

椭圆傅里叶级数展开法和 椭圆光波导的截止频率

汪业衡 张 翔

(上海传输线研究所, 上海 200437)

摘 要 与严格马丢(Mathieu)函数法、有限元法等许多典型方法及一些实验测试的比较表明, 本文提出的计算弱导椭圆光波导的椭圆傅里叶级数展开法具有通用、准确、高效、简便的优点。

关键词 光波导理论, 模式分析, 椭圆光波导, 矩量法, 傅里叶级数。

1 引 言

几十年来在椭圆光波导模式分析中, 采用了几乎所有典型的方法^[1-16], 包括准确马丢函数法、有限元法、有限差分法、积分方程法、点匹配法、模匹配法、频移公式法、近似马丢函数法和微扰法等。然而, 很多问题还没有得到解决, 甚至对弱导阶梯形剖面椭圆光波导的截止频率, 迄今为止仍然存在争论。

为了准确简便地计算各种椭圆光波导的截止频率, 本文提出椭圆傅里叶级数展开法。原则上这种方法可用于均匀包层一般芯线折射率剖面弱导椭圆光波导, 本文只给出阶梯形剖面光波导的计算数据, 并进行分析比较。

与传统方法相比, 本方法有如下特点:

1) 数学模型用具有已知边界条件的椭圆域上的本征值问题取代内、外椭圆域上匹配的本征值问题;

2) 在椭圆域上待求场函数展开为完备的正交函数系;

3) 用满足边界条件的三角函数取代马丢类函数作为基函数。

这些特点导致如下优点:

1) 通用性: 适于分析均匀包层椭圆芯线光波导, 即使芯线折射率剖面是任意的; b/a 值可小到 0.001;

2) 准确性: 与严格马丢函数法^[4, 6]、有限元法^[7]、频移公式法^[8]一致性很好, 优于其他数值方法和近似方法;

3) 效率: 显著优于严格马丢函数法、有限元法和频移公式法;

4) 简便性: 易于理解和编制程序。

2 数学原理

在椭圆坐标系 (ξ, η) 下讨论均匀包层椭圆光波导的弱导分析。

截止条件下, 均匀包层 $\xi \geq \xi_0$ 中场函数有形式解

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_n C_n \exp[-n(\xi - \xi_0)] \begin{cases} \cos n\eta, \\ \sin n\eta, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}$ 表示芯线/包层边界。

根据已知形式解(1)式, 可计算截止频率。此时在椭圆芯线中标量波方程可写成

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{-2} - 1 \right] V_c^2 g(\xi, \eta) (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \right\} \Phi_{\xi, \eta} = 0, \quad (2)$$

式中
$$V_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} b \sqrt{n_1^2 - n_2^2},$$

$$g(\xi, \eta) = \frac{n^2(\xi, \eta) - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2},$$

对于阶梯形折射率剖面

$$g(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{芯线} \\ 0, & \text{包层} \end{cases}$$

其中 λ_c 为自由空间的截止波长, $n(\xi, \eta)$ 表示折射率分布, n_1 和 n_2 分别为芯线和包层的相对折射率。

在芯线中场函数可展开为

$$\Phi_{\xi, \eta} = \sum_m \sum_n a_{mn} F_{mn}(\xi) G_n(\eta), \quad (3)$$

式中 $F_{mn}(\xi)$ 和 $G_n(\eta)$ 是满足边界条件和正交条件的基函数, a_{mn} 为待定系数。

因为椭圆有两个相互垂直的对称轴, 上式可按奇偶对称性分别写成四种形式:

$$\left. \begin{aligned} k=1, \quad E^1 \text{ 模:} \quad \Phi_{\xi, \eta} &= \sum_{m=0, 2, 4, \dots} \sum_{n=0, 2, 4, \dots} a_{mn} F_{mn}(\xi) G_n(\eta), \\ k=2, \quad E^2 \text{ 模:} \quad \Phi_{\xi, \eta} &= \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{mn} F_{mn}(\xi) G_n(\eta), \\ k=3, \quad E^3 \text{ 模:} \quad \Phi_{\xi, \eta} &= \sum_{m=2, 4, 6, \dots} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} a_{mn} F_{mn}(\xi) G_n(\eta), \\ k=4, \quad E^4 \text{ 模:} \quad \Phi_{\xi, \eta} &= \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{mn} F_{mn}(\xi) G_n(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中
$$\left. \begin{aligned} F_{mn}(\xi) &= \frac{\cos(u_{mn}\xi/\xi_0)}{\cos(u_{mn})}, \\ G_n(\eta) &= \cos(n\eta), \end{aligned} \right\} \quad k=1, 2,$$

$$\left. \begin{aligned} F_{mn}(\xi) &= \frac{\sin(u_{mn}\xi/\xi_0)}{\sin(u_{mn})}, \\ G_n(\eta) &= \sin(n\eta), \end{aligned} \right\} \quad k=3, 4$$

在椭圆坐标系中, 主轴在两焦点之间对应于 $\xi = 0$, 在两焦点之外对应于 $\eta = 0$ 和 $\eta = \pi$ 。为保证场函数沿主轴的连续性, 舍弃如下基函数选择:

$$F_{mn}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(u_{mn}\xi/\xi_0)}{\sin(u_{mn})}, & k = 1, 2 \\ \frac{\cos(u_{mn}\xi/\xi_0)}{\cos u_{mn}}, & k = 3, 4 \end{cases}$$

在 $\xi = \xi_0$ 处边界条件

$$\left. \begin{aligned} u_{mn} \tan u_{mn} &= n\xi_0, \\ u_{mn} \cot u_{mn} &= -n\xi_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

保证场函数及其法向一阶导数沿芯线/包层边界的连续性。容易验证在此条件下 n 固定、 m 不同的 $F_{mn}(\xi)$ 在区间 $[0, \xi_0]$ 构成完备的正交函数系。

按照迦辽金(Galerkin)方法, (2)式两端乘以 $F_{m'n'}(\xi)G_{n'}(\eta)$, 在椭圆域 $\xi = [0, \xi_0]$, $\eta = [0, 2\pi]$ 上积分, 可得到计算椭圆光波导归一化截止频率 V_c 的本征方程组:

$$\sum_m \sum_n \left\{ - \left(\frac{u_{mn}^2}{\xi_0^2} + n^2 \right) \langle F_{mn} F_{m'n'} G_n G_{n'} \rangle + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{-2} - 1 \right] V_c^2 \times \right. \\ \left. [\langle \dot{g}(\xi, \eta) \cosh 2\xi F_{mn} F_{m'n'} G_n G_{n'} \rangle - \langle \dot{g}(\xi, \eta) F_{mn} F_{m'n'} \cos 2\eta G_n G_{n'} \rangle] \right\} = 0, \quad (6)$$

式中内积形式为 $\langle X, Y \rangle = \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} X Y d\xi d\eta$ 。

对于阶梯形折射率剖面有

$$\left. \begin{aligned} \langle F_{mn} F_{m'n'} G_n G_{n'} \rangle &= \int_0^{\xi_0} F_{mn}(\xi) F_{m'n'}(\xi) d\xi \int_0^{2\pi} G_n(\eta) G_{n'}(\eta) d\eta, \\ \langle \dot{g}(\xi, \eta) \cos 2\xi F_{mn} F_{m'n'} G_n G_{n'} \rangle &= \int_0^{2\pi} G_n(\eta) G_{n'}(\eta) d\eta \int_0^{\xi_0} \cosh 2\xi F_{mn}(\xi) F_{m'n'}(\xi) d\xi, \\ \langle \dot{g}(\xi, \eta) F_{mn} F_{m'n'} \cos 2\eta G_n G_{n'} \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos 2\eta G_n(\eta) G_{n'}(\eta) d\eta \int_0^{\xi_0} F_{mn}(\xi) F_{m'n'}(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

因为(7)式中所有内积都可写成解析形式, 用椭圆傅里叶级数展开法计算阶梯形折射率剖面椭圆光波导的截止频率特别便捷。对于其他折射率剖面计算复杂一些, 原理上没有困难。

若给定 b/a (或 a/b , 等效), 将对应于给定 k 的场函数表达式(6), 该本征行列式的本征值即为所求 V_c 的上限解(近似解总大于准确解)。

本文所用模式命名类似于文献[2]。考虑到本征方程组具体形式不同, 用 $k = 1, 2, 3, 4$ 代替文献[2]中的 $k = \text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}$ 。为了说明 V_c 与 b/a (或 a/b) 的依存关系, 补充了宗量 b/a (或 a/b)。要注意的是不同宗量对应不同波导, 当然模式也不相同。只要 b/a 不同, 即使 k 和 n 相同, $E_n^k(b/a)$ 模也是不同的。

3 数值结果

本节给出了椭圆傅里叶级数展开法计算的阶梯形剖面弱导椭圆光波导的 V_c 值, 并说明其收敛性和误差。

文献[2, 7, 8, 12, 13, 14, 16]给出的椭圆光波导 V_c 的数值解一般对应于 $a/b = 1.0$ 到

2.0 或 5.0, (也有不少情况的 V_c 曲线对应于 $b/a = 0 \sim 1.0$ 。) 而本文的数值解对应于 $b/a = 0.001 \sim 0.909$ 。椭圆坐标系在 $b/a = 1.0$ 时奇异。 $\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}$ 在 b/a 接近于 1.0 时非常大, 因而导致误差增大。为保证数据可靠性, b/a 上限暂取 0.909。幸好在 b/a 接近于 1.0 时有其他计算方法可用。

表 1 所列是椭圆光波导前 12 个模(包括基模)的 V_c 值。在方括号内列出圆光纤的解析解作为参考, 每一列中数据按大小顺序排列。从表 1 可以看出, 对于所有 b/a 值, 基模 $V_c = 0$, 第一高次模都是 E_1^2 模, 其 V_c 值从 $b/a \rightarrow 0$ 时的 0 单调上升到 $b/a \rightarrow 1.0$ 时的 2.405。其他高次模截止频率 V_c 的排列顺序, 一般与 b/a (或 a/b) 有关。若 b/a 变化较小, 只讨论阶数较低的高次模, 这种依存关系不明显。例如当 $b/a = 1.1 \sim 2.0$, 前 4 个高次模排列顺序相同。

Table 1. V_c for the first 12 modes calculated by the EFSEM

$b/a = 1.0$	0.909	0.833	0.667	0.500	0.200	0.100	0.020	0.010	0.002	0.001
$a/b = 1.0$	1.100	1.200	1.500	2.000	5.00	10.00	50.000	100.000	500.000	1000.000
[0]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
LP ₀₁	E_1^1	E_1^1	E_1^1	E_1^1	E_1^1	E_1^1	E_1^1	E_1^1	E_1^1	E_1^1
[2.405]	2.240	2.101	1.791	1.468	0.824	0.554	0.237	0.167	0.074	0.052
LP ₁₁	E_1^2	E_1^2	E_1^2	E_1^2	E_1^2	E_1^2	E_1^2	E_1^2	E_1^2	E_1^2
	2.349	2.302	2.193	2.076	1.137	0.739	0.306	0.214	0.095	0.067
	E_1^4	E_1^4	E_1^4	E_1^4	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2
[3.832]	3.534	3.285	2.736	2.181	1.490	0.943	0.378	0.263	0.116	0.082
LP ₂₁	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_2^2
LP ₀₂	3.657	3.510	3.182	2.846	1.785	1.104	0.430	0.298	0.131	0.093
	E_1^3	E_1^3	E_1^3	E_1^3	E_3^1	E_3^1	E_3^1	E_3^1	E_3^1	E_3^1
	3.780	3.737	3.639	2.981	1.832	1.280	0.486	0.336	0.147	0.104
	E_3^1	E_3^1	E_3^1	E_2^2	E_1^4	E_3^2	E_3^2	E_3^2	E_3^2	E_3^2
[5.136]	4.856	4.550	3.782	3.520	2.109	1.434	0.532	0.365	0.160	0.112
LP ₃₁	E_2^2	E_2^2	E_2^2	E_3^1	E_3^2	E_4^1	E_4^1	E_4^1	E_4^1	E_4^1
	4.877	4.640	4.095	3.537	2.197	1.599	0.580	0.397	0.173	0.122
	E_2^4	E_2^4	E_2^4	E_2^4	E_1^3	E_4^2	E_4^2	E_4^2	E_4^2	E_4^2
[5.520]	5.189	4.985	4.629	3.734	2.402	1.730	0.622	0.424	0.184	0.129
LP ₁₂	E_3^2	E_3^2	E_3^2	E_4^1	E_4^1	E_1^4	E_5^1	E_5^1	E_5^1	E_5^1
	5.419	5.356	4.757	4.232	2.495	1.750	0.666	0.452	0.195	0.137
	E_3^4	E_3^4	E_4^1	E_2^3	E_2^4	E_5^1	E_5^2	E_5^2	E_5^2	E_5^2
[6.380]	6.056	5.714	5.012	4.293	2.717	1.910	0.705	0.477	0.205	0.144
LP ₄₁	E_4^1	E_4^1	E_2^3	E_3^2	E_2^4	E_5^2	E_6^1	E_6^1	E_6^1	E_6^1
	6.059	5.754	5.237	4.487	2.787	1.947	0.746	0.503	0.215	0.152
	E_2^3	E_2^3	E_3^4	E_4^2	E_2^3	E_1^3	E_6^2	E_6^2	E_6^2	E_6^2

b/a 接近于 1.0 的椭圆光波导不同于 $b/a = 1.0$ 的圆光纤, 因而表中在两种情况下使用了不同的模式命名方法。模的简并情况如表所示。

当 b/a 接近于但不等于 0 时, 椭圆光波导中有很多高次模。从表 1 可知当 $b/a = 0.01 \sim 0.001$ 时前 12 个模都属于 E_n^1 模和 E_n^2 模, 这种排列顺序显然不同于 b/a 接近于 1.0 时的情况。

当 $b/a = 0$ 结构成为平板波导, 高次模简并, $V_c = l \frac{\pi}{2}$, $l = 0, 1, 2, \dots$ (表 1 中只列出 $l = 0$

的情况)。

$b/a = 0.909$ 和 0.001 两种情况下 V_c 计算值的收敛情况示于表 2。为保证前 12 个模有足够的准确度, 表 1 所列数据是在 14×14 展开时算出的。

Table 2. Convergence of V_c for the first high order modes in two extreme cases

b/a	mode	number of terms			b/a	mode	number of terms		
		10×10	12×12	14×14			10×10	12×12	14×14
0.909	E_1^2	2.240	2.240	2.240	0.001	E_1^2	0.052	0.052	0.052
	E_1^4	2.349	2.349	2.349		E_2^1	0.067	0.067	0.067
	E_2^1	3.534	3.534	3.534		E_2^2	0.082	0.082	0.082
	E_1^3	3.657	3.657	3.657		E_3^1	0.093	0.093	0.093
	E_3^1	3.780	3.780	3.780		E_3^2	0.104	0.104	0.104
	E_2^2	4.857	4.857	4.856		E_4^1	0.112	0.112	0.112
	E_2^4	4.877	4.877	4.877		E_4^2	0.122	0.122	0.122
	E_3^2	5.189	5.189	5.188		E_5^1	0.130	0.129	0.129
	E_3^4	5.419	5.419	5.419		E_5^2	0.138	0.137	0.137
	E_4^1	6.056	6.056	6.056		E_6^1	0.149	0.145	0.144
E_3^3	6.060	6.060	6.059	E_6^2	0.159	0.152	0.152		

值得指出, 存在两个因素使 b/a 的减小有利于 V_c 的计算准确度。第一, ξ_0 随 b/a 的减小而减小; 第二, 若(2)式和(6)式中 $[(\frac{b}{a})^{-2} - 1]V_c^2$ 的误差一定, V_c 的误差随 b/a 减小而减小。因此即使 b/a 很小, 算出的 V_c 值仍然可靠。

直观地看, 表 2 似乎揭示 $b/a = 0.001$ 时收敛性不如 $b/a = 0.909$ 时的情况。进一步分析表明收敛性不很理想的模是 E_n^k 模中 n 比较大的模, 它们需要较多的展开项数。由此可以认为这种收敛性的变化主要不是 b/a 值小引起的。

4 讨 论

将椭圆傅里叶级数展开法与有限元法等许多典型数值方法和近似方法进行比较。

4.1 和严格马丢函数法(PMFM)^[4, 6]的比较

椭圆傅里叶级数展开法(EFSEM)和严格马丢函数法算出的第一高次模 V_c 值列于表 3。严格马丢函数法计算条件是 $n_1 = 1.46$, $n_2 = 1.34$ 。据文献[4], 该条件下算出的 V_c 与理想弱导条件相比变化并不显著。若不计及此影响, 两种方法算出的数据差异约为 1~ 2%。

Table 3. V_c for the first high order mode computed by the EFSEM and the PMFM^[4]

a/b	size of characteristic determinant PMFM				number of terms EFSEM			
	1×1	3×3	5×5	7×7	4×4	6×6	10×10	14×14
1.1	2.296	2.237	2.237		2.240	2.240	2.240	2.240
1.5	2.040	1.777	1.778	1.778	1.791	1.791	1.791	1.791
2.0	1.890	1.448	1.451	1.451	1.468	1.468	1.468	1.468
4.0	1.709	0.916	0.925	0.925	0.942	0.942	0.942	0.942
10.0	1.616	0.526	0.547	0.547	0.554	0.554	0.554	0.554
20.0	1.591	0.351	0.380	0.379	0.381	0.381	0.381	0.381

根据文献[6], $n_1 = 1.46$ 和 $n_2 = 1.34$ 时偶模和奇模的截止曲线实际上相同。(为简便起见, 将其中图3和图4复制成本文图1。)行列式算到9阶。马丢函数用正、余弦函数级数展开。修正马丢函数用贝塞尔函数乘积级数展开, 展开项数达100。作为比较, 图1中用数据点表示椭圆傅里叶级数展开法的计算结果。

弱导近似下极化修正可忽略不计, 椭圆傅里叶级数展开法算出的每一个 V_c 值对应于严格马丢函数法算出的一对偶模和奇模 V_c 值。

落在各曲线上的数据点显示这二种方法中模式有下述对应关系:

PMFM ^[6]	EH ₀₁ , HE ₀₁	HE ₂₁ , HE ₂₁	EH ₁₁ , EH ₁₁	HE ₁₂ , HE ₁₂	EH ₂₁ , HE ₂₁
EFSEM	E ₁ ²	E ₁ ⁴	E ₂ ²	E ₁ ³	E ₂ ²

在严格马丢函数法计算的 HE₃₁ 模曲线附近, 有本方法的 E_n¹ (n > 3) 模数据点。例如 E₃¹ (0.833) 模、E₃¹ (0.667) 模、E₃¹ (0.500) 模、E₄¹ (0.450) 模、E₄¹ (0.400) 模、E₅¹ (0.300) 模、E₆¹ (0.200) 模和 E₇¹ (0.100) 模等数据点。HE₃₁ 模曲线所示 V_c 值显然略大于弱导分析的结果。例如在 $b/a = 1.0$ 时曲线显示 $V_c = 3.90$, 而弱导近似算出的 V_c 是 3.83。

落在各曲线之间的其他数据点定量验证了文献[6]的如下说明: 随着 b/a 减小, 有些高次模截止频率落在这12个模截止曲线之间。 b/a 值特别小时许多其他高次模截止频率介于EH₀₁ (HE₀₁) 模和HE₂₁ (HE₂₁) 模截止曲线之间。当 $b/a \rightarrow 0$ 时有无限多高次模截止频率在上述讨论范围之内。对于所有 b/a 值EH₀₁ 模和HE₀₁ 模分别是第一高次奇模和偶模。

4.2 与有限元法(FEM)^[7]和频移公式法(SFM)^[8]比较

椭圆傅里叶级数展开法适于在很宽的 a/b 范围内计算截止频率。然而由于已发表的有限元法和频移公式法计算数据的限制, 表4中仅限于 $a/b = 1.2 \sim 2.0$ 作比较。

Table 4. V_c for the first 12 modes calculated by the EFSEM, the FEM^[7] and the SFM^[8]

$a/b = 1.2$			$a/b = 1.5$				$a/b = 2.0$			
mode	EFSEM	FEM	mode	EFSEM	FEM	SFM	mode	EFSEM	FEM	SFM
E ₁ ¹	0	0	E ₁ ¹	0	0	0	E ₁ ¹	0	0	0
E ₁ ²	2.101	2.102	E ₁ ²	1.791	1.791	1.791	E ₁ ²	1.468	1.467	1.468
E ₁ ⁴	2.302	2.303	E ₁ ⁴	2.193	2.193	2.193	E ₁ ⁴	2.076	2.077	2.076
E ₂ ¹	3.285	3.286	E ₂ ¹	2.736	2.736	2.736	E ₂ ¹	2.181	2.180	2.181
E ₁ ³	3.510	3.509	E ₁ ³	3.182	3.182	3.183	E ₁ ³	2.846	2.846	2.849
E ₃ ¹	3.737	3.738	E ₃ ¹	3.639	3.638	3.639	E ₂ ²	2.981	2.981	2.983
E ₂ ²	4.550	4.552	E ₂ ²	3.782	3.782	3.783	E ₃ ¹	3.520	3.522	3.522
E ₂ ⁴	4.640	4.643	E ₂ ⁴	4.095	4.097	4.096	E ₂ ⁴	3.537	3.537	3.541
E ₃ ²	4.985	4.989	E ₃ ²	4.629	4.631	4.63	E ₄ ¹	3.734	3.738	
E ₃ ⁴	5.356	5.356	E ₄ ¹	4.757	4.763		E ₃ ²	4.232	4.238	
E ₄ ¹	5.714	5.721	E ₃ ³	5.012	5.017		E ₃ ³	4.293	4.295	4.296
E ₂ ³	5.754	5.759	E ₃ ⁴	5.237	5.237	5.239	E ₄ ²	4.487	4.496	

由表4可以看出, 在上述 a/b 范围内, 椭圆傅里叶级数展开法、有限元法和频移公式法

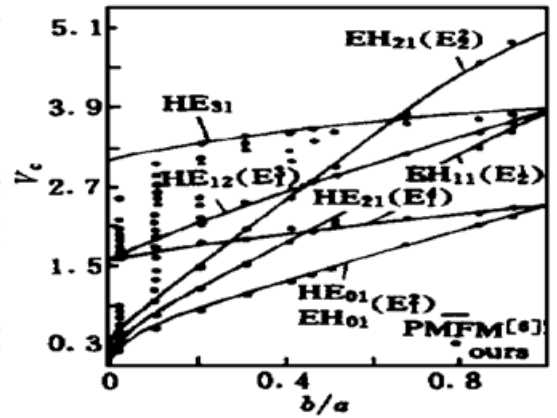


Fig. 1 V_c for even and odd modes, comparison between the PMFM and the EFSEM

算出的相应数据一致性极好。

与有限元法比较,椭圆傅里叶级数展开法避免了截面剖分、曲线边界模型处理和无限外区域模型处理,因而比较简单。

与频移公式法比较,椭圆傅里叶级数展开法无需计算贝塞尔函数和进行数值积分,因而计算速度较快。

4.3 与积分方程法(IEM)^[2]和标量马丢函数法(SMFM)^[12]比较

比较示于表 5。作为参考,表中列出了圆光纤准确解和相应的 LP 模式命名。当 $a/b = 1$ 时椭圆坐标系奇异,此时标量马丢函数法列出的数据实际上是在 $b/a = 0.99$ 时计算的。* 号转引自文献[2]中的表 III;该文献认为 E_2^{II} 模和 E_3^{II} 模的 V_c 值在 $a/b = 1.2 \sim 2.0$ 范围内需要交换。每一列中各个模按椭圆傅里叶级数展开法计算的 V_c 值大小排列,模式命名之间有对应关系。

EFSEM	E_k^{I}	E_k^{II}	E_k^{III}	E_k^{IV}
IEM ^[2]	E_k^{I}	E_k^{II}	E_k^{III}	E_k^{IV}
SMFM ^[12]	a_{0k}	a_{1k}	b_{2k}	b_{1k}

Table 5. V_c calculated by the EFSEM, the IEM^[2] and the SMFM^[12]

	$a/b = 1.0$		$a/b = 1.2$			$a/b = 1.5$			$a/b = 2.0$		
exact	IEM	SMFM	EFSEM	IEM	SMFM	EFSEM	IEM	SMFM	EFSEM	IEM	SMFM
LP ₁₁ 2.405	E_1^{II} 2.45	a_{11} 2.44	E_1^{I} 2.101	E_1^{II} 2.14	a_{11} 2.18	E_1^{I} 1.791	E_1^{II} 1.82	a_{11} 1.81	E_1^{I} 1.468	E_1^{II} 1.51	a_{11} 1.51
	E_1^{IV} 2.45	b_{11} 2.44	E_1^{IV} 2.302	E_1^{IV} 2.32	b_{11} 2.35	E_1^{IV} 2.193	E_1^{IV} 2.26	b_{11} 2.26	E_1^{IV} 2.076	E_1^{IV} 2.1	b_{11} 2.1
LP ₂₁ LP ₀₂ 3.832	E_2^{I} 3.86	a_{02} 3.86	E_2^{I} 3.285	E_2^{I} 3.36	a_{02} 3.4	E_2^{I} 2.736	E_2^{I} 2.80	a_{02} 2.84	E_2^{I} 2.181	E_2^{I} 2.26	a_{02} 2.26
	E_1^{III} 3.86	b_{21} 3.86	E_1^{III} 3.510	E_1^{III} 3.52	b_{21} 3.54	E_1^{III} 3.182	E_1^{III} 3.17	b_{21} 3.19	E_1^{III} 2.846	E_1^{III} 2.89	b_{21} 2.89
LP ₃₁ 5.136	E_2^{II} 5.18	a_{12} 5.1	E_2^{II} 4.550	E_2^{II} 5.00*	a_{12} 4.62	E_2^{II} 3.782	E_2^{II} 4.65*	a_{12} 3.83	E_3^{I} 3.520	E_3^{I} 3.61	a_{03} 3.63
	E_2^{IV} 5.18	b_{12} 5.12	E_2^{IV} 4.640	E_2^{IV} 4.65	b_{12} 4.66	E_2^{IV} 4.095	E_2^{IV} 4.08	b_{12} 4.1	E_2^{IV} 3.537	E_2^{IV} 3.55	b_{12} 3.52
LP ₁₂ 5.520	E_3^{II} 5.56	a_{13} 5.61	E_3^{II} 4.985	E_3^{II} 4.59*	a_{13} 5.00	E_3^{II} 4.629	E_3^{II} 3.83*	a_{13} 4.64	E_4^{I} 3.734	E_4^{I} 3.77	a_{04} 4.64
	E_3^{IV} 5.56	b_{13} 5.61	E_3^{IV} 5.356	E_3^{IV} 5.40	b_{13} 5.43	E_4^{I} 4.757	E_4^{I} 4.78	a_{04} 5.35	E_3^{II} 4.232	E_2^{III} 4.24	b_{22} 4.2
LP ₄₁ 6.380	E_2^{III} 6.38	b_{22} 6.39	E_4^{I} 5.714	E_4^{I} 5.72	a_{04} 6.2	E_3^{II} 5.012	E_2^{III} 5.18	b_{22} 5.1	E_3^{II} 4.293	E_3^{II} 3.01*	a_{13} 4.4
	E_4^{I} 6.38	a_{04} 6.95	E_2^{III} 5.754	E_2^{III} 5.75	b_{22} 5.8	E_3^{IV} 5.237	E_3^{IV} 5.28	b_{13} 5.3	E_4^{I} 4.487		

从表 5 可以看出,只要将带*号的数据交换,椭圆傅里叶级数展开法模式排列顺序与积分方程法相同。唯一例外是当 $a/b = 2.0$ 时 E_3^{I} 模 V_c 值大于 E_2^{IV} 模 V_c 值。这可能是文献[2]误

差的影响。

文献[2]算出的数值略大于椭圆傅里叶级数展开法算出的数值。由于椭圆傅里叶级数展开法的计算值实际上已略大于准确解,所以可认为文献[2]这些数据没有椭圆傅里叶级数展开法的计算值准确。

1998年发表的用积分方程法和点匹配法相结合^[17]计算的椭圆光波导 V_c 值,在 $a/b = 2.0$ 时与椭圆傅里叶级数展开法的计算值完全一致。

从表5还可以看出,标量马丢函数法算出的 a_{12} 模和 a_{13} 模截止频率没有倒置。然而这种方法的准确度一般来说比文献[2]的积分方程法的计算结果还要差,不能令人满意。实际上标量马丢函数法有两个误差来源^[12]:弱导边界条件近似和本征行列式截断近似,前者引起的误差更大。

4.4 与 Saad 点匹配法(PMM)计算结果比较

按文献[5],图2所示截止频率曲线对应于前3个奇模。待分析波导 $n_1 = 1.46$, $n_2 = 1.34$ 。未画出的偶模截止曲线与奇模曲线非常接近,从 b/a 接近于0到 $b/a = 1$ 几乎不能区别。作为对比,图中添加了椭圆傅里叶级数展开法计算的几条截止曲线。

从图2可以看出,点匹配法计算的 HE_{21} 模截止曲线对应于椭圆傅里叶级数展开法计算的 E_1^+ 模截止曲线。然而 EH_{01} 模和 EH_{11} 模截止曲线只在 $b/a > 0.5$ 时分别对应于 E_1^+ 模和 E_1^+ 模截止曲线。

图2无法画出椭圆傅里叶级数展开法的下述计算结果:当 $b/a = 0.001$ 时在 E_1^+ 模截止曲线下面有24个表示高次模 V_c 的数据点,这些数据点都远离 EH_{01} 模和 EH_{11} 模截止曲线。当 $b/a = 0.02$ 时上述数据点减到22个, EH_{01} 模截止曲线介于两个数据点之间。当 $b/a = 0.05$ 时数据点再减到14个, EH_{01} 模和 EH_{11} 模截止曲线都介于数据点之间。

4.5 与 Dyott 的结果^[11]和其他方法比较

Dyott关于大折射率差和小折射率差波导的实验结果示于图3和图4。

本文只涉及弱导分析,不能定量讨论大折射率差波导实验。在小折射率差情况下本文的结果和Dyott的实验事实上有许多一致之处:

- 1) 本文计算的奇模和偶模截止频率相等,这等效于文献[11] $b/a = 0$ 处分裂。
- 2) 关于第一高次模,Dyott的截止曲线和本文的数据吻合很好。按照文献[11],该模截止几乎与折射率差无关。
- 3) 图3中实验数据点表明,实验只进行到 $b/a = 0.2$,当 $b/a > 0.2$ 时 V_c 随 b/a 的增加而增大。

4) 文献[11]已经指出,在 $b/a = 0.2$ 和 $b/a = 0$ 之间有许多截止频率很低的高次模。这意味着 $b/a = 0$ 时的 $V_c = \pi/2$ 应该对应于很高阶的高次模,而不是对应于第一高次奇模 EH_{01} 模。在对事实的理解方面我们认为 EH_{01} 模截止曲线的下降部分没有实验支持。

图4中不同方法计算结果比较表明,与Kummar等人^[4]的微扰法和Decotignie^[15]的有限差分法相比,椭圆傅里叶级数展开法准确度稍高。

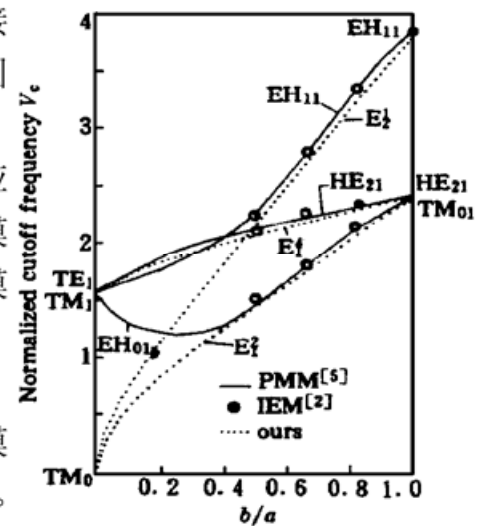


Fig. 2 V_c for some odd lower order modes, comparison between the PMM and the EFSEM

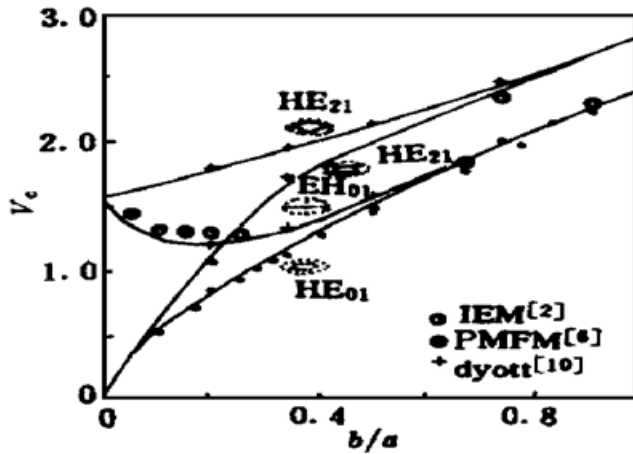


Fig. 3 V_c for some high order modes in waveguides with larger index difference, comparison among various methods

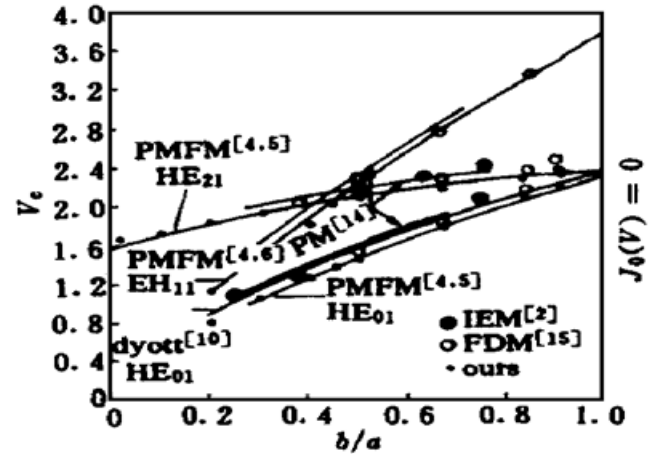


Fig. 4 V_c for some high order modes in waveguides with small index difference, comparison among various methods

结 论 提出了计算弱导椭圆光波导截止频率的椭圆傅里叶级数展开法。与实验结果及许多方法包括严格马丢函数法、有限元法、有限差分法、积分方程法、点匹配法、频移公式法、标量马丢函数法和微扰法等的大量比较证实,该方法具有通用、准确、快速、简便等优点。

由于椭圆坐标系在 $a/b = 1$ 时奇异,该方法在 $a/b \rightarrow 1$ 时误差较大。

参 考 文 献

- [1] Yeh C. Elliptical dielectric waveguide. *J. Appl. Phys.*, 1962, **32**() : 3235~ 3243
- [2] Eyges L, Gianino P, Wintersteiner P. Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(9) : 1226~ 1235
- [3] Cozens J R, Dyott R B. Higher-mode cutoff in elliptical dielectric waveguides. *Electron. Lett.*, 1979, **15**(18) : 558~ 559
- [4] Rengarajan S R, Lewis J E. First higher-mode cutoff in two-layer elliptical fibre waveguides. *Electron. Lett.*, 1980, **16**(7) : 263~ 264
- [5] Saad S M. On the higher order modes of elliptical optical fibers. *IEEE Trans. on Microw. Theory & Technol.*, 1985, **MTT-33**(11) : 1110~ 1112
- [6] Rengarajan S R. On higher order mode cutoff frequencies in elliptical step index fiber. *IEEE Trans. On Microw. Theory & Technol.*, 1989, **MTT-37**(8) : 1244~ 1248
- [7] Chiang K S. Finite element method for cutoff frequencies of weakly guiding fiber of arbitrary cross section. *Opt. & Quant. Electron.*, 1984, **16**(6) : 487~ 493
- [8] Kolesnichenko Y V, Shevcheno V V. Fiber-optic dielectric waveguides with a noncircular core. *Sov. J. Commun. Technol. & Electron.*, 1988, **33**(11) : 127~ 136
- [9] Decotignie J D. Contribution a l'etude theorique dans les guides optiques. Thesis 463, *Ecole Polytechnique, Lausanne*, 1982
- [10] Dyott R B. Cutoff of the first higher modes in elliptical dielectric waveguides: An experimental approach. *Electron. Lett.*, 1990, **26**(20) : 1721~ 1723
- [11] Dyott R B. *Elliptical Fiber Waveguides*, Norwood, MA: Artch House, 1995.
- [12] Shaw J K, Henry W M, Winfrey W R. Weakly guiding analysis of elliptical core step index waveguides based on the characteristic number of Mathieu's equation. *J. Lightwave Technol.*, 1995, **13**(12) : 2359~ 2371
- [13] Su C C. Cutoff frequency of a homogeneous optical fiber with arbitrary cross section. *IEEE Trans. on*

Microw. Theory & Technol., 1985, **MTT-33**(11) : 1101~ 1105

- [14] Kummar A, Vershney R K. Propagation characteristics of highly elliptical core optical waveguides. a perturbation approach. *Opt. & Quant. Electron.*, 1984, **16**(4) : 349~ 354
- [15] Chiang K S. Review of numerical and approximate methods for the model analysis of general optical waveguides. *Opt. & Quant. Electron.*, 1994, **26**(3) : S113~ 134
- [16] Manenkov A B, Rozhnev. Optical dielectric waveguide analysis, based on the modified finite element and integral equation methods. *Opt. & Quantum Electron.*, 1998, **30**(1) : 61~ 70

Elliptical Fourier Series Expansion Method and Cutoff Frequencies of Elliptical Optical Waveguides

Wang Yeheng Zhang Xiang

(Shanghai Transmission Lines Research Institute, Shanghai 200437)

(Received 8 September 1998; revised 28 October 1998)

Abstract In the weakly guiding analysis of cutoff frequencies of elliptical waveguides, the advantages of the proposed elliptical Fourier series expansion method including generality, accuracy, efficiency and simplicity are demonstrated through detailed comparisons with the rigorous Mathieu function method, the finite element method, various important techniques and Dyott's measurement on practice fibers.

Key words optical waveguide theory, model analysis, elliptical optical waveguides, moment method, Fourier series.