] Feynman R. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.*, 1982, **21**(6) :467~ 488
- [3] Shor P W. Algorithms for quantum computation, 35th Annual symposium on Foundation of Computer Science: Proceeding. Los Alamitos: *IEEE Computer Society Press*, 1994. 116~ 123
- [4] Grover L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79**(2) :325~ 328
Quantum computers can search arbitrary large databases by a single query. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79** (23) :4709~ 4712
- [5] Deutsch D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. London, Ser. (A)*, 1985, **400**(1818) :97~ 117
- [6] Brune M, Nussenzveig P, Schmidt-Kaler F *et al.*. From Lamb shift to light shifts. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(21) :3339~ 3342
- [7] Barenco A. A universal two-bit gate for quantum computation. *Proc. R. Soc. London, Ser. (A)*, 1995, **449**(1937) :679~ 683
- [8] Bennett C H. Quantum information and computation. *Phys. Today*, 1995, **48**(10) :24~ 30
- [9] Barenco A, Deutsch D, Ekert A *et al.*. Conditional quantum dynamics and logic gates. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **74**(20) :4083~ 4086
- [10] Gershenfeld N A, Chuang I L. Bulk spin-resonance quantum computation. *Science*, 1996, **275**(5298) :350~ 356
- [11] Cirac J I, Zoller P. Quantum computation with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **74**(20) :4091

~ 4094

- [12] Monroe C, Meekhof D M, King B E *et al.*. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(20) ·4714~ 4717
- [13] Monroe C, Leibfried D, King B E *et al.*. Simplified quantum logic with trapped ions. *Phys. Rev. (A)*, 1997, **55**(4) ·R2489~ 2491
- [14] Shor P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **52**(4) ·R2493~ 2497
- [15] van. Enk S J, Cirac J I, Zoller P. Photonic channels for quantum communication. *Science*, 1998, **279**(5402) ·205~ 208
- [16] Cirac J I, Pellizzari T, Zoller P. Enforcing coherent evolution in dissipative quantum dynamics. *Science*, 1996, **273**(5279) ·1207~ 1210

Purification and Analysis of the Error of Controlled-Not Operation in an Ion Trap

Feng Mang Zhu Xiwen Fang Ximing Gao Kelin Shi Lei

(*Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics,*

Wuhan Institute of Physics and Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071)

(Received 23 June 1998; revised 8 March 1999)

Abstract The error of the quantum controlled-not operation in an ion trap is treated. By introducing a measurement of projection, the error can be reduced to be a small quantity, or a second-order small quantity in some particular cases. The limitation of this scheme is discussed.

Key words operation error, controlled-not gate, ion trap, measurement of projection.