

# 二维声电光效应的耦合波方程理论\*

俞宽新 何士雅 赵启大 顾志坚  
(北京工业大学应用物理系, 北京 100022)

**摘 要** 按照参量互作用的观点推出二维声电光效应的耦合波方程, 并给出二维声电光效应的衍射效率计算公式。

**关键词** 声光效应, 电光效应, 二维声电光效应, 耦合波方程。

## 1 引 言

声电光效应是同时使用声光效应和电光效应的一种非线性光学效应, 有一维声电光效应与二维声电光效应之分。一维声电光效应只使用一个超声波, 声波矢、光波矢和直流电场三个方向两两垂直, 声光互作用为反常布拉格声光效应, 电光互作用为横向电光效应。铌酸锂(LN)晶体是实现一维声电光效应的最佳晶体之一, 一维声电光器件同时可起一维偏转和调制的作用, 比起传统的单纯声光器件来, 具有使用灵活、带宽宽、中心频率可控等特点<sup>[1~6]</sup>。而二维声电光效应使用了两个彼此垂直的超声波, 光波传播方向与这两个超声波都垂直, 声光互作用为反常拉曼-奈斯声光效应, 电光互作用为纵向电光效应。使用拉曼-奈斯效应的原因是由于同一束光波对两束方向垂直的超声波来说, 难以同时满足布拉格条件的缘故。KDP晶体是实现二维声电光效应的最佳晶体之一, 二维声电光器件可同时实现对激光束的二维偏转与调制, 在二维激光偏转显示系统及激光通信中有广阔的应用前景。

## 2 耦合波方程

本文用参量互作用的观点, 先推出二维反常拉曼-奈斯声光效应的耦合波方程, 然后把电光效应视为微扰, 对上述方程中的动量失配进行修正而得出二维声电光效应的耦合波方程。

二维拉曼-奈斯声光互作用中, 入射光波矢与两个声波矢之间两两垂直, 不失一般性, 假设入射光波矢沿  $z$  轴、两个声波矢分别沿  $x$  与  $y$  轴。按照参量互作用的观点, 二维声光互作用的过程如下, 首先入射光与晶体中的超声波耦合产生一系列具有复合频率的极化波, 其圆频率与波矢量分别为:

$$\omega_{m, n} = \omega_0 + m\Omega_1 + n\Omega_2, \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_{m, n} = \mathbf{k}_0 + m\mathbf{K}_1 + n\mathbf{K}_2. \quad (2)$$

式中  $m$  和  $n$  分别为二维超声波所对应的衍射级次, 它们的取值为  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

\* 国家自然科学基金资助项目。

并用 $(m, n)$  作为二维衍射级次的记号。 $\omega_0$  为入射光波的圆频率、 $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别为两个声波的圆频率。 $\mathbf{k}_0$  为入射光波的波矢量、 $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$  分别为两个声波的波矢量。由各级极化波再激发出具有相同频率的各级衍射光波, 包含入射光波与各级衍射光波在内的总光场(假设为平面波), 即电场强度矢量可表示为:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}_{m, n} E_{m, n}(z) \exp [j(\omega_m, nt - \mathbf{k}'_{m, n} \cdot \mathbf{r})], \quad (3)$$

其中  $\mathbf{e}_{m, n}$  为第 $(m, n)$  级衍射光场方向的单位矢量。两个超声波所形成的总声场(也假设为平面波)用二阶应变张量表示为:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = s_1 S_1 \sin(\Omega_1 t - \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r}) + s_2 S_2 \sin(\Omega_2 t - \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}), \quad (4)$$

式中  $s_1, s_2$  为两个超声波的单位应变张量,  $S_1, S_2$  为两个超声波的应变大小。将(1)~(4)式代入非线性极化波的极化强度矢量定义式<sup>[8]</sup>:

$$\mathbf{P}^{(NL)} = \epsilon_0 \chi \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \quad (5)$$

式中  $\chi$  为晶体的线性极化率, 是个四阶张量,  $\epsilon_0$  为真空介电常数。利用欧拉公式将正弦函数改为指数函数, 可算出极化波的表达式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2j} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \{ & \chi \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e}_{m-1, n} S_1 E_{m-1, n}(z) - \\ & \chi \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e}_{m+1, n} S_1 E_{m+1, n}(z) + \chi \cdot \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{e}_{m, n-1} S_2 E_{m, n-1}(z) - \\ & \chi \cdot \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{e}_{m, n+1} S_2 E_{m, n+1}(z) \} \exp [j(\omega_m, nt - \mathbf{k}'_{m, n} \cdot \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (6)$$

再将(3)式和(6)式代入参量相互作用基本方程<sup>[8]</sup>:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \epsilon \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{P}^{(NL)}, \quad (7)$$

便可得到第 $(m, n)$  级衍射光场  $E_{m, n}(z)$  所满足的二维声光衍射耦合波方程为:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{m, n}(z)}{dz} - j \frac{k_{m, n}^2 - k_{m, n}^2}{2k'_{(m, n)z}} E_{m, n}(z) = - \frac{(\omega_m, n/c)^2}{4k'_{(m, n)z}} [ & \mathbf{e}_{m, n} \cdot \chi \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e}_{m-1, n} S_1 E_{m-1, n}(z) - \\ & \mathbf{e}_{m, n} \cdot \chi \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e}_{m+1, n} S_1 E_{m+1, n}(z) + \mathbf{e}_{m, n} \cdot \chi \cdot \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{e}_{m, n-1} S_2 E_{m, n-1}(z) - \\ & \mathbf{e}_{m, n} \cdot \chi \cdot \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{e}_{m, n+1} S_2 E_{m, n+1}(z) ], \end{aligned} \quad (8)$$

(7) 式中  $\epsilon$  为晶体的相对介电常数, 是个二阶张量。计算过程中进行了如下数学处理: 1) 方程两边左乘单位矢量  $\mathbf{e}_{m, n}$ , 这样可以得到标量式; 2) 忽略  $\frac{d^2 E_{m, n}(z)}{dz^2}$  项, 这是因为(3) 式中指数因子随  $z$  的变化要远大于  $E_{m, n}(z)$  随  $z$  的变化; 3) 消去各项的指数因子和两边的求和号。另外注意到如下关系:

$$k_{m, n}^2 = k_{(m, n)x}^2 + k_{(m, n)y}^2 + k_{(m, n)z}^2; \quad \epsilon \cdot \mathbf{e}_{m, n} = \mu_{m, n}^2 \mathbf{e}_{m, n}; \quad k_{m, n} = \frac{\mu_{m, n} \omega_{m, n}}{c}.$$

其中  $k'_{(m, n)x}, k'_{(m, n)y}, k'_{(m, n)z}$  分别为  $\mathbf{k}'_{m, n}$  的  $x, y, z$  分量,  $\mathbf{k}_{m, n}$  和  $\mu_{m, n}$  为第 $(m, n)$  级衍射光的波矢量与折射率。(8) 式说明, 在二维反常拉曼-奈斯声光衍射中, 第 $(m, n)$  级衍射光只与第 $(m-1, n), (m+1, n), (m, n-1), (m, n+1)$  4 束衍射光之间有耦合作用。

下面来简化耦合波方程(8), 首先先简化左边的第二项。为此引入动量失配的概念, 它定义为极化波的波矢量与衍射光的波矢量之差:

$$\Delta \mathbf{k}_{m, n} = \mathbf{k}'_{m, n} - \mathbf{k}_{m, n}. \quad (9)$$

如图 1 所示, 曲线 1 和 2 分别为晶体的 o 光与 e 光折射率曲面, 如果选用无旋光的晶体(如

KDP), 则两个曲面在  $z$  方向上是相切的。假设入射光为  $o$  光, 因反常声光相互作用使得衍射光为  $e$  光。  $k_0$  为入射光波矢量,  $mK_1 + nK_2$  为产生第  $(m, n)$  级衍射光所对应的合成声波矢,  $k'_{m, n}$  为极化波的波矢量,  $k_{m, n}$  为由极化波引发的衍射光的波矢量。动量失配的方向应限制在通光方向即  $z$  方向上, 这样动量失配的大小便为  $\Delta k_{m, n} = k'_{(m, n)z} - k_{(m, n)z}$ 。由于光波矢在数量级上远大于声波矢,  $k'_{m, n}$  和  $k_{m, n}$  的大小基本等于  $k'_{(m, n)z}$  和  $k_{(m, n)z}$ , 所以有以下近似关系:

$$\Delta k_{m, n} = \frac{k_{m, n}'^2 - k_{m, n}^2}{2k'_{(m, n)z}} \quad (10)$$

其次来简化(8)式的右边, 利用晶体的线性极化率张量与声光系数张量之间的关系<sup>[8]</sup>

$$\chi_{ijkl} = -p_{ijkl}\mu_i^2\mu_j^2, \quad (11)$$

和有效声光系数的定义<sup>[8]</sup>

$$p = eip_{ijkl}skle_j, \quad (12)$$

可以证明, (8)式右边中任意两个有耦合作用的光场之间诸张量缩并运算的结果为:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \chi \cdot \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{e}_2 = -\mu_1^2\mu_2^2 p_i, \quad (i = 1, 2) \quad (13)$$

式中下标  $i$  代表不同声光相互作用的维数,  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  为有耦合作用的两个光场的单位矢量,  $\mu_1$  和  $\mu_2$  为这两个光场的折射率。例如第  $(m, n)$  级衍射光与第  $(m-1, n)$  级衍射光之间的张量缩并的结果就为  $-\mu_{m, n}^2\mu_{m-1, n}^2 p_1$ , 其余类推。反常声光衍射中入射光与衍射光的偏振方向不同, 若入射光为  $o$  光, 则衍射光变为  $e$  光, 反之亦然。故反常声光衍射入射光与衍射光的折射率往往是不相等的。但由于在二维拉曼-奈斯声电光效应中, 入射光沿光轴方向传播, 在此方向附近  $o$  光与  $e$  光的折射率相差不大, 可近似认为第  $(m, n)$  级衍射光与和它有耦合作用的 4 束衍射光的折射率相等, 则(8)式简化为

$$\frac{dE_{m, n}(z)}{dz} - j\Delta k_{m, n}E_{m, n}(z) = \frac{\zeta_i}{2L}[E_{m-1, n}(z) - E_{m+1, n}(z)] + \frac{\zeta_i}{2L}[E_{m, n-1}(z) - E_{m, n+1}(z)], \quad (14)$$

式中

$$\zeta_i = \frac{\pi\mu_{m, n}^3 p_i S_i L}{\lambda_0}, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

称为第  $i$  维声光相互作用的声致相移, 它反映各维声光相互作用的强弱。  $L$  为声光相互作用的长度(一般来说, 两维声光相互作用的长度应是相等的, 故未加下标),  $\lambda_0$  为入射光波长。

最后讨论动量失配的大小。按(10)式计算的动量失配是单纯由声光效应引起的, 称声致动量失配。因入射光波矢沿  $z$  轴, 两个声波矢沿  $x$ 、 $y$  轴, 故有

$$k_{m, n}'^2 = k_0^2 + m^2 K_1^2 + n^2 K_2^2; \quad k'_{(m, n)z} = k_0.$$

则第  $(m, n)$  级衍射光的声致动量失配大小为:

$$\Delta k_{m, n} = \frac{k_0^2 + m^2 K_1^2 + n^2 K_2^2 - k_{m, n}'^2}{2k_0}. \quad (16)$$

以上讨论过程中只考虑声光效应, 若考虑电光效应, 直流电场使晶体的折射率曲面发生变

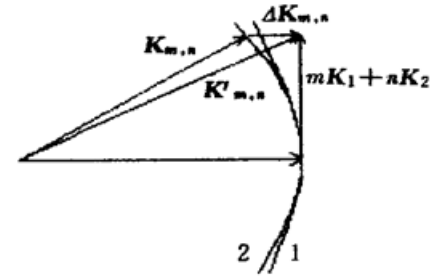


Fig. 1 The momentum mismatch caused by the acousto-optic effect

化, 这也会引起动量失配, 称为电致动量失配, 其大小为:

$$\Delta k_{m, n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\Delta\mu_0 + \Delta\mu_{m, n}), \tag{17}$$

其中  $\Delta\mu_0$  和  $\Delta\mu_{m, n}$  分别为入射光和第  $(m, n)$  级衍射光折射率因电光效应而产生的变化量, 大小可统一表示为:

$$\Delta\mu = \frac{\mu^3 \gamma U}{2h}, \tag{18}$$

$\mu$  为未变化之前的折射率,  $\gamma$  为引起相应折射率变化所对应的晶体有效电光系数,  $U$  为外加电压,  $h$  为沿电场方向的晶体厚度。电致动量失配如图 2 所示,

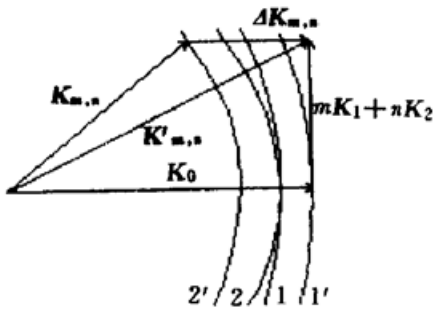


Fig. 2 The momentum mismatch caused by the electro-optic effect

曲线 1、2 为未加电场前的晶体折射率曲面, 1'、2' 为加电场后的折射率曲面。比较 (16)、(17) 两式或图 1、图 2 不难看出, 电致动量失配要远大于声致动量失配。事实上, 未加电场时入射光与衍射光的折射率在  $z$  轴方向附近相差不大, (16) 式分子上的  $k_0^2$  与  $k_{m, n}^2$  之差可忽略, 声致相对失配  $\Delta k_{m, n}/k_0$  的数量级为声波矢与光波矢之比的平方, 显然是很小的。而由 (17) 式知, 电致相对失配  $\Delta k_{m, n}/k_0$  的数量级取决于电光效应引起的晶体折射率变化量, 它与外加电压成正比, 只要外加电压足够大, 折射率变化量将不可忽略。因此, 只要用电致动量失配表达式 (17) 代替 (14) 式中的声致动量失配, 则 (14)、(15) 式便成为二维声电光效应的耦合波方程。

### 3 二维声电光效应的衍射效率

由贝塞尔函数递推公式  $J'_m(x) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)]$ 、 $J_m(x) = \frac{x}{2m} [J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)]$  可以证明, 二维声电光效应的耦合波方程 (14) 在满足边界条件  $E_{0, 0}(0) = E_0$  和  $E_{m, n}(0) = 0$  时的解为

$$E_{m, n}(z) = E_0 \exp(-j \frac{\Delta k_{m, n}}{2} z) J_m[\zeta \frac{\sin(\Delta k_{m, n} z/2)}{\Delta k_{m, n} L/2}] J_n[\zeta \frac{\sin(\Delta k_{m, n} z/2)}{\Delta k_{m, n} L/2}]. \tag{19}$$

令  $z = L$ , 便可得到二维声电光衍射中第  $(m, n)$  级衍射光的衍射效率计算公式为:

$$\eta_{m, n} = \frac{|E_{m, n}(L)|^2}{|E_0|^2} = J_m^2(\zeta \text{sinc } \sigma_{m, n}) J_n^2(\zeta \text{sinc } \sigma_{m, n}), \tag{20}$$

式中  $\text{sinc}(x) = \sin x/x$  为辛格函数,  $\sigma_{m, n}$  称第  $(m, n)$  级衍射光的位相失配, 定义为:

$$\sigma_{m, n} = \frac{\Delta k_{m, n} L}{2}. \tag{21}$$

当  $\sigma_{m, n} = 0$  时, 即不加直流电压时, (20) 式简化为:

$$\eta_{m, n} = J_m^2(\zeta) J_n^2(\zeta), \tag{22}$$

该式即为单纯二维声光拉曼-奈斯衍射的衍射效率公式。当  $\sigma_{m, n} \neq 0$  时外加电压的大小将对衍射效率产生影响。若两个声光相互作用的强度相同, 即  $\zeta = \zeta_2 = \zeta$  又使用相同的 +1 级衍射级次, 即  $m = n = 1$ , 则 (1, 1) 级衍射光的衍射效率为:

$$\eta_{1, 1} = J_1^4(\zeta \text{sinc } \sigma_{1, 1}). \tag{23}$$

由此式可以看出,若固定超声功率不变,衍射效率的大小将随位相失配而变,也就是将随外加电压的大小而变,这就是二维声电光器件的光调制原理。

**结 论** 通过求解二维声电光效应的耦合波方程知,衍射光的衍射效率与两个超声波的功率及直流电压的大小有关。在两个彼此垂直的电声换能器上加频率变化的驱动电信号可以实现激光的二维偏转,在直流电极上加混有调制信号的直流电压信号,则可实现激光的强度调制。因此一个二维声电光器件可将两个偏转器和一个调制器集于一体,在二维激光偏转显示系统和光通信领域内具有广阔应用前景。

### 参 考 文 献

- [1] Psaltis D, Lee H, Sirat G. Acousto-electro-optic light modulation. *Appl. Phys. Lett.*, 1985, **46**(3) : 215~ 217
- [2] Lee H. Scanning acousto-electro-optic light deflector with uniform intensity response. *Appl. Phys. Lett.*, 1986, **49**(1) : 24~ 25
- [3] 俞宽新,何士雅,赵启大等. 声电光效应与声电光器件. *光学学报*, 1997, **17**(2) : 253~ 256
- [4] 俞宽新,何士雅,赵启大等. 反常声电光偏转器. *应用声学*, 1996, **15**(6) : 7~ 10
- [5] 俞宽新,刘长生. 反常声电光调制器. *数据采集与处理*, 1997, **12**(4) : 289~ 292
- [6] 俞宽新,赵启大,何士雅. 声电光效应的耦合波方程理论. *光学学报*, 1998, **18**(4) : 466~ 470
- [7] 任占祥,董孝义,张建忠等. 二维声光互作用理论及实验分析. *光学学报*, 1990, **10**(11) : 1047~ 1051
- [8] 徐介平. 声光器件的原理、设计与应用,北京:科学出版社,1982. 31~ 56

## Theory of Coupled Wave Equation of Two-Dimensional Acousto-Electro-Optical Effect

Yu Kuanxin He Shiya Zhao Qida Gu Zhijian

(Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022)

(Received 23 August 1998)

**Abstract** The coupled wave equation of two-dimensional Acousto-electro-optical (AEO) effect is derived according to the opinion about interaction of the parameters. A diffraction efficiency formula of the two-dimensional AEO effect is given by the equation.

**Key words** acousto-optical effect, electro-optical effect, two-dimensional acousto-electro-optical effect, coupled wave equation.