

改进 $4f$ 傅里叶光学系统实现平面分形的 频谱放大和小波变换

王取泉¹⁾ 李琳^{1), 2)} 侯勇¹⁾ 熊贵光¹⁾ 田德诚¹⁾

1) 武汉大学物理系, 武汉 430072

2) 中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800

摘 要 设计了一种改进的 $4f$ 傅里叶光学信息处理系统, 利用该系统实现对频谱面坐标尺度的放大和光学小波变换, 其优点是有益于带通滤波器的制作和精确定位。并给出了谢尔宾斯基 (Sierpinski) 分形的傅里叶变换、小波变换及分维测量的实验结果。

关键词 傅里叶变换, 小波变换, 光学信息处理。

1 引 言

分形作为一门独立学科, 从诞生至今, 已有近 30 年历史^[1]。自从引入有规分形生长到分形子概念后, 人们对分形的认识和研究取得了很大进展。狭义上讲, 分形体系基本特征就是其局部组成部分以某种方式与其整体相似^[2]。而 80 年代引入的小波概念, 作为一种新的数学分析工具, 可将信号或图像分解成交织在一起的多种尺度成份, 能不断地聚焦到更微小的细节, 这种“显微”能力与分形体在尺度变换上有一致性。所以, 小波理论与分形具有密切的联系^[3]。

用光学方法可以很方便地实现小波变换, 它可以直观地显示分形体在不同尺度变换下的自相似性, 并可以方便地测定其分维 D 和谱函数^[4-8]。根据选取小波函数的不同, 实现光学小波变换的途径也不相同, 比较简单的一种途径是利用 $4f$ 傅里叶光学系统经过特定的带通滤波器来实现小波变换(其频谱滤波函数就是所选小波的傅里叶变换)。由于在频域和空域中的尺度大小是相互矛盾的, 因此在进行较大空域尺度小波变换时, 其频域中小尺度的带通滤波片的制作和精确定位都存在一定的困难。为了解决这个困难, 本文对 $4f$ 傅里叶光学系统进行了改进, 其优点是可以对频谱面的尺度进行调节和放大, 而并不改变其小波变换空域尺度的大小。

2 理论分析

2.1 平面分形的小波变换关系式

对于一个满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 0$ 的小波函数, 通过其平移和缩放产生一个函数族 $g_{ab}(x)$

$$g_{ab}(x) = (1/|a|^{1/2})g[(x-b)/a]. \quad (1)$$

一个函数 $s(x)$ 对于小波函数 $g(x)$ 的小波变换定义为^[4]

$$T_g(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) g^* [(x-b)/a] dx, \quad a > 0, b \in R, \quad (2)$$

式中 a, b 表示缩放和平移参数, R 代表实数集。

对于二维平面上的一个分形体, 其密度函数(即其透过率函数)用 $s(x)$ 描述, 其分形测度 $\mu(x)$ 与密度函数 $s(x)$ 的关系为 $d\mu(x) = s(x) d^2x$, 以 $B(x_0, \epsilon)$ 表示以 x_0 为中心、 ϵ 为半径的圆域, 由分形体在小区域局部自相似条件得到分形测量的关系式^[7]

$$\mu[B(x_0, m\epsilon)] = m^D \mu[B(x_0, \epsilon)], \quad (3)$$

式中 m 为比例因子, D 为分形体自相似维数(分维), 由(3)式和 $\mu(x)$ 与 $s(x)$ 的关系得到二维平面上分形体的小波变换满足关系式

$$T_g(ma, x_0) = m^{D-2} T_g(a, x_0), \quad (4)$$

其输出面上的光强关系式为

$$I(ma, x_0) = |T_g(ma, x_0)|^2 = m^{2(D-2)} I(a, x_0). \quad (5)$$

由(5)式可知, 求得 $\ln I - \ln m$ 的斜率, 可以求得分形体的分维 D 。

2.2 用 $4f$ 傅里叶光学系统实现小波变换

小波变换中的小波函数有多种, 常用的小波函数有 Haar 小波、伽柏(Gabor)小波、Morlet 小波和墨西哥帽子小波, 具体选用哪种小波需要根据具体的光路系统来确定。在 $4f$ 傅里叶光学系统中, 选取墨西哥帽子小波, 其小波变换是通过频域中的带通滤波来实现的。因为小波变换关系式(2)在频域中有一个等效的表示式

$$T_g(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) G_{ab}^*(a\nu) \exp(ib\nu) d\nu, \quad (6)$$

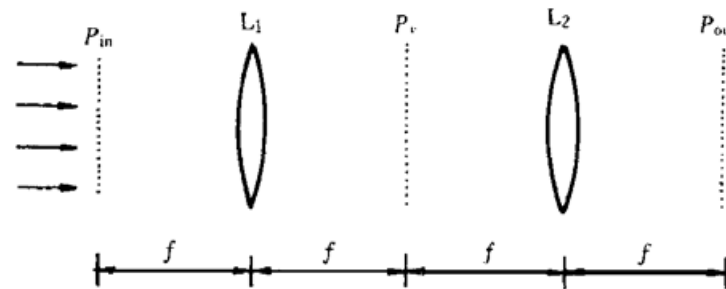
式中的 ν 代表与 x 对应的频谱空间坐标。(6)式的意义为: $s(x)$ 的小波变换等于其频谱 $S(\nu)$ 与小波 $g_{ab}(x)$ 的频谱 $G_{ab}(a\nu)$ 的乘积的傅里叶变换。对于墨西哥帽子小波函数有

$$g(x) = (2 - x^2) \exp(-x^2/2), \quad (7)$$

$$G(\nu) = c\nu^2 \exp(-\nu^2/2). \quad (8)$$

由于 $G(\nu)$ 为非负值函数, 具有对称的两个峰值, 在峰值的两侧衰减极快, 故在实际操作中常常采用两个矩形函数 $G'(\nu)$ 来近似代替 $G(\nu)$:

$$G'(\nu) = \begin{cases} 1 & \nu_1 < a\nu < \nu_2, \\ 0 & \text{others.} \end{cases} \quad (9)$$



可见, $G'(\nu)$ 实际就是一个频域中的带通滤波器。因此, 将 $G'(\nu)$ 放置在 $4f$ 傅里叶光学信息系统中的频谱面上就可以实现小波变换, 其光路示意图如图 1, 图中 P_{in} 、 P_v 和 P_{out} 分别表示输入平面、频谱平面和输出平面。

Fig. 1 Realization of wavelet transform with $4f$ Fourier optical system

在图 1 中的频谱面上的复光场分布 $U(x_\nu, y_\nu)$ 与输入平面上分形体的密度函数

$s(x_0, y_0)$ 的关系为(假定采用单位振幅的平行光照明)

$$U(x_v, y_v) = \frac{1}{j\lambda f} \iint s(x_0, y_0) \exp[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_0 x_v + y_0 y_v)] dx_0 dy_0 = (1/j\lambda f) S(v_x, v_y) \Big|_{v_x = x_v/\lambda f, v_y = y_v/\lambda f}, \quad (10)$$

式中 λ 为波长, f 为透镜的焦距, $S(v_x, v_y)$ 为 $s(x, y)$ 的傅里叶变换, 在频谱面上的坐标 x_v 与其空间频率值 v_x 的关系为

$$x_v = \lambda f v_x. \quad (11)$$

在实际操作中, 必须尽力增大 x_v 的值, 否则将增加带通滤波器 $G'(v)$ 制作和精确定位的难度。下面探讨通过改变光路布置增大 x_v 的值。

2.3 改进 4f 系统的频谱放大与小波变换

改进 4f 傅里叶光学系统的结构如图 2 所示, 其结构特点为: 1) 直接采用发散球面波进行照明; 2) 物体的频谱面(即照明光波的会聚像点所在平面)移至 L_2 的前表面附近; 3) 输入物平面在 L_1 的前表面附近。该系统的优点是可以对其频谱面上的坐标尺度进行放大, 其放大倍数与照明光源和输入平面的位置有关。

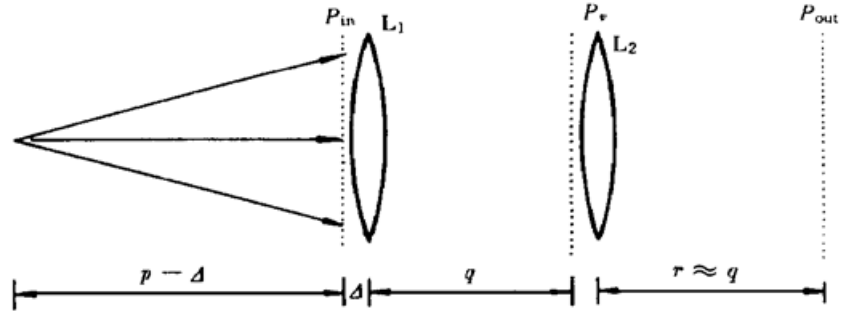


Fig. 2 Geometry of improved 4f Fourier optical system

记照明点光源至透镜 L_1 的距离为 p , 输入物平面 P_{in} 至 L_1 的间隙为 Δ , 输入物平面后的光场分布为

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda(p - \Delta)} s(x_0, y_0) \exp\left[jk \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2(p - \Delta)}\right], \quad (12)$$

在透镜 L_1 后表面上的光场分布为

$$U_L(x_1, y_1) = \frac{1}{(j\lambda)^2(p - \Delta)\Delta} \iint s(x_0, y_0) \exp\left[jk \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2(p - \Delta)}\right] \times \exp\left[jk \frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{2\Delta}\right] \exp\left[-jk \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{2f}\right] dx_0 dy_0, \quad (13)$$

其中 x_1, y_1 表示透镜 L_1 平面上的直角坐标。在透镜 L_1 后距离 q 的平面上的光场分布为(p, q 满足物像关系 $1/p + 1/q - 1/f = 0$):

$$U_v(x_v, y_v) = \frac{1}{j\lambda q} \iint U_L(x_1, y_1) \exp\left[jk \frac{(x_v - x_1)^2 + (y_v - y_1)^2}{2q}\right] dx_1 dy_1 = C \exp\left[jk \frac{(f - \Delta)(x_v^2 + y_v^2)}{2[q(f - \Delta) + f\Delta]}\right] \iint s(x_0, y_0) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_0 x_v + y_0 y_v)\right] dx_0 dy_0, \quad (14)$$

式中 C 为一常数因子, f' 为等效焦距, 其关系式为

$$f' = [q(f - \Delta) + f\Delta]/f. \quad (15)$$

(14) 式和(10)式在形式上是相同的, 相差一个不影响强度的分布二次相位因子, 其频谱面上的坐标 x_v 与其空间频率 v_x 的关系变为

$$x_v = \lambda f' v_x. \quad (16)$$

由(15)式、(16)式可见, 通过调节 q 值和 Δ 值可以改变 f' 值, 从而实现调节和放大频谱面上坐标尺度的大小。当 $\Delta = 0, p = q = 2f$ 时输入平面和输出平面上物像的放大倍数为 1, 而 $f' = 2f$, 这表明改进的 4f 傅里叶光学系统与标准的 4f 傅里叶光学系统相比, 频谱面上的坐标尺

度放大了 2 倍, 而其输出平面小波变换的空间尺度仍然保持不变。这对降低实验技术上的操作难度和提高实验精度具有十分重要的意义。

3 实验结果

实验采用 He-Ne 激光器 ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$), 激光束经过 40 倍的扩束镜扩束, 通过 $25 \mu\text{m}$ 的针孔进行滤波, 在图 2 中的点源(即针孔位置)和输入面中间还加入一个短焦距 ($f_0 = 11 \text{ cm}$) 透镜, 其作用是减小针孔至 L_1 的实际距离(其有效距离仍保持为 $2f$), 两个傅里叶变换透镜 L_1 和 L_2 的焦距相同 ($f = 60 \text{ cm}$), 分形图片是五次迭代的谢尔宾斯基地毯和五次迭代的谢尔宾斯基垫块。对于谢尔宾斯基地毯, 选用圆环型带通滤波器的内外径比例 $v_1 : v_2 = 1 : 3$, 最小内径约为 1 mm ; 对于谢尔宾斯基垫块, $v_1 : v_2 = 1 : 2$, 最小内径约为 1.2 mm 。不同滤波器的伸缩因子 m 的取值范围为 $1 \sim 10$ 。根据 $\ln I - \ln m$ 的斜率计算得到谢尔宾斯基地毯的分维 $D = 1.91$ (其理论值为 $D = \ln 8 / \ln 3 \approx 1.893$), 谢尔宾斯基垫块的分维 $D = 1.60$ (其理论值为 $D = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.585$), 实验值与其理论值基本相符, 误差的原因是实验所采用的分形图片的

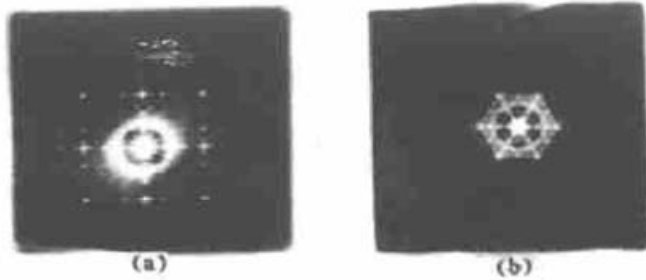


Fig. 3 (a) The spatial frequency distribution of the Sierpinski carpet; (b) The spatial frequency distribution of the Sierpinski gasket

迭代次数受到限制。图 3(a)、(b) 分别为五次迭代谢尔宾斯基地毯和谢尔宾斯基垫块的频谱。图 4 和图 5 分别是谢尔宾斯基地毯和垫块在不同尺度下(即通过不同大小的带通滤波器)的光学小波变换图的照片。图 4 中的(a)、(b)、(c) 分别对应于第一代、第二代和第三代谢尔宾斯基地毯的构造图, 所采用的带通滤波器的频率范围分别为:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \omega \leq \nu \leq 3\omega, \\ \text{(b)} \quad & 3\omega \leq \nu \leq 3^2\omega, \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad 3^2\omega \leq \nu \leq 3^3\omega.$$

图 5 中的(a)、(b)、(c) 则分别对应于第二代、第三代和第四代谢尔宾斯基垫块的构造图, 所采用的带通滤波器的频率范围分别为:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \omega' \leq \nu \leq 2\omega', \\ \text{(b)} \quad & 2\omega' \leq \nu \leq 2^2\omega', \\ \text{(c)} \quad & 2^2\omega' \leq \nu \leq 2^3\omega'. \end{aligned}$$

在图 4(a) 和图 5(a) 中叠加的斑纹是激光场通过小尺寸带通滤波器时产生的相干噪声。从图 4 和图 5 中清晰可见小波变换的“变焦性质”所提供的分形图片在不同分辨力层次上的结构信息及其相似性的特性。

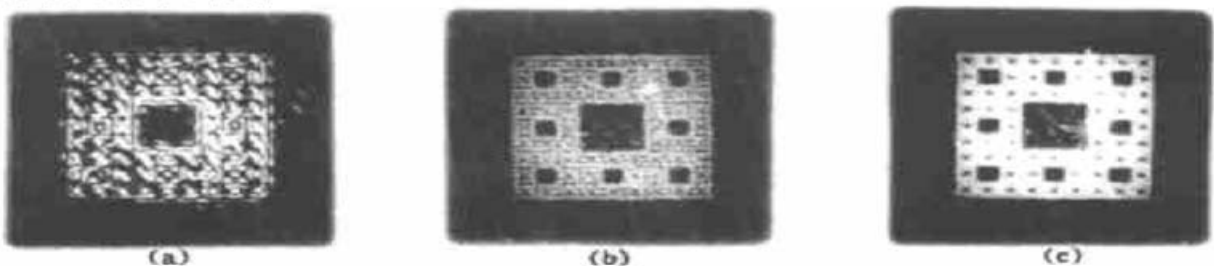


Fig. 4 Optical wavelet transform of the Sierpinski carpet. (a) $\omega \leq \nu \leq 3\omega$, (b) $3\omega \leq \nu \leq 3^2\omega$, (c) $3^2\omega \leq \nu \leq 3^3\omega$. $\omega \approx 2 \text{ mm}^{-1}$



Fig. 5 Optical wavelet transform of the Sierpinski gasket. (a) $v_0 \leq v \leq 2v_0$, (b) $2v_0 \leq v \leq 2^2v_0$, (c) $2^2v_0 \leq v \leq 2^3v_0$. $v_0 \approx 2.5 \text{ mm}^{-1}$

结论 利用变形的 4f 系统实现光学小波变换, 具有对频谱面的坐标尺度进行调节和放大的功能, 从而降低了实验操作技术的难度并有利于提高实验精度。该系统结构紧凑, 无需高功率的激光器, 它不仅适用于实验研究工作, 还可推广应用于现代信息光学的实验教学。

参 考 文 献

- [1] 黄 昀. 分形发展三十年, 物理, 1998, 27(2): 90~ 93
- [2] Mandelbrot B B. Fractal: Form, Chance and Dimension. San Francisco: Freeman, 1977.
- [3] 汪富泉, 李后强. 小波理论与分形. 物理, 1994, 23(9): 539~ 543
- [4] Harold Szu, Yunlong Sheng, Jing Chen. Wavelet transform as a bank of the matched filters. *Appl. Opt.*, 1992, 31(17): 3267~ 3277
- [5] Freysz E, Pouligny B, Argoul F *et al.*. Optical wavelet transform of fractal aggregates. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64(7): 745~ 748
- [6] Argoul F, Arneodo A, Elezgaray J *et al.*. Wavelet analysis of the self-similarity of diffusion-limited aggregates and electrodeposition clusters. *Phys. Rev. (A)*, 1990, 41(10): 5537~ 5560
- [7] Muzy J F, Pouligny B, Freysz E *et al.*. Optical-diffraction measurement of fractal dimensions and $f(\alpha)$ spectrum. *Phys. Rev. (A)*, 1992, 45(5): 8961~ 8964
- [8] Mendlovic D, Konforti N. Optical realization of the wavelet transform for two-dimensional objects. *Appl. Opt.*, 1993, 32(32): 6542~ 6546

Spectrum Enlargement and Wavelet Transform on Planar Fractal by Improved 4f Fourier Optical System

Wang Ququan¹⁾ Li Lin^{1), 2)} Hou Yong¹⁾
Xiong Guiguang¹⁾ Tian Decheng¹⁾

1) Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072

2) Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800

(Received 13 July 1998; revised 26 October 1998)

Abstract An improved 4f Fourier optical system was designed and applied to enlarge the scale of spectrum and realize wavelet transform, which was helpful to the operation of the matched filter on the spectrum plane. The experimental results of Fourier transform and wavelet transform and the fractal dimension on Sierpinski fractal were given.

Key words Fourier transform, wavelet transform, optical information processing.