

玻色爱因斯坦凝聚体一维轴向干涉中的非线性现象*

洪 涛 霍芸生 王育竹

(中国科学院上海光学精密机械研究所量子光学开放实验室, 上海 201800)

摘 要 利用含时的 Gross-Pitaevskii 方程, 研究了轴对称的高密度玻色爱因斯坦凝聚体在干涉过程中因原子间相互作用而产生的非线性现象。发现玻色爱因斯坦凝聚体的一维轴向干涉条纹的密度分布是一种驻波状结构。通过原子波之间非线性耦合相互作用, 这种结构可以表现为物质波光栅, 对其周期的原子波产生衍射现象。

关键词 物质波干涉, 物质波光栅, 非线性原子光学。

1 引 言

原子玻色爱因斯坦凝聚体是高度相干的原子系统, 它的很多性质非常类似于激光, 因此人们可以借用一些传统光学的概念和方法来探讨它的许多性质, 并由此提出了非线性原子光学的概念。最近, Ketterle 小组利用干涉实验证明了玻色爱因斯坦凝聚体中原子波是相干的^[1-3]。因为利用玻色爱因斯坦凝聚体的干涉现象还可以进行一些精密测量, 所以有必要对这种现象进行更为深入的研究。玻色爱因斯坦凝聚体中的原子数密度往往是很高的, 原子之间又是相互作用的^[4-9], 所以在高密度玻色凝聚体的干涉过程中有必要考虑凝聚体的非线性效应。

2 基本方程

在绝对零度下, 玻色爱因斯坦凝聚体的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 可以用含时的 Gross-Pitaevskii 方程描述^[10, 11]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi\hbar^2 a_{\text{sc}}}{m} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

这是一个非线性薛定谔方程, 其形式类似于三阶非线性光学介质中光场的波动方程。式中 m 为原子质量, a_{sc} 为原子间碰撞时处于 S 态原子的散射长度, 即 S 波的散射长度, 本文只考虑 $a_{\text{sc}} > 0$ 的情况。 $V_{\text{trap}}(\mathbf{r}, t)$ 为凝聚体的外部束缚势, 设它为轴对称, 并且可以沿轴向去掉束缚而不影响其径向分布形式。可见 $V_{\text{trap}}(\mathbf{r}, t)$ 的作用形式类似于径向折射率渐变的光纤, 而其

* 国家自然科学基金(19834060)和国家科学技术部 95-预备-34 项目资助课题。

收稿日期: 1998-11-16; 收到修改稿日期: 1998-12-28

中束缚的玻色爱因斯坦凝聚体则类似于光纤中的光脉冲。忽略凝聚体径向和轴向密度分布的非线性耦合, 这样凝聚体的运动就仅仅限制在轴向上。于是, (1) 式可以简化为一维模型,

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\eta, \xi)}{\partial \xi} = - \frac{\partial^2 \phi(\eta, \xi)}{\partial \eta^2} + V(\eta, \xi) \phi(\eta, \xi) + U_0 |\phi(\eta, \xi)|^2 \phi(\eta, \xi), \quad (2)$$

这里 $\phi(\eta, \xi) = \sqrt{a_{HO}\sigma/N} \Psi(\mathbf{r}, t)$, 它是轴向归一化的凝聚体波函数, 满足 $\int |\phi(\eta, \xi)|^2 d\eta = 1$, 其中 N 为凝聚体中原子的平均数目, σ 为凝聚体的平均径向截面。无量纲量 $\eta = z/a_{HO}$ 为轴向坐标, 其中 $a_{HO} = \sqrt{\hbar/(2m\omega_{HO})}$ 为谐振子特征长度。 $\xi = \omega_{HO}t$ 为无量纲时间, 而 ω_{HO} 为谐振子频率。 $V(\eta, \xi)|_{\xi < 0} = \eta^2/4$ 为无量纲谐振子势, $\xi \geq 0$ 时, 它将被去掉, 所以 $V(\eta, \xi)|_{\xi \geq 0} = 0$ 。无量纲量 $U_0 = 4\pi\hbar a_{sc}N/(m\omega_{HO}a_{HO}\sigma)$ 为非线性耦合系数。(2) 式在形式上类似于自散焦介质光纤中光脉冲的传播方程。

3 物质波光栅衍射原子波的数值模拟

参考实验数据, 取 $U_0 = 1.8 \times 10^4$ ^[3-6]。利用文献[7] 中的方法就可求得玻色爱因斯坦凝聚体的定态波函数。然后, 让凝聚体在 $V(\eta, \xi)|_{\xi \geq 0} = 0$ 的情况下自由膨胀。因为玻色凝聚体的运动遵循 Gross-Pitaevski 方程(2), 根据文献[12], 采用分步傅里叶变换法来模拟这一动力学过程。

为模拟凝聚体的干涉过程, 假设在轴向上有多个凝聚体呈周期性分布, 每个凝聚体的轴向宽度是 $\eta_{FWHM} = 50$, 近邻凝聚体的间距是 $\eta_0 = 336$ 。因为每个凝聚体都有各自的相位, 所以在充分长时间的膨胀之后, 近邻的凝聚体将交叠和干涉, 如图 1 所示。Ketterle 小组已经在干涉实验中观察到了类似现象^[1]。在膨胀过程中凝聚体产生的原子波并不是单一动量(或称单一波长)的, 因此这种干涉不同于一般的干涉, 其干涉条纹的宽度是随时间变化的, 如图 2 所示。这是因为动量大的原子波包传播在前, 所以它们首先在两个近邻凝聚体间距的中点处交叠和干涉。由于它们的动量大、波长短, 所以这时形成的干涉条纹 A 很窄。随后, 较低动量的原子波包开始在该点产生交叠和干涉, 其干涉条纹 B 将比前者要宽。而动量大的

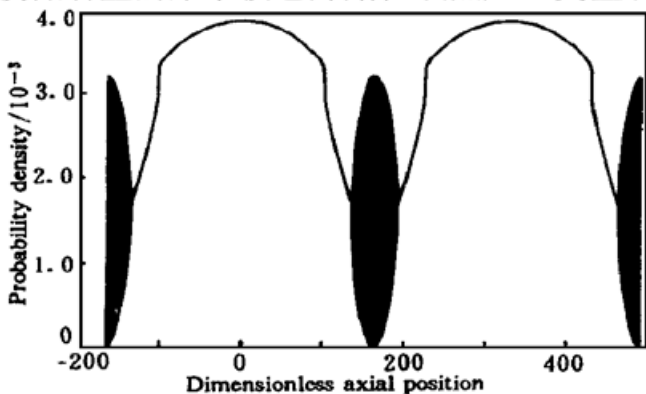


Fig. 1 Interference of periodically distributed Bose-Einstein condensates. Each dark region marks the interference region of every neighboring condensates and is composed of numerous narrow interference fringes

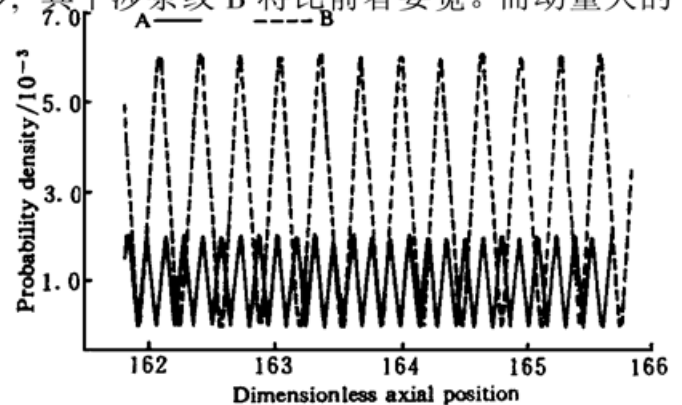


Fig. 2 Magnified interference fringes in the interference region. The solid curve A is at a time $\xi = 5$. The dash curve B is at a time $\xi = 8$

原子波包这时已经离开了中点,并在偏离中点处和那里的低动量的原子波包产生交叠和干涉。所有干涉条纹的宽度只取决于对行原子波包的相对动量差。因为对应同一时刻,两个邻近凝聚体之间所有位置上的对行原子波包,它们的相对动量差是相同的,所以虽然干涉条纹总是由不同动量的原子波包干涉而成的,但是观察到的条纹却近似是均匀的。考虑到时间的演化,就会发现条纹周期随时间是增加的,而整个干涉花样的变化就象一个伸展着的弹簧。

上面的讨论只考虑了凝聚体波函数的线性叠加情况下的干涉,完全忽略了凝聚体波函数之间的非线性耦合相互作用。然而,进一步计算表明,当凝聚体的原子数密度比较高,而且凝聚体之间交叠区域很大时,原子波之间的非线性耦合相互作用将不可忽略。在动量空间中我们观察到了因凝聚体干涉而产生的两个动量峰,如图 3 所示,它们的动量分别为 $P \approx \pm 45$ 。而在无干涉的单个凝聚体膨胀的情况下,数值模拟表明这两个动量峰是不存在的,所以可以断定它们肯定是由干涉引起的。由图 2 可知,随着时间的推移,交叠区域变得越来越大,干涉花样中原子数密度

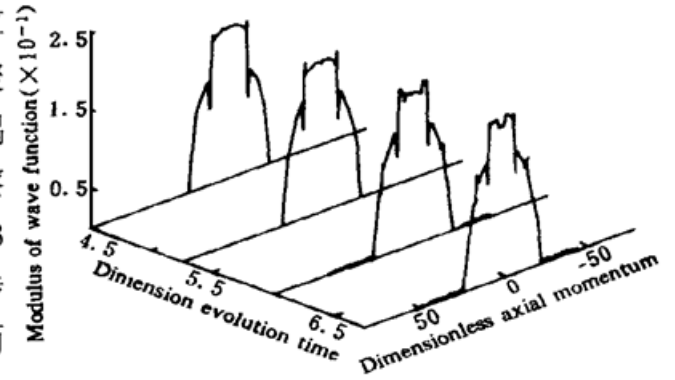


Fig. 3 The interference process in the momentum representation

也在迅速提高,这样(2)式中的非线性耦合项中将表现为一个周期势场,就象驻波光场在三阶非线性介质中形成的折射率光栅那样,它将对所在位置的原子波产生衍射作用。根据这个物理图像可以推断,衍射出来的原子波的动量应该为其原来所具有的动量与物质波光栅的倒格矢量之和。因为发生干涉的原子波基本都是动量比较大的原子波分量,所以取动量为 ± 20 左右的原子波,分不同时刻,采用对应时刻的干涉条纹的倒格矢量进行了验算。如图 3 所示,在高动量 ± 30 和低动量 ± 10 附近的动量峰高度都有所增长。这表明,这部分原子波中的一部分因衍射转移到了高动量处,另一部分转移到低动量处。另外,因为干涉条纹的周期是随时间增加的,所以由它衍射的原子波的动量必然要随时间减小。在图 3 中,可以观察到高衍射动量峰向低动量方向内移的现象,这一点也为我们的解释提供了极为有力的证据。

结 论 模拟了准一维的玻色爱因斯坦凝聚体的轴向弹性膨胀和干涉,发现干涉造成的凝聚体密度的周期性变化结构可以形成物质波光栅,并衍射出原子波。由于这个凝聚体模型被简化成了一维模型,我们认为它更适合于最近由 Rempe 及其合作者实现的凝聚体^[9]。

参 考 文 献

- [1] Andrews M R, Townsend C G, Miesner H J *et al.*. Observation of interference between two Bose condensates. *Science*, 1997, **275**(5300): 637~ 641
- [2] Hoston W, You L. Interference of two condensates. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **53**(6): 4254~ 4256
- [3] Naraschewski M, Wallis H, Schenzle A *et al.*. Interference of Bose condensates. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **54**(3): 2185~ 2196
- [4] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R *et al.*. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 1995, **269**(5221): 198~ 201
- [5] Bradley C C, Sackett C A, Tolett J J *et al.*. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(9): 1687~ 1690

- [6] Bradley C C, Sackett C A, Hulet R G. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**(6) : 985~ 989
- [7] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R *et al.*. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(22) : 3969~ 3973
- [8] Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J *et al.*. Bose-Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**(3) : 416~ 419
- [9] Ernst U, Marte A, Schreck F *et al.*. Bose-Einstein condensation in a pure Ioffe-Pritchard field configuration. *Europhys. Lett.*, 1998, **41**(1) : 1~ 6
- [10] Ruprecht P A, Holland M J, Burnett K. Time-dependent solution of the Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **51**(6) : 4704~ 4711
- [11] Holland M, Cooper J. Expansion of a Bose-Einstein condensate in a harmonic potential. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **53**(4) : R1954~ R1957
- [12] Eguchi M, Hayata K, Koshiha M. Analysis of a nonlinear Schrödinger equation with numerical technique. *J. Appl. Phys.*, 1992, **72**(8) : 3255~ 3275

Nonlinear Phenomena of One-Dimensional Axial Interference of Bose-Einstein Condensates

Hong Tao Huo Yunseng Wang Yuzhu

*(Laboratory for Quantum Optics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)*

(Received 16 November 1998; revised 28 December 1998)

Abstract The nonlinear phenomena of high-density cylindrical Bose-Einstein condensates caused by atomic interactions in their interference process are studied by using the time-dependent Gross-Pitaevskii equation. It is found that the density structure of one-dimensional interference fringes of Bose-Einstein condensates is in form of a standing wave. Through the nonlinear coupling interactions between atomic waves, the structure appears as the matter-wave gratings, and diffracts its surrounding atomic waves.

Key words matter-wave interference, matter-wave gratings, nonlinear atom optics.