

光学系统像点附近的光强空间分布

王 鹏 徐毓光 余勤跃 王之江

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 根据准确的菲涅耳衍射振幅和光强解析表达式推导出光学系统像点附近的光强空间分布。与采用洛梅耳函数计算不同, 文中使用常用的贝塞尔函数准确地计算了光强空间分布, 从而使计算更容易、结果更直观。并对菲涅耳数这一物理概念进行了论述。

关键词 衍射, 干涉, 贝塞尔函数, 洛梅耳函数, 菲涅耳数。

1 引 言

了解焦点附近的三维(菲涅耳)光分布状态, 对于估计成像系统中接收平面的装配公差特别重要^[1]。许多文献曾论述这个问题^[2~7]。早在 1885 年, 洛梅耳就论述了一个点光源的单色像由圆孔衍射造成的离焦性质, 并为此引入了洛梅耳函数, 对照明区和几何阴影区采用不同的公式进行计算^[1], 得出的结论是基本正确的。由于对菲涅耳数这一物理概念理解的不同, 有的文献又得出不同的光强空间分布^[2]。文献[8]给出了准确的圆孔菲涅耳衍射的振幅和光强解析表达式, 对计算像点附近空间光强分布提供了方便。本文则对圆孔菲涅耳衍射振幅解析表达式的物理意义进行了论述。

2 圆孔菲涅耳衍射振幅解析表达式的物理意义

如图 1 所示, 一球面波经圆孔菲涅耳衍射后其准确振幅解析表达式为^[8]:

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_0 \exp \left[iMN\pi \left(1 + \frac{\rho^2}{Ma^2} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left(-iM \frac{a}{\rho} \right)^n J_n \left(2N\pi \frac{\rho}{a} \right), \quad (1)$$

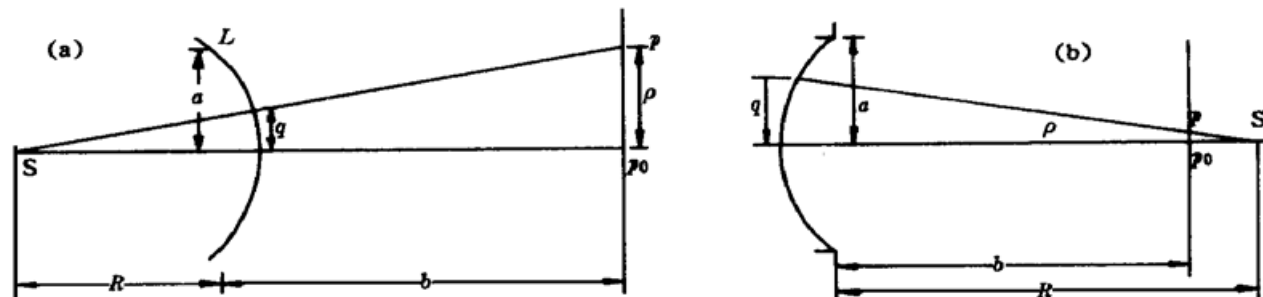


Fig. 1 (a) Divergent-wave Fresnel diffraction, (b) Convergent-wave Fresnel diffraction

式中 $\tilde{E}_0 = \frac{A}{R+b} \exp [ik(R+b)]$; $M = \frac{R+b}{R}$; $N = \frac{a^2}{\lambda b}$; A 为距点光源单位距离处的振幅;

(1) 式中 $\sum_{n=1}^{\infty} (-iM \frac{a}{\rho})^n J_n(2N\pi \frac{\rho}{a})$ 为干涉项, 与时间因子无关。它反映接收屏上任一点 p 的振幅。令

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-iM \frac{a}{\rho})^n J_n(2N\pi \frac{\rho}{a}) = B \exp(i\beta), \quad (2)$$

则

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_0 \exp [iMN\pi(1 + \frac{\rho^2}{Ma^2})] \times B \exp(i\beta). \quad (3)$$

若采用传统的光强计算公式, 则

$$I_p = \tilde{E}_p \cdot \tilde{E}_p^* = B^2 I_0. \quad (4)$$

(4) 式为利用传统光强计算公式得出的圆孔菲涅耳衍射的准确光强计算公式。

为了简化计算和剖析振幅解析表达式的物理意义, 文献[8]还给出了振幅的近似表达式:

$$\tilde{E}_p = D \tilde{E}_0 \{ \exp [iMN\pi \frac{\rho}{a} (1 - \frac{1}{M})] - \exp [iMN\pi (1 + \frac{\rho^2}{M^2 a^2})] J_0(2N\pi \frac{\rho}{a}) \}, \quad (5)$$

式中 D 为振幅衰减系数,

$$D \approx \frac{e-1}{e + \exp(\rho^2/M^2 a^2) - 2}. \quad (6)$$

应指出, D 只有在 $\rho=0$ 和 $\rho/Ma=1$ 时才是准确的, 其它点均为近似值, 但在 $MN=0.5 \sim 1.5$ 范围内近似程度是比较高的, 若要得到准确的振幅衰减系数, 令

$$\tilde{P} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-i \frac{\rho}{Ma})^n J_n(2N\pi \frac{\rho}{a})}{\sum_{n=1}^{\infty} (-i \frac{Ma}{\rho})^n J_n(2N\pi \frac{\rho}{a})} = P \exp(i\alpha), \quad (7)$$

则有

$$\tilde{D} = \frac{1}{1 + \tilde{P}} = D \exp(i\gamma). \quad (8)$$

\tilde{D} 为振幅复衰减系数, \tilde{D} 的模为

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + 2P \cos \alpha + P^2}}, \quad (9)$$

文献[8]中, 按传统光强计算公式得出的光强解析表达式为

$$I_p = D^2 I_0 \{ 1 - 2J_0(2N\pi \frac{\rho}{a}) \cos [(1 + \frac{\rho^2}{M^2 a^2}) MN\pi] + J_0^2(2N\pi \frac{\rho}{a}) \}. \quad (10)$$

若振幅衰减系数按(6)式取近似值, (10)式为光强的近似计算公式。若按(9)式取准确值时, 则和(4)式计算光强的结果完全一样, 此结果和按数值积分法计算的结果完全相同^[9]。

将(5)式整理、变化, 得

$$E_p = D \frac{A}{R+b} \exp [R+b + \frac{\rho^2}{2(R+b)}] \{ 1 - \exp [MN\pi(1 + \frac{\rho^2}{M^2 a^2})] J_0(2N\pi \frac{\rho}{a}) \}. \quad (11)$$

从上式可以明显看出, 接收屏上任一点 p 的振幅由两项构成, 一项为几何波(入射波, 即直线传播光线), 另一项为衍射波(非直线传播光线), 两者均受到振幅衰减系数 D 的调制。对于衍射波, 其振幅按零阶贝塞尔函数分布, 而其相位由两项构成:

1) $MN\pi = \frac{2\pi R+b}{\lambda} \frac{b}{2Rb} a^2$ 反映衍射孔边缘子波(边界波)对接收屏中心的作用。

2) $N\pi \frac{\rho^2}{Ma^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{M} \frac{\rho^2}{2b}$ 反映衍射孔中心子波对屏上任一点的作用。

此结论是经过严格数学推导得出,它比所谓的边界衍射波理论更准确、更完善。

3 菲涅耳数的物理意义

过去一些文献没有明确指出菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射的本质区别。只是从数量上去区分菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射^[10]。文献[8]指出:夫琅禾费衍射是菲涅耳衍射的特例,只有在平面波衍射,而接收屏位于无限远时(即 $N = 0$),和会聚球面波衍射,而当接收屏垂直光轴且通过球面波球心的平面时,即 $M = 0$ 时,才是夫琅禾费衍射。也就是说只有 $MN = 0$ 时,为夫琅禾费衍射,其余情况均为菲涅耳衍射。

一些文献,定义 $N = \frac{a^2}{\lambda b}$ 为菲涅耳数,顾名思义,表示菲涅耳波带数。但是,它只对平面波衍射适用,对于球面波衍射,具有通用意义的菲涅耳数应为

$$F_r = MN, \quad (12)$$

当平面波衍射时, $M = 1$, $F_r = N$ 。

比如一望远物镜或照相物镜,其焦平面 $M = 0$, 为夫琅禾费衍射。焦点处,菲涅耳波带数为零。这是因为对于理想光学系统,焦点位于球面波的球心上。对于焦点附近的焦前或焦后为菲涅耳衍射,这时 M 非常小,尽管 N 可能很大,菲涅耳波带数 F_r 仍很小。所以,此时只是考虑 N 是没有意义的,必须同时考虑 M 和 N 才能正确反映其衍射特性。

4 像点附近的光强空间分布

由于振幅衰减系数 D 取近似值时,当 $\rho = 0$ (光轴上的点)和 $\frac{\rho}{Ma} = 1$ (几何阴影区边界上点)仍是准确的,所以分析特殊情况仍可用。将像面上中心点光强归一化为 1,且令 $u = 2MN\pi$, $v = 2N\pi \frac{\rho}{a}$, 则(11)式变为

$$I_p = \frac{4}{u^2} D^2 \{1 - 2J_0(v) \cos [\frac{1}{2}u(1 + \frac{v^2}{u^2})] + J_0^2(v)\}, \quad (13)$$

$$D \approx \frac{e-1}{e + \exp(v^2/u^2) - 2}. \quad (14)$$

1) 成像面上, $u = 0$, 为夫琅禾费衍射

$$I_p = \left[\frac{2J_1(v)}{v} \right]^2.$$

2) 光轴上 $v = 0$, $D = 1$

$$I_p = \sin^2\left(\frac{u}{4}\right) / \left(\frac{u}{4}\right)^2.$$

3) 几何阴影区边界, $\frac{v}{u} = \frac{\rho}{Ma} = \pm 1$, $D = \frac{1}{2}$,

$$I_p = \frac{1 - 2J_0(u) \cos u + J_0^2(u)}{u^2} = \frac{1 - 2J_0(v) \cos v + J_0^2(v)}{v^2}.$$

上述结论和文献[1]结论是完全一样的。

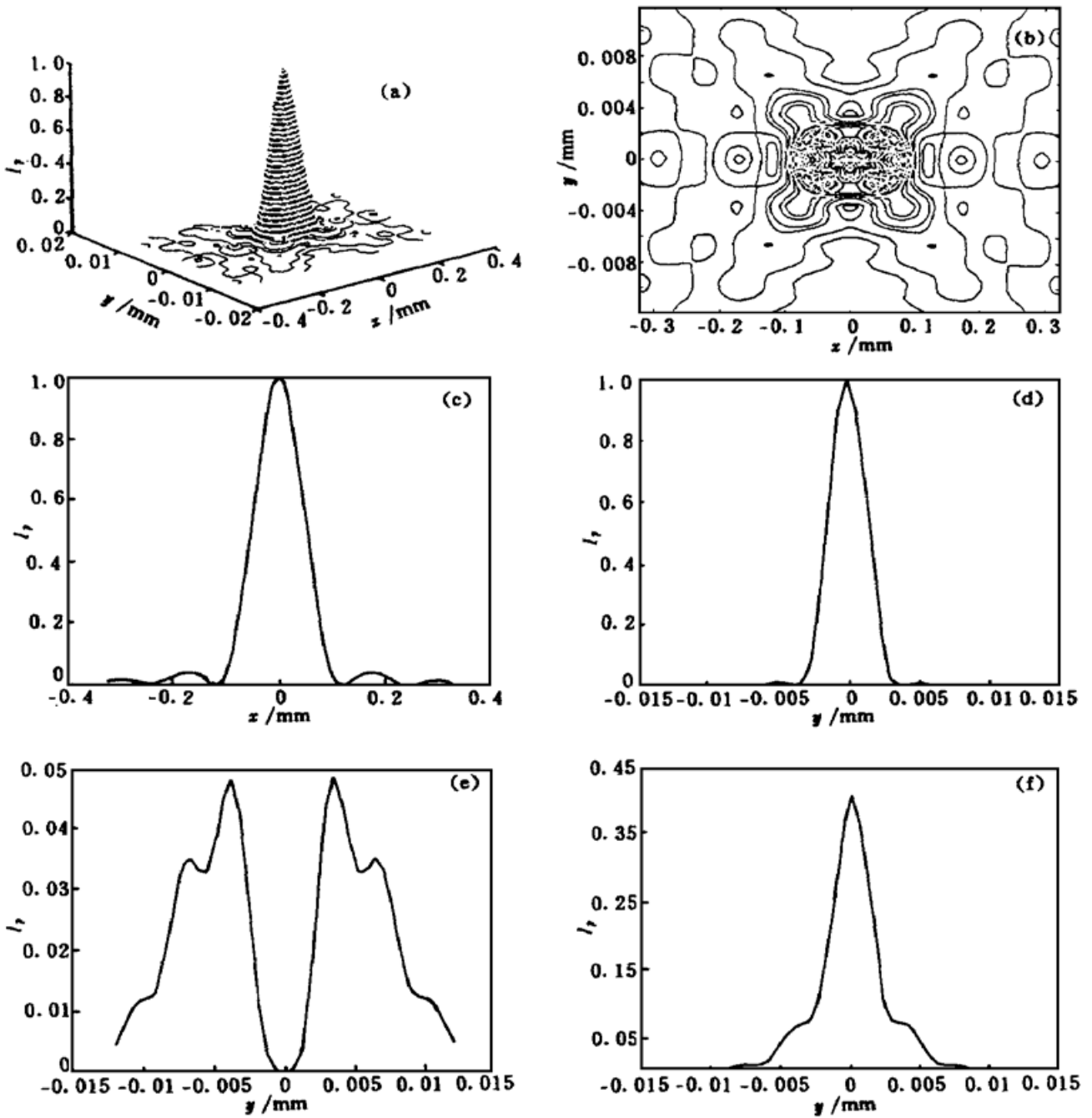


Fig. 3 Intensity distribution curve when $\lambda = 600 \text{ nm}$, $\sin u' = 0.1$; (a) Space distribution curve, (b) Distribution curve in xy plane, (c) Distribution curve along optical axis, (d) Distribution curve in image plane, (e) Distribution curve in the plane perpendicular to optical axis when $|x| = 2\lambda/\sin^2 u'$, (f) distribution curve in the plane perpendicular to optical axis when $|x| = \lambda/\sin^2 u'$

图 3(a) 为空间光强的分布曲线, 图 3(b) 为 xy 平面 (xz 平面情况相同) 截取的光强分布曲线图。图 3(c) 为沿光轴方向的光强分布曲线。图 3(d) 为像面上的光强分布曲线, 图 3(e) 为 $|x| = \frac{2\lambda}{\sin^2 u'}$, 垂轴截面的光强分布曲线, 图 3(f) 为 $|x| = \frac{\lambda}{\sin^2 u'}$, 垂轴截面的光强分布曲线。

图 4 是 $\lambda = 600 \text{ nm}$, $\sin u' = 0.2$ 时按本文得出的公式计算的像点附近光强空间分布图。

当平行光入射时(望远物镜或照相物镜), $\sin u' = \frac{D}{2f'} = \frac{a}{f'}$, 得出的结果是焦点附近的光强分布。

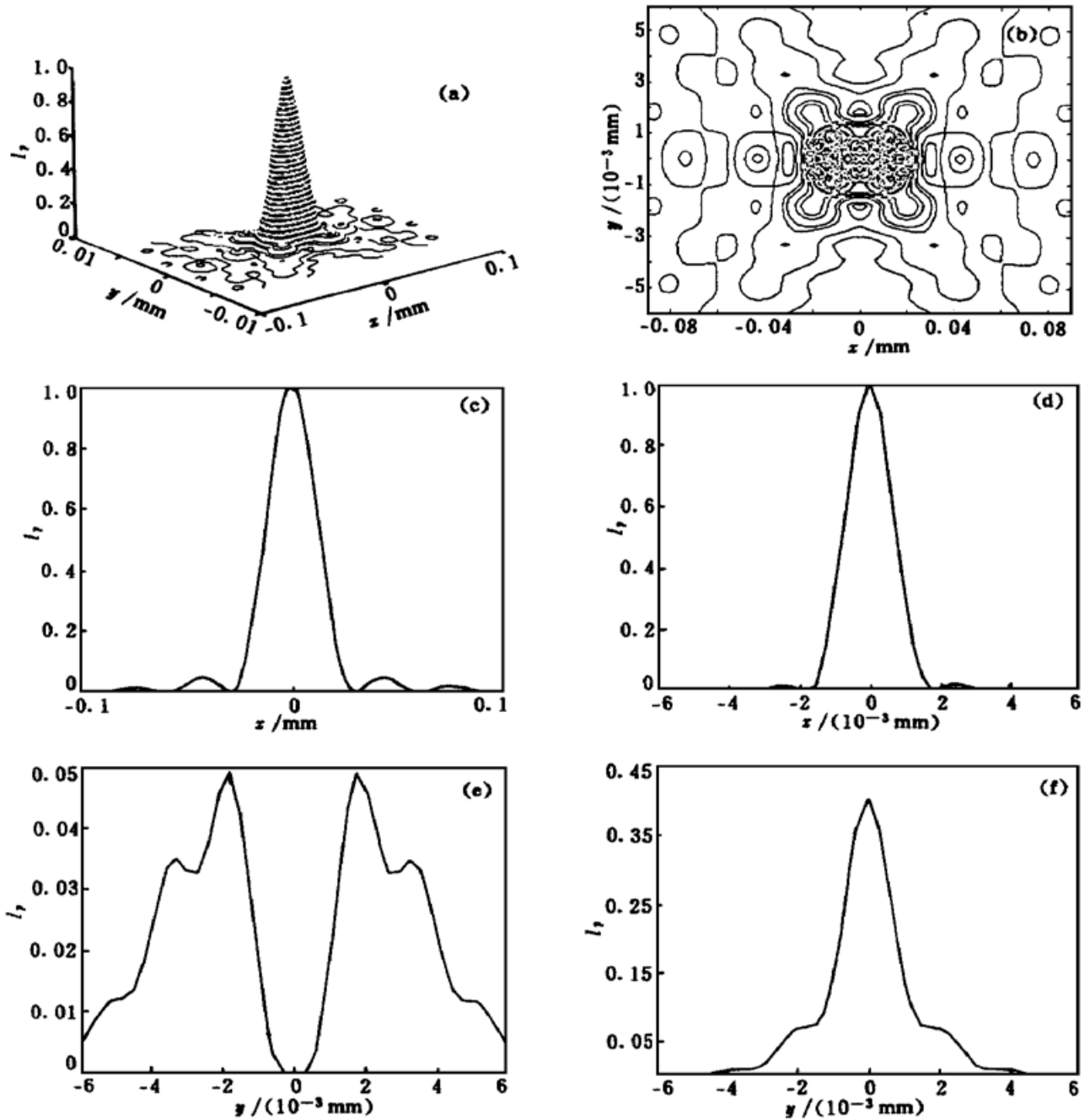


Fig. 4 Same as in Fig. 3 except $\sin u' = 0.2$

结 论 根据菲涅耳衍射振幅和光强解析表达式^[8], 计算光学系统像点附近的空问光强分布。公式中的贝塞尔函数为常用特殊函数, 计算起来很方便。同时由于对照明区和几何阴影区公式是一样的, 不用分别计算。文中给出的光强空问分布曲线是准确的, xy 平面(xz 平面情况相同) 光强曲线横轴为 x , 纵轴为 y , 可直接看出艾利盘半径及沿光轴方向的光强分布。

对于没有像差的理想光学系统, 像点附近沿光轴方向的光强分布是对称的, 只有在有球差时像点附近沿光轴方向光强分布才能出现不对称, 即焦前和焦后光强分布不同。有些文献对理想光学系统也得出焦前和焦后光强分布不同的结论是因为对焦面附近菲涅耳波带数理解不对, 用 N 表示菲涅耳波带数了。

从文中给出的像点附近空问光强分布可以看出, 对于理想光学系统光能绝大部分集中在一个圆柱区内, 此圆柱外圆 $\phi = 2r = 2 \times 0.61\lambda/\sin u'$, 圆柱长 $2l = 2 \times 2\lambda/\sin^2 u'$, 所以焦

深应为 $2l = 4\lambda/\sin^2 u'$ 。在传统的按瑞利判断^[11] 得出的焦深为 $\lambda/\sin^2 u'$ ，为实际焦深的 1/4。并按此确定光学系统的像差容限。显然，对于非目视仪器光学系统的像差容限可以放宽，即使取焦深为 $2l = 2\lambda/\sin^2 u'$ ，亦比按瑞利判断得出的焦深大一倍。光学测量中计算定焦误差时采用物理焦深和几何焦深相加的方法，实际上这种做法是很牵强的，定焦精度应按实际焦深计算。

参 考 文 献

- [1] 玻恩 M, 沃耳夫 E. 光学原理, 北京: 北京科学出版社, 1978. 568~ 587
- [2] Li Yajun, Wolf E. Three-dimensional intensity distribution near the focus in systems of different Fresnel numbers. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1984, **1**(8): 801~ 808
- [3] Erkkila J H, Rogers M E. Diffracted fields in focal volume of a converging wave. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**(7): 904~ 905
- [4] Stamnes J J, Spjelkavik B. Focusing at small angular apertures in the Dedye and Kirchhoff approximations. *Opt. Commun.*, 1981, **40**(2): 81~ 85
- [5] Li Y, Wolf E. Focal shifts in diffracted converging spherical waves. *Opt. Commun.*, 1981, **39**(4): 211 ~ 215
- [6] Li Y. Dependence of the focal shifts on Fresnel numbers and f number. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1982, **72**(6): 770~ 774
- [7] Givens M P. Focal shifts in diffracted converging spherical waves. *Opt. Commun.*, 1982, **41**(3): 145 ~ 148
- [8] Wang Peng, Xu Yuguang, Wang Wei *et al.*. Analytic expression for Fresnel diffraction. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1998, **15**(3): 684~ 688
- [9] Kraus H G. Huygens-Fresnel-Kirchhoff wave-front diffraction formulation: spherical waves. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1989, **6**(8): 1196~ 1205
- [10] 梁铨廷. 物理光学, 北京: 机械工业出版社, 1988. 167
- [11] 张以谟. 应用光学, 北京: 机械工业出版社, 1988. 368

Intensity Space Distribution Near Image Point of Optical System

Wang Peng Xu Yuguang Yu Qinyue Wang Zhijiang

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academia of Science, Shanghai 201800)

(Received 17 August 1998; revised 15 April 1999)

Abstract Intensity space distribution near image point of optical system is derived based on the accurate amplitude (therefore the intensity) analytic expression for Fresnel diffraction. In contrast to Lommel functions, the intensity space distributions are calculated accurately with conventional Bessel function, so it is convenient to be used and the results are perceived more directly. The concept of Fresnel number is also discussed.

Key words diffraction, interference, Bessel function, Lommel functions, Fresnel number.

- [4] 林世鸣, 吴荣汉, 黄永箴等. 低阈值电流的 GaAs/GaAlAs 垂直腔面发射激光器. 高技术通讯, 1994, 4(10): 11~13
- [5] 吴荣汉, 周增圻, 林耀望等. 亚毫安室温连续工作 InGaAs 垂直腔面发射激光器. 高技术通讯, 1995, 5(9): 24~26
- [6] 郭长志, 陈水莲. 分布反射面发射垂直微腔半导体激光器的微腔效应. 物理学报, 1997, 46(9): 1731~1743
- [7] Huang Y Z, Pan Z, Wu R H. Analysis of the optical confinement factor in semiconductor lasers. *J. Appl. Phys.*, 1996, 79(8): 3827~3830
- [8] Huang Y Z, Wang C M. Resonant tunneling, eigenvalue and energy band calculation for potential and periodical potential structures. *Appl. Phys. (A)*, 1992, 54(2): 191~195
- [9] Huang Y Z. Effect of reflectivity at the interface of oxide layer on transverse mode control in oxide confined vertical-cavity surface-emitting lasers. *J. Appl. Phys.*, 1998, 83(7): 3769~3772
- [10] 刘德贵, 费景高, 于泳江等编. FORTRAN 算法汇编, 第二分册, 北京: 国防工业出版社, 1983. 334~341
- [11] Yang G M, MacDougal M H, Pudikov V *et al.*. Influence of mirror reflectivity on laser performance of very-low-threshold vertical-cavity surface-emitting lasers. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 1995, 7(11): 1228~1230

Influence of Reflection Phase of Air Interface on Mode Characteristics of Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers

Huang Yongzhen

(State Key Laboratory on Integrated Optoelectronics, Institute of Semiconductors,
The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083)

(Received 2 July 1998; revised 29 December 1998)

Abstract The mode characteristics for vertical-cavity surface-emitting lasers (VCSEL) with different cap layer thickness are numerically analyzed. The results show that the threshold gain can increase several times for VCSEL with unmatched cap layer, which results from an anti-phase reflectivity from the air-interface. The mode field intensity distribution inversely increases near the air interface as the reflectivity of the air interface is anti-phase with that of distributed Bragg reflector. A precision etching of the cap layer can be used for improving the laser performance.

Key words semiconductor lasers, vertical-cavity surface-emitting lasers, distributed Bragg reflector.