

# 圆屏(球)和圆环菲涅耳衍射的解析表达式

王 鹏\* 徐毓光 余勤跃

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

**摘 要** 在标量衍射理论的基础上, 给出了圆屏(球)和圆环菲涅耳衍射的振幅及光强解析表达式。计算了光强分布曲线, 并将计算实例和有关资料中的实验与计算结果进行了比较。同时指出所谓无衍射光束实际上是一种菲涅耳衍射现象。

**关键词** 菲涅耳衍射, 夫朗和费衍射, 洛梅耳函数, 巴比涅原理, 无衍射光束。

## 1 引 言

我们曾根据标量衍射理论给出了圆孔菲涅耳衍射的振幅解析表达式, 并指出夫朗和费衍射和菲涅耳衍射的本质区别及两者的关系<sup>[1, 2]</sup>。本文则在此基础上推导出了圆屏(球)和圆环菲涅耳衍射的振幅解析表达式, 并按照传统的光强计算公式得出了光强解析表达式。本文也给出了计算实例, 并和有关资料中的计算及实验结果进行了比较。自从 Durnin 在 1987 年首次发现无衍射光束以来<sup>[5-8]</sup>, 无衍射光束一直是光学界讨论的热门话题之一, 我们认为, 所谓无衍射光束实际上是一种菲涅耳衍射现象, 这种光束的发现具有非常重要的现实意义和广阔的应用前景。

## 2 圆屏(球)和圆环菲涅耳衍射的振幅和光强解析表达式

### 2.1 圆屏(球)菲涅耳衍射的振幅和光强解析表达式

如图 1 所示, 一球面波经圆孔产生菲涅耳衍射的振幅解析表达式<sup>[1]</sup>为

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p = \tilde{E}_0 \exp \left[ iMN\pi \left( 1 + \frac{\rho^2}{Ma^2} \right) \right] \times \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( -i \frac{Ma}{\rho} \right)^n J_n \left( 2N\pi \frac{\rho}{a} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$\tilde{E}_0 = [A/(R+b)] \exp [ik(R+b)]$ ,  $M = (R+b)/R$ ,  $N = a^2/b\lambda$ ,  $MN$  表示菲涅耳波带数,  $A$  为距点光源单位距离处的振幅。根据贝塞尔函数  $J_n$  的母函数定义, 振幅的解析表达式也可用另一种

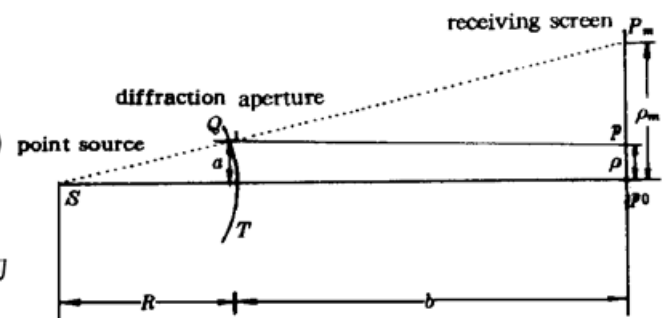


Fig. 1 Diagrammatic sketch of aperture Fresnel diffraction

\* 现在通讯地址: 中国科学院长春光学精密机械研究所应用光学国家重点实验室, 长春 130022。

收稿日期: 1998-05-31; 收到修改稿日期: 1999-04-15

形式表示

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_0 \tilde{D} \left\{ \exp \left[ iN\pi \left( 1 - \frac{1}{M} \right) \frac{\rho^2}{a^2} \right] - \exp \left[ iMN\pi \left( 1 + \frac{\rho^2}{Ma^2} \right) \right] J_0 \left( 2N\pi \frac{\rho}{a} \right) \right\}, \quad (2)$$

$D$  称为振幅衰减系数, 式中符号的含义与取值参见文献[1, 2]。按照传统的光强计算公式得

$$I_p = \tilde{E}_p \cdot \tilde{E}_p^* = D^2 I_0 \left\{ 1 - 2J_0 \left( 2N\pi \frac{\rho}{a} \right) \cos \left[ MN\pi \left( 1 + \frac{\rho^2}{Ma^2} \right) \right] + J_0^2 \left( 2N\pi \frac{\rho}{a} \right) \right\}, \quad (3)$$

(3) 式为圆孔菲涅耳衍射光强表达式的另一种形式。(2) 式和(3) 式这种表达式便于剖析圆孔菲涅耳衍射的物理本质和内涵, 但是计算起来比(1) 式复杂。为了简化计算, 文献[1] 中对  $D$  取了近似值, 文献[2] 中则给出了  $D$  的准确表达式。

由于采用标量衍射理论, 故圆屏和圆球的衍射表达式是相同的, 根据巴比涅原理, 圆屏(球) 衍射可看成自由传播(没有任何障碍物) 在接收屏产生的振幅, 减去和圆屏(球) 同样大小的圆孔衍射在接收屏上产生的振幅。将圆屏(球) 衍射振幅分为两部分: 一部分为自由传播的光束, 它到达接收屏上  $P$  点的振幅为

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{p1} &= [A/(R+b)] \exp \{-ik[R+b+\rho^2/2(R+b)]\} = \\ &\tilde{E}_0 \exp \{ik\rho^2/[2(R+b)]\} = \tilde{E}_0 \exp [iN\pi(1-1/M)(\rho^2/a^2)], \end{aligned} \quad (4)$$

另一部分则是通过半径为  $a$  的圆孔(与圆屏互补) 传播的光束, 衍射振幅为

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{p2} &= \tilde{E}_0 \exp \{iMN\pi[1+\rho^2/(Ma^2)]\} \sum_{n=1}^{\infty} (-iMa/\rho)^n J_n [2N\pi(\rho/a)] = \\ &\tilde{E}_0 B \exp \{iMN\pi[1+\rho^2/(Ma^2)] + \beta\}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $R$  为球面波半径,  $B$  与  $\beta$  分别为复数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-iMa/\rho)^n J_n(2N\pi\rho/a)$  的模与复角, 圆屏(球) 衍射后接收屏上  $P$  点的振幅则为

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_{p1} - \tilde{E}_{p2} = \tilde{E}_0 \exp(iN\pi\rho^2/a^2) \{ \exp[-iN\pi\rho^2/(Ma^2)] - B \exp[i(MN\pi + \beta)] \}, \quad (6)$$

光强为

$$I_p = \tilde{E}_p \cdot \tilde{E}_p^* = I_0 \{ 1 - 2B \cos [MN\pi(1 + \frac{\rho^2}{Ma^2}) + \beta] + B^2 \}, \quad (7)$$

上面两式分别为圆屏(球) 菲涅耳衍射振幅和光强的解析表达式。

## 2.2 圆环菲涅耳衍射的振幅和光强解析表达式

设圆环的两圆半径分别为  $a_1$  和  $a_2$  ( $a_1 > a_2$ ), 同样根据巴比涅原理得振幅解析表达式为

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_0 B_1 \exp \{ i[MN_1\pi(1 + \frac{\rho^2}{Ma_1^2}) + \beta_1] \} - \tilde{E}_0 B_2 \exp \{ i[MN_2\pi(1 + \frac{\rho^2}{Ma_2^2}) + \beta_2] \},$$

$$\text{式中 } B_1 = \left| \sum_{i=1}^{\infty} (-i \frac{Ma_1}{\rho})^n J_n(2N_1\pi \frac{\rho}{a_1}) \right|, \quad N_1 = \frac{a_1^2}{\lambda b}, \quad (8)$$

$$\text{光强解析表达式为 } B_2 = \left| \sum_{i=1}^{\infty} (-i \frac{Ma_2}{\rho})^n J_n(2N_2\pi \frac{\rho}{a_2}) \right|, \quad N_2 = \frac{a_2^2}{\lambda b}.$$

$$I_p = I_0 \{ B_1^2 - 2B_1 B_2 \cos [M\pi(N_1 + N_2) + (N_1/a_1^2 + N_2/a_2^2)\pi\rho^2 + \beta_1 + \beta_2] + B_2^2 \}. \quad (9)$$

或令

$$B \exp(i\beta) = B_1 \exp \{ i[MN_1\pi(1 + \frac{\rho^2}{Ma_1^2}) + \beta_1] \} - B_2 \exp \{ i[MN_2\pi(1 + \frac{\rho^2}{Ma_2^2}) + \beta_2] \},$$

则振幅

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_0 B \exp(i\beta), \quad (10)$$

光强

$$I_p = B^2 I_0. \quad (11)$$

### 3 计算实例

为了验证上述公式, 将其计算结果与文献中给出的实验和计算结果进行比较。图 2 为  $MN = 4$  ( $a = 0.05 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $R = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 1.1 \text{ mm}$ ) 的球面波经圆孔菲涅耳衍射的光强曲线, 其中图 2(a) 为文献[3]用数值积分法计算的光强曲线, 图 2(b) 为按本文(3)式计算的光强曲线。

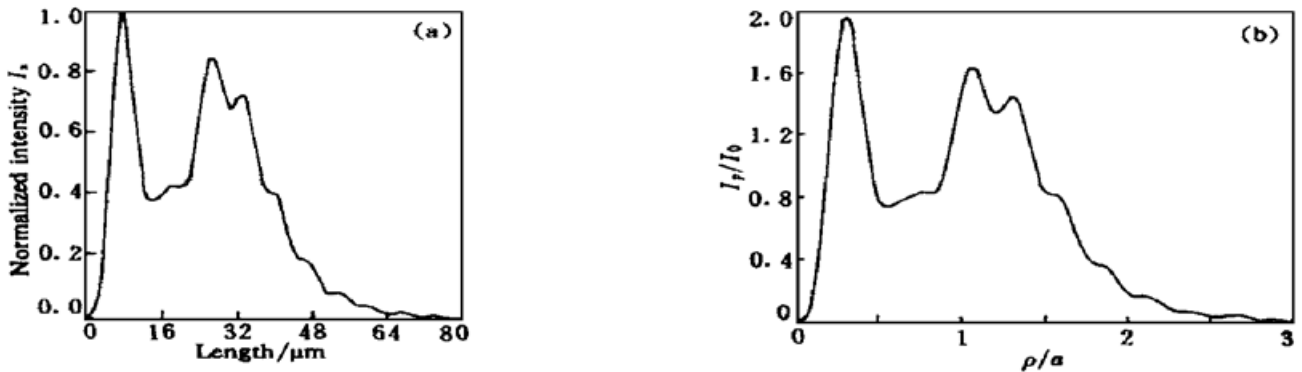


Fig. 2 Intensity distribution curves of aperture Fresnel diffraction when  $MN = 4$ . (a) Calculated with numerical integration (copy from reference [3]), (b) Calculated with Eq. (3)

图 3 为  $M = 1$ ,  $N = 3$  时, 按本文(3)式计算的平面波经圆孔衍射的光强曲线。

图 4 为  $M = 1$ ,  $N = 4.86$  ( $a = 5 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.5145 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $b = 10 \text{ m}$ ) 时平面波经圆球衍射的光强。其中图 4(a) 为文献[4]用洛梅耳函数计算的光强曲线及拍摄的干涉图, 图 4(b) 为按本文(7)式计算的光强曲线。

图 5 为  $M = 7.5$ ,  $N_1 = 0.8$ ,  $N_2 = 0.2$  ( $a_1/a_2 = 2$ ) 时, 按(11)式计算的球面波经圆环衍射的光强曲线。

图 6 为  $M = 3$ ,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 0.8$  ( $a_1/a_2 = 1.118$ ) 时, 按(11)式计算的球面波经圆环衍射的光强曲线。

应指出, 按传统公式由振幅计算光强, 只要菲涅耳数  $F_r = MN$ , 光强曲线均一样。故文中除图 2 按文献[3]给出的数据计算  $M$  和  $N$ , 图 4 按文献[4]给出的数据计算  $M$  和  $N$  外, 其它图的  $M$ 、 $N$  是作者给出的。

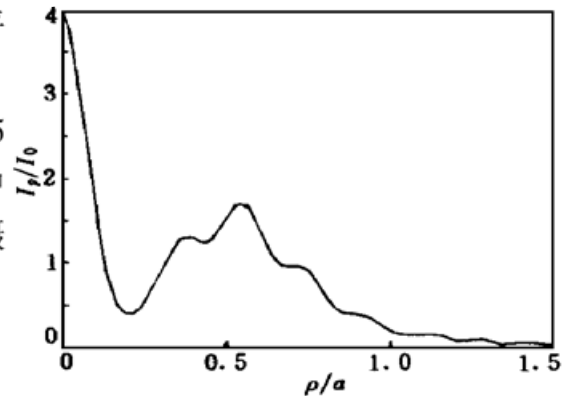


Fig. 3 Intensity distribution curve of planar wave diffracted by aperture when  $MN = 3$

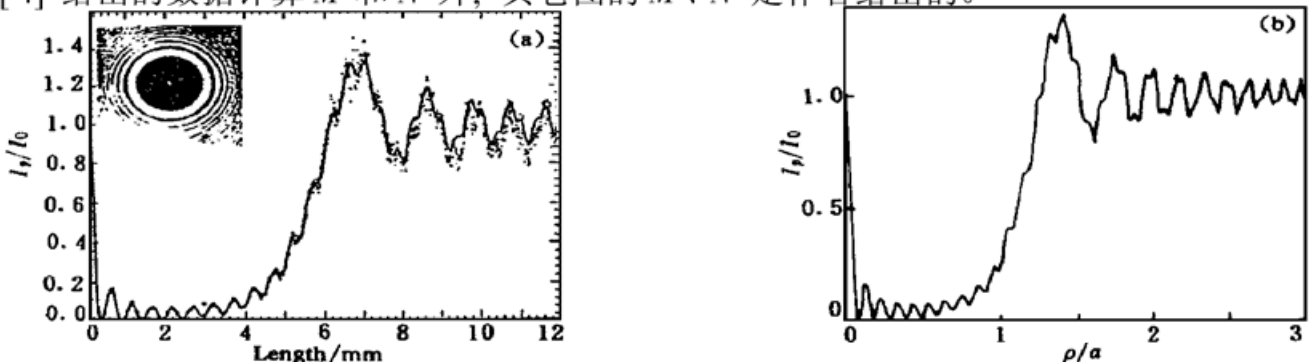


Fig. 4 (a) Diffraction pattern and intensity distribution curve calculated with Lommel function (copy from reference [4]), (b) Intensity distribution curve calculated with Eq. (7)

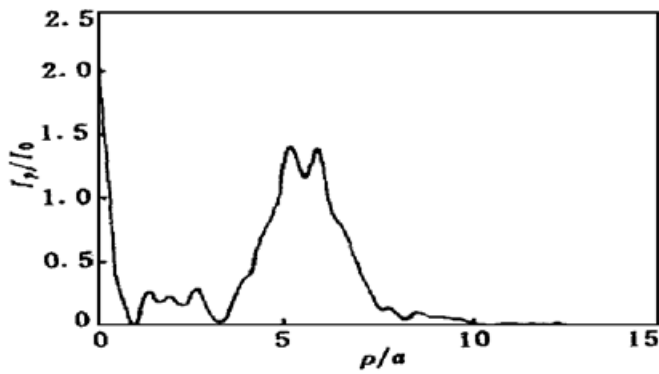


Fig. 5 Intensity distribution curve of spherical wave diffracted by annular aperture diffraction when  $M = 7.5$ ,  $N_1 = 0.8$ ,  $N_2 = 0.2$  (calculated with Eq. (11))

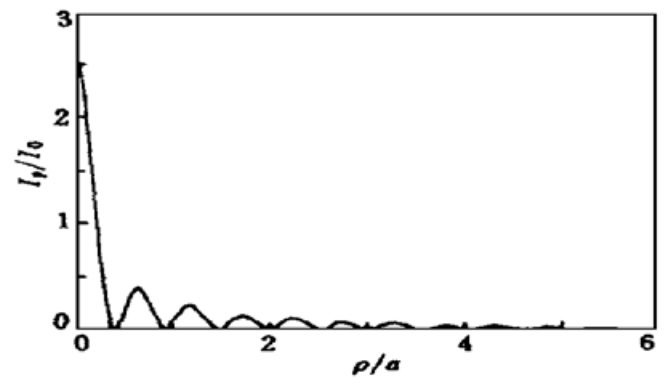


Fig. 6 Intensity distribution curve of spherical wave diffracted by annular aperture diffraction when  $M = 3$ ,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 0.8$  (calculated with Eq. (11))

#### 4 关于无衍射光束

当圆环的环宽很小时, 光强曲线很象零阶贝塞尔函数的平方(见图 6), 如果这样的话, 其振幅表达式似乎应为零阶贝塞尔函数, 其实它不是零阶贝塞尔函数。但是, 当圆环的环宽非常小时(Durnin 在文献[5]中取环宽为 0.01 mm), 圆环可视为圆形线光源, 即环上每一点均为点光源( $\delta$ 函数), 此时文献[1]中的(10)式:

$$\tilde{E}_{(\rho)} = \frac{-i}{\lambda} \tilde{E} \exp \left[ ik \left( b + \frac{\rho + 2}{2b} \right) \right] \int_0^a \exp \left( ik \frac{M}{2b} q^2 \right) q dq \int_0^{2\pi} \exp \left( ik \frac{q\rho}{b} \cos \alpha \right) d\alpha. \quad (12)$$

由于衍射孔上任一点到衍射孔的中心距离  $q = a$ , 为常量, 此积分变为线积分, 即

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(\rho)} &= \frac{-i}{\lambda} \tilde{E} \exp \left[ ik \left( b + \frac{\rho^2}{2b} + \frac{M}{2b} a^2 \right) \right] a \int_0^{2\pi} \exp \left( - ik \frac{q\rho}{b} \cos \alpha \right) d\alpha = \\ &= -i \tilde{E} \exp \left[ ik \left( b + \frac{\rho^2}{2b} + \frac{M}{2b} a^2 \right) \right] \frac{2\pi}{\lambda} a J_0 \left( 2N \pi \frac{\rho}{a} \right), \end{aligned}$$

式中

$$\tilde{E} = (a/Rb) \exp(ikR),$$

经变换得

$$\tilde{E}_{(\rho)} = -i \tilde{E}_a \exp \left[ iN \pi \left( M + \frac{\rho^2}{a^2} \right) \right] J_0 \left[ 2N \pi \left( \frac{\rho}{a} \right) \right], \quad (13)$$

式中

$$\tilde{E}_a = \tilde{E}_0 (MN \pi/a), \quad \tilde{E}_0 = [A/(R+b)] \exp[ik(R+b)].$$

光强为

$$I_p = I_a J_0^2 \left[ 2N \pi \left( \frac{\rho}{a} \right) \right], \quad (14)$$

式中

$$I_a = \tilde{E}_a \cdot \tilde{E}_a^*,$$

由(13)式和(14)式可以看出, 当圆环的环宽无限细时, 衍射振幅表达式为零阶贝塞尔函数, 光强为零阶贝塞尔函数的平方, 这是一种理想情况。实际上圆环总是有一定宽度, 宽度越小, 光强分布越接近零阶贝塞尔函数的平方。因此, 环宽比较小时只能称为准零阶贝塞尔函数光束, 即准无衍射光束。

自从 1986 年 Durnin 等<sup>[5]</sup>发表了无衍射光束的论文后, 无衍射光束成为光学界讨论的热门话题。国内外发表的论文非常多<sup>[6~22]</sup>, 围绕着无衍射光束是否真的没有衍射, 这种光束是否可以在实验室里实现, 它是否比高斯激光束更为优良等问题一直争论不休。所以如此, 主

要是因为对衍射的物理本质理解不同,特别是过去的文献没能准确指出菲涅耳衍射和夫朗和费衍射的本质区别。文献[1]解决了这个问题,并给出了圆孔菲涅耳衍射的振幅和光强计算公式,本文又给出了圆环和圆屏菲涅耳衍射的振幅和光强计算公式。

菲涅耳衍射是最为普遍的衍射现象,过去没有菲涅耳衍射的振幅和光强解析表达式,文献[1]、[2]与本文给出的公式为解决菲涅耳衍射问题提供了方便。人们往往是根据自己的理解,更多的是根据观察到的实验现象,判断干涉图样属于何种函数,从而写出振幅和光强的表达式,将其代入波动方程,等式两边相等,即认为此函数是波动方程的特解。须知波动方程是多解的,正弦、余弦函数、贝塞尔函数及厄米多项式等代入波动方程,均能使等式两端相等,这种实验物理方法往往会导致谬误。严格来讲,应采用理论物理的方法,及根据边界条件确定波动方程的解。菲涅耳-基尔霍夫衍射公式为解决这个问题提供了工具,遗憾的是过去只是利用此公式得出了夫朗和费衍射振幅和光强计算公式。菲涅耳-基尔霍夫原理在理论上是严谨的,实践中是可行的,一百多年来的实践完全证明了这一点。

我们非常赞同文献[19]的观点,对于所谓的无衍射光束,仅说明两点:

1) 无衍射光束是一种菲涅耳衍射现象,利用多种方法均可以得到这种光束。图7为我们在普通 He-Ne 激光器前加相位调制器(具有恰当波差的扩束系统)在 60 米远处拍摄到的干涉图样,在 10 米到 200 米范围内干涉图样形状基本不变。它已成功地应用在自动安平激光准直仪上。

2) 无衍射光束的发现是非常令人振奋人心的,它在工程上将得到广泛的应用。比如发出这种光束的激光准直仪,可以准确确定几何轴线,而没有调焦误差。所以无衍射光束的发展前景是非常远大的。



Fig. 7 Diffraction pattern of non-diffraction beams when  $b$  is 40 m

**结 语** 最近一些学者采用数值积分法、有限元法及洛梅耳函数等计算圆孔、圆屏(球)菲涅耳衍射的光强分布,给出了相应的光强曲线。而我们利用文献[1]及本文的解析表达式一一予以核算,结果是一致的。数值积分及有限元法计算量非常大,由于洛梅耳函数不是常用函数,计算起来很不方便,而且计算时要用不同的公式对几何阴影区和照明区分别计算。而本文给出的菲涅耳衍射的振幅和光强解析表达式中,贝塞尔函数是常用函数,一些计算机软件中均含有此函数,所以计算起来非常方便。

### 参 考 文 献

- [1] Wang Peng, Xu Yuguang, Wang Wei *et al.*. Analytic expression for Fresnel diffraction. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1998, **15**(3): 684~ 688
- [2] 王 鹏, 徐毓光, 余勤跃. 光学系统像点附近的光强空间分布. *光学学报*, 1999, **20**(2): 160~ 166
- [3] Kraus H G. Huygens-Fresnel-Kirchhoff wave-front diffraction formulation: Spherical waves. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1989, **6**(8): 1196~ 1205
- [4] Sommargren G E, Weaver H J. Diffraction of light by an opaque sphere. 1: Description and properties of the diffraction pattern. *J. Opt. Soc. Am.*, 1990, **29**(31): 4646~ 4657
- [5] Durnin J, Miceli Jr. J, Ebery J H. Diffraction free beams. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1986, **3**(13): 128

- [6] Durnin J, Miceli Jr. J, Ebery J H. Experiments with nondiffraction needles beams. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1987, **4**(13) : 230
- [7] Durnin J, Miceli Jr. J, Ebery J H. Diffraction free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(15) : 1499~1501
- [8] Durnin J. Exact solutions for non-diffraction beams. I. The scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **4**(4) : 651~ 654
- [9] Durnin J, Miceli Jr. J, Ebery J H. Comparison of Bessel and Gaussian beams. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(2) : 79~ 80
- [10] Herman R M, Wiggins T A. Production and uses of diffractionless beams. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **8**(6) : 932~ 942
- [11] Tarunen J, Vasara A, Friberg A T. Holographic generation of diffraction-free beams. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(19) : 3959~ 3962
- [12] Vasara A, Turunen J, Friberg A T. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1989, **6**(11) : 1748~ 1754
- [13] 王绍民, 林 强. Airy 光束的无衍射特性. *应用激光*, 1994, **14**(1) : 1~ 2
- [14] 王绍民.  $\cos$  光束的超衍射极限传输. *应用激光*, 1994, **14**(2) : 49~ 51
- [15] 邓锡铭. 无衍射发散光束的判据. *应用激光*, 1994, **14**(3) : 97~ 98
- [16] 王绍民. 关于衍射的本质. *应用激光*, 1994, **14**(3) : 99~ 101
- [17] 蒋志平. 关于衍射的几个问题. *应用激光*, 1994, **14**(6) : 266~ 270
- [18] 辜建辉. 关于衍射现象中边界跃变的讨论. *应用激光*, 1994, **14**(6) : 270
- [19] 吕百达. 对无衍射光束的相关概念的评注. *应用激光*, 1994, **14**(6) : 273
- [20] 林 强. 边界衍射波位相跃变的理论分析. *应用激光*, 1994, **14**(6) : 271~ 272
- [21] 吕百达等. 有限束宽无衍射光束特性的研究. *科学通报*, 1994, **39**(2) : 125~ 128
- [22] 王绍民. 零阶 Bessel 光束的存在和演示. *应用激光*, 1994, **14**(1) : 3~ 4
- [23] 梁铨廷. 物理光学. 机械工业出版社, 1987. 203

## Analytic Expression for Disk (Sphere) and Annular Aperture Fresnel Diffraction

Wang Peng      Xu Yuguang      Yu Qinyue

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 31 May 1998; revised 15 April 1999)

**Abstract** The amplitude and intensity analytic expressions for disk (sphere) and annular aperture Fresnel diffraction are given on the base of scalar diffraction theory. The intensity distribution curves are compared with the other examples and results in the references. It is pointed out that the non-diffracted beam is a kind of Fresnel diffraction phenomenon.

**Key words** Fresnel diffraction, Fraunhofer diffraction, Lommel function, Babinet principle, non-diffracted beams.