

波前延拓剪切干涉的数学原理与数值模拟

许晓军 陆启生 姜宗福 刘泽金
(国防科技大学应用物理系, 长沙 410073)

摘 要 从数值方法的角度分析了常规剪切干涉存在的缺陷, 通过数学原理和数值分析方法提出波前延拓剪切干涉, 并证明了它的可行性及其对常规剪切干涉缺陷的克服。最后用数值方法模拟了波前恢复过程。

关键词 波前重构, 剪切干涉, 数值模拟。

1 引 言

光波前作为光束携带信息的主要媒体, 在高相干光——激光问世以来得到了广泛的研究与应用。因而光波前的恢复技术已成为信息光学、自适应光学等诸多研究领域的重要课题。光学全息作为波前恢复的成功示例, 因其对参考光束的要求, 在波前传感、波前检测等方面受到了很大程度的限制。而在自适应光学中, 波前传感检测技术主要有测量波前斜率法^[1](如剪切干涉法)和测量波前曲率法^[2]两大类。剪切干涉技术作为一种典型的相位恢复技术, 虽然易于操作, 但在重构算法和信息完整性等方面还存在着很大的缺陷。1996 年, Shekhtman 等^[3]在常规剪切干涉仪的基础上, 用剪切干涉仪的合成进行了波前恢复的实验, 为剪切干涉技术指出了一条新途径。本文在此基础上, 从数学原理和波前恢复算法实现的角度提出了波前延拓剪切干涉, 并通过数值分析方法证明了波前延拓剪切干涉的可行性及其对常规剪切干涉缺陷的克服与改进, 并且用数值方法模拟了波前恢复过程。

2 横向波前延拓剪切干涉的数学原理

为简单起见, 设所考察的光束的复振幅 $E(x)$ 为一维函数:

$$E(x) = A(x) \exp [j \frac{2\pi}{\lambda} \mathcal{Q}(x)], \quad (1)$$

式中, $A(x)$ 为波前的振幅分布函数, $\mathcal{Q}(x)$ 为波前的相位分布函数, λ 为波长。

假设 $A(x)$ 为常数且等于 1, 横向剪切方向为 x 轴方向, 剪切量为 s , 则干涉后的光强分布为

$$I(x) = |E(x) + E(x - s)|^2 = 2 + 2 \cos \{ (2\pi/\lambda) [\mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x - s)] \} \equiv 2 + 2 \cos [(2\pi/\lambda) h(x)]. \quad (2)$$

其中

$$h(x) = \mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x - s). \quad (3)$$

常规的相位恢复算法便是从(2)式所给出的光强分布中提取出 $\mathcal{Q}(x)$, 即重构波前。其关键步骤是如何从 $h(x)$ 中反推出 $\mathcal{Q}(x)$ 。很显然, 对方程(3)两边作傅里叶变换, 则有

$$H(\nu) = \Phi(\nu)[1 - \exp(j2\pi\nu s)], \quad (4)$$

式中 $H(\nu)$ 、 $\Phi(\nu)$ 分别为 $h(x)$ 、 $\mathcal{Q}(x)$ 的傅里叶变换。

由(4)式可知, $H(\nu)$ 是对 $\Phi(\nu)$ 的频率成分的空间滤波, 且 $\Phi(\nu)$ 中空间频率为 $1/s$ 的整数倍的信息已被滤去。

另外, 若 $\mathcal{Q}(x)$ 为 x 的一次函数, 即波前倾斜, 则剪切干涉后由(3)式可知 $h(x)$ 为一常数, 在这种情形下 $\mathcal{Q}(x)$ 是很难恢复的。也就是说, 常规的剪切干涉对波前倾斜是无能为力的。

更重要的是, 实际的光束是有一定孔径尺寸的, 即如(1)式所定义的复振幅中, x 是有一定取值范围的。不妨设 $x \in [0, D]$, 则由(2)式所表示的干涉条纹的范围为 $x \in [s, D]$ 。这样问题的本身就变为如何由 $h(x)$, $x \in [s, D]$ 来反演 $\mathcal{Q}(x)$, $x \in [0, D]$ 。

在数值计算中, 将 $\mathcal{Q}(x)$, $x \in [0, D]$ 采样离散为 $\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_{N-1}, \mathcal{Q}_k, \dots, \mathcal{Q}_{N-k}, \dots, \mathcal{Q}_{N-1}$; 将 $h(x)$, $x \in [s, D]$ 采样离散为 h_0, \dots, h_{N-k-1} ; $[0, s)$ 上 $\mathcal{Q}(x)$ 有 k 个采样点, 则方程(3)的离散化形式为

$$h_i = \mathcal{Q}_{i+k} - \mathcal{Q}_i, \quad i = 0, \dots, N - k - 1. \quad (5)$$

由数字信号处理原理可知, 方程(5)为 k 阶差分方程。定解 k 阶差分方程需要 k 个初值条件, 即需要已知 $\mathcal{Q}(x)$ 在 k 个点上的采样值。而实际情况 $\mathcal{Q}(x)$ 是未知的, 这样方程(5)是很难定解的。只有当在 $[0, s)$ 上只有一个采样点, 这样方程(5)降为一阶差分方程, 才有可能决定 $\mathcal{Q}(x)$ 的相对值, 但这样会降低重构精度。

从以上的分析可以看出常规剪切干涉对原波前信息的损失主要有两部分, 一是空间滤波, 二是空间截取。如何保证波前信息的完整性, 便是本文所要研究的内容。一个最基本的想法就是如何将方程(5)变成一个满秩的代数方程组。而这就至少需要 N 个 $h(x)$ 的采样点, 即 $h_i (i = 0, \dots, N - 1)$, 且这 N 个值必与 $\mathcal{Q}_i (i = 0, \dots, N - 1)$ 满足特定的代数关系, 使得方程 $\mathbf{H} = \mathbf{A}\Phi$ 。其中 $\mathbf{H} = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$, $\Phi = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{N-1})$, 满足 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 。

如果将 $\mathcal{Q}(x)$ 作周期延拓, 这样就有可能实现上述思路。将 $\mathcal{Q}(x)$ 作周期延拓在光学上也是可以实现的^[3], 其主要装置是通过一组马赫-曾德尔(Mach-Zehnder)干涉仪级联构成。考虑到延拓后的 $\mathcal{Q}(x)$ 的连续性, 可以对 $\mathcal{Q}(x)$ 关于 $x = D$ 作偶延拓, 周期为 $2D$, 如图 1 所示。

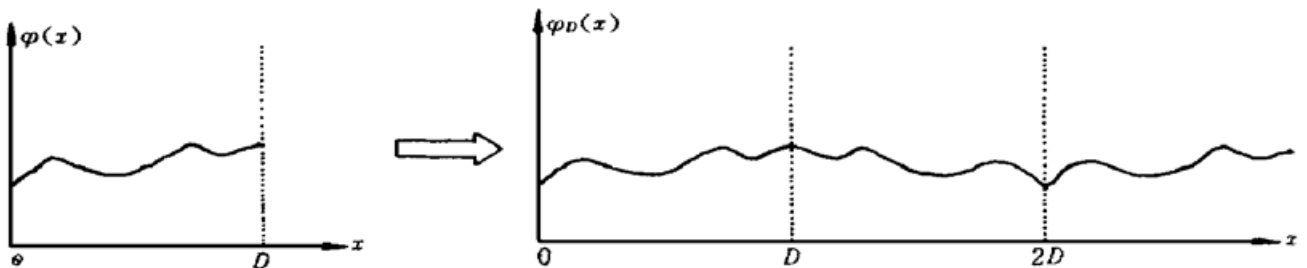


Fig. 1 The prolongation of $\mathcal{Q}(x)$

利用延拓后的 $\mathcal{Q}(x)$ 进行剪切, 见图 2。由 $\mathcal{Q}(x)$ 的周期性可知, $h_D(x)$ 也是一周期为 $2D$ 、且关于 $x = s/2$ 的奇周期函数。也就是说, $h_D(x)$ 上任一段区间长度为 D 的信号是独立的, 可完全代表 $h_D(x)$ 的信息, 不妨取 $h_D(x)$, $x \in [s/2, D + s/2]$ 来重构 $\mathcal{Q}(x)$, $x \in [0,$

$D]$ 。将 $h_D(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ 分别进行采样得 $\mathcal{Q}^D = \mathcal{Q}(iD/N)$, $h_i^D = h_D(s/2 + iD/N)$, $i = 0, \dots, N - 1$ 。设 $[0, s)$ 上有 k 个采样点, k 为偶数, 则延拓后的剪切干涉方程的离散形式为

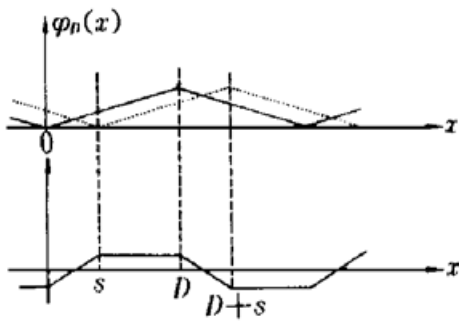


Fig. 2 Sheared wavefront section along the axis x

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}_{i+\frac{k}{2}}^D - \mathcal{Q}_{i-\frac{k}{2}}^D &= h_i^D, & i &= 0, \dots, \frac{k}{2} - 1, \\ \mathcal{Q}_{i+\frac{k}{2}}^D - \mathcal{Q}_{i-\frac{k}{2}}^D &= h_i^D, & i &= k, \dots, N - \frac{k}{2} - 1, \\ \mathcal{Q}_{2N-i-\frac{k}{2}-1}^D - \mathcal{Q}_{i-\frac{k}{2}}^D &= h_i^D, & i &= N - \frac{k}{2}, \dots, N - 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

从方程(6)可以看出, 常规的剪切干涉所得的离散化方程(5)仅是方程(6)中的第二组方程, 对应于图2中的 $x \in [s, D]$ 段。记 $\Phi_D = (\mathcal{Q}_0^D, \dots, \mathcal{Q}_{N-1}^D)$, $H_D = (h_0^D, \dots, h_{N-1}^D)$, 则方程(6)可记为

$$A_D \Phi_D = H_D, \quad (7)$$

其中, A_D 的各元素取值为

$$\begin{aligned} A_{i, i+k/2} &= 1, & A_{i, k/2-i} &= -1, & i &= 0, \dots, k/2 - 1, \\ A_{i, i+k/2} &= 1, & A_{i, i-k/2} &= -1, & i &= k/2, \dots, N - k/2 - 1, \\ A_{i, 2N-i-k/2-1} &= 1, & A_{i, i-k/2} &= -1, & i &= N - k/2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

若 $|A_D| \neq 0$, 则由 H_D 可以完全恢复 $\Phi_D = A_D^{-1} H_D$, 即由延拓剪切干涉所得干涉条纹可以完全恢复离散光波前相位。

定义(7)式所给出的矩阵 A_D 为周期延拓剪切矩阵。对矩阵 A_D 的进一步研究有如下命题。

命题1: 只有当 N 与 k 的取值满足

$$N = [P(k/2)(2m + 1) + 1]/2 \quad k < N, m = 2, 3, 4, \dots \quad (8)$$

时, $|A_D| = 0$; 其它取值时, $|A_D| = \pm 1$ 。其中 $P(x)$ 表示整数 x 的最小素数分解, 所分解的素数中2除外, 例如 $\{P(30)\} = \{3, 5\}$, $\{P(16)\} = \emptyset$, $\{P(42)\} = \{3, 7\}$ 。

利用数学归纳法可以证明, 命题1是成立的。

这样, 如果选取 N 与 k 的值时避开(8)式所表示的条件, 就可以使得 $|A_D| \neq 0$, 从而完全恢复离散波前相位。并且通过对 $|A_D|$ 的计算, 对于相位恢复的快速算法的稳定性分析是很有效的。

通过以上的分析可以看出因空间截取造成的信息损失已经由周期延拓剪切干涉加以修正。下面来看看空间频率的情形。

由于 $\mathcal{Q}(x)$, $h_D(x)$ 均是周期为 $2D$ 的周期函数, 因而可将 $\mathcal{Q}(x)$ 、 $h_D(x)$ 用傅里叶级数展开:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_D(n\omega) \exp(jn\omega x), & \Phi_D(n\omega) &= \frac{1}{2D} \int_0^{2D} \mathcal{Q}(x) \exp(-jn\omega x) dx, \\ h_D(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_D(n\omega) \exp(jn\omega x), & H_D(n\omega) &= \frac{1}{2D} \int_{s/2}^{2D+s/2} h_D(x) \exp(-jn\omega x) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathcal{Q}(x - s) = \exp(jn\omega s) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_D(n\omega) \exp(jn\omega x), \quad \omega = \frac{\pi}{D}.$$

由 $h_D(x) = \mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x - s)$ 可推得

$$\mathbf{H}_D(n\omega) = [1 - \exp(jn\omega s)] \Phi_D(n\omega). \quad (10)$$

(10) 式指出了 $\mathcal{Q}(x)$ 与 $h_D(x)$ 的离散频谱之间的关系, 如果按照上文所述的采样关系, 则有

$$n\omega s = n\pi(s/D) = 2\pi(nk/2N). \quad (11)$$

结合(10)式、(11)式可以发现, 当 $n(k/2)$ 是 N 的整数倍时, $\mathbf{H}_D(n\omega)$ 中便不再含有 $\Phi_D(n\omega)$ 的信息。因而若要提高重构精度, 使 $\Phi_D(n\omega)$ 的谱成分在 $\mathbf{H}_D(n\omega)$ 中得到更多的保留, 必须适当选取 k 与 N 的取值。

命题 2: 当采样点 N 给定后, 若 $k/2$ 的取值与 N 互为质数, 则 $\mathbf{H}_D(n\omega)$ 中一定含有 $\Phi_D(n\omega)$ 的 $n < N$ 的谱分量。若 $\Phi_D(n\omega)$ 为有限带宽信号 [$\Phi_D(n\omega) = 0, n \geq N$], 则在上述取值情况下, 由 $\mathbf{H}_D(n\omega)$ 可以完全恢复 $\Phi_D(x)$ 。

显然, 命题 2 是成立的。可见, 按命题 2 方式的 k 与 N 的取值可以使重构的 $\mathcal{Q}(x)$ 的频谱分量增加, 从而提高重构精度。

3 数值模拟

3.1 周期延拓剪切矩阵 A_D 的行列式值的计算

由于周期延拓剪切矩阵 A_D 的行列式值是延拓剪切干涉能否恢复相位的判断标准, 对 $|A_D|$ 的计算或对 $|A_D|$ 与 N 、 k 的关系的研究比较关键。通过数值计算表明: 当 $[0, s)$ 上的采样点数 k 满足 $k = 2^n (n > 0)$, $k < N$ 时, $|A_D| \neq 0$ 。

当 $k \neq 2^n$: $k = 6, N = 8, 11, 14, 17, \dots$; $k = 10, N = 13, 18, 23, \dots$; $k = 12, N = 14, 17, 20, \dots$; $k = 14, N = 18, 25, 32, \dots$; \dots 时, $|A_D| = 0$; 其它 N 取值时 $|A_D| \neq 0$ 。从计算中可以看出, 命题 1 的结论是正确的。

3.2 线性恢复波前相位

图 3 给出了一例线性恢复波前相位的数值模拟实例。图中 $\mathcal{Q}(x)$ 与 $\mathcal{Q}'(x)$ 分别为初始相位和恢复后的相位。 $h_D(x)$ 周期延拓剪切后的 $x \in [s/2, D + s/2]$ 段。实例中, $N = 64, k = 4$ 。为方便比较, 图中将 $h_D(x), x \in [s/2, D + s/2]$ 与 $\mathcal{Q}(x), x \in [0, D]$ 按采样点一一对应, 图 4、图 5 亦如此。

3.3 快速傅里叶变换算法实现波前恢复

利用线性算法实现波前相位的恢复虽然简单, 但若采样点较多时运算量很大。而利用快速傅里叶变换算法来实现, 可以大大减少

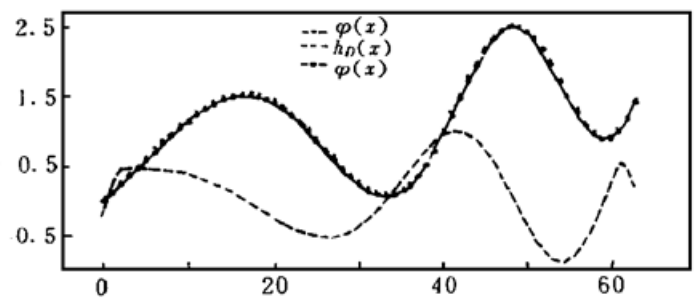


Fig. 3 Linear numerical simulation of wavefront reconstruction

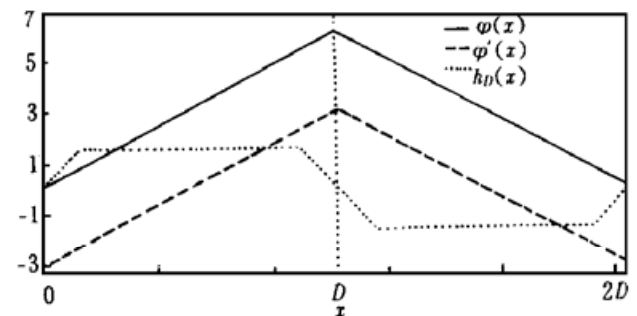
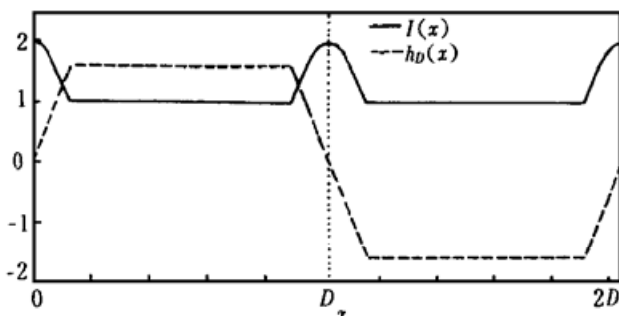


Fig. 4 Numerical simulation of reconstruction of inclined wavefront with FFT

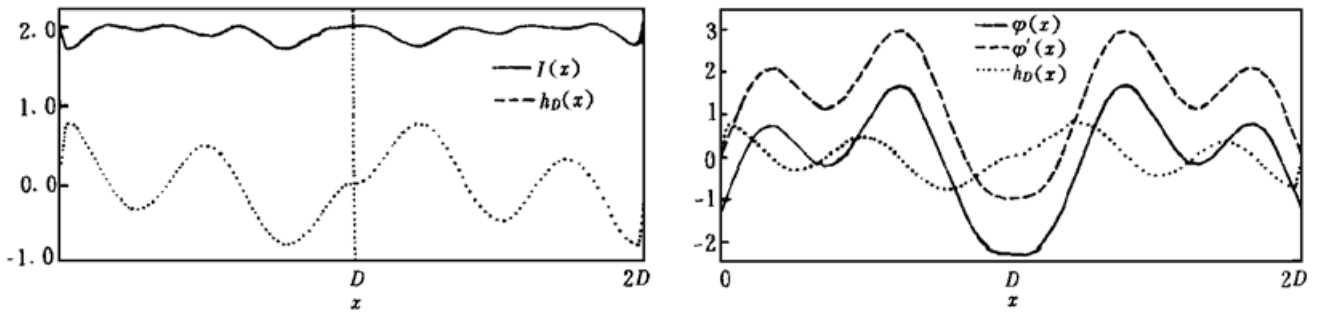


Fig. 5 Numerical simulation of reconstruction of wavefront with FFT

运算量。基本过程为：对延拓剪切干涉条纹的空间分布 $I(x)$, $x \in [0, 2D]$ (如图 4、图 5) 进行采样，用采样值计算出 $h_D(x)$ 的离散值。将这些离散值进行快速傅里叶变换，将变换值利用(9)式运算得出 $\mathcal{Q}(x)$ 在频域的离散值。反变换后即求得重构波前 $\varphi(x)$ 。图 4 是对波前倾斜的相位恢复的数值模拟例。从图 4 可看出，延拓剪切干涉对波前倾斜的检测是有效的。数值实验中取 $D = 31$ 单位， $s = 7.9$ 单位，采样点为 $N = 1024$ 。图 5 是对一较复杂波前的相位恢复。其中， $D = 31$ 单位， $s = 1.3$ 单位。

结 论 本文从数学原理的角度提出和分析了波前延拓剪切干涉，指出波前延拓剪切干涉是在数学方法上对常规剪切干涉的延伸，并证明了它的可行性。波前延拓剪切干涉利用了函数周期解析延拓的概念，从而在波前信息的完整性和波前重构算法上较常规剪切干涉有了明显的改进。从数学原理上讲，波前延拓剪切干涉对波前信息的保持是完整的，通过适当的波前恢复算法可以完全重构波前，并且用重构算法加以实现也很方便。另外波前延拓剪切干涉用光学方法加以实现也并不复杂，因而它在波前传感与波前检测方面将会得到应用。

参 考 文 献

- [1] Hardy J W, Lefevre J E, Koliopoulos C L. Real-time atmospheric compensation. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3) : 360~ 369
- [2] Roddier F. Curvature sensing and compensation: A new concept in adaptive optics. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(7) : 1223~ 1225
- [3] Shekhtman V N, Rodionov A Y, Pelmenev A G. Reconstruction of a light beam wavefront by synthesis of a shear interferogram. In: *High Power Lasers-Science and Engineering*. R. Kossowsky (ed.) 1996. 433~ 447

Mathematics and Numerical Simulation of Shear Interference with Prolongation of Wavefront

Xu Xiaojun Lu Qisheng Jiang Zongfu Liu Zejin

(Department of Applied Physics, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

(Received 5 October 1998; revised 7 December 1998)

Abstract Considering the defect of conventional shear interference, it is tested by means of the mathematics and numerical simulation that the shear interference with prolongation wavefront can overcome those drawbacks. The numerical simulation process of wavefront reconstruction with this shear interferometer is given.

Key words wavefront reconstruction, shear interference, numerical simulation.