

# 克尔介质中场与级联三能级原子 相互作用的熵特性\*

刘金明<sup>1), 2)</sup> 陶向阳<sup>1)</sup> 刘三秋<sup>1)</sup> 聂义友<sup>1)</sup>

1), 江西师范大学物理系, 南昌 330027  
2), 中国科学技术大学物理系, 合肥 230026

**摘 要** 研究了在克尔介质中相干场与级联三能级原子相互作用的场熵演化规律, 讨论了克尔介质及初始平均光子数对场熵演化的影响。

**关键词** 克尔介质, 级联三能级原子, 场熵, 约化密度算符。

## 1 引 言

最近, 在量子光学领域, 研究反映 J-C 模型中光场与原子关联效应的场熵演化规律, 正日益引起人们的重视。熵是一个描述系统偏离纯态程度的物理量。Phoenix 和 Knight<sup>[1-3]</sup> 认为场熵自动包含了密度算符的高阶统计矩, 并导出了计算标准 J-C 模型中场约化密度矩阵的本征值、本征态的一般化公式以及场与原子相同的描述纯态程度的熵函数。在 J-C 模型中, 光场(原子)熵的时间演化反映了光场与原子关联的时间行为, 熵越高, 关联程度越大。光场包含的信息可通过原子性质的测量来推断。近年, 人们相继对单原子与单模场相互作用的 J-C 模型在单原子<sup>[1]</sup>、双光子<sup>[3]</sup>、多光子<sup>[4]</sup>以及附加克尔介质<sup>[5]</sup>等情况下的场熵特性进行了研究, 同时也对两个二能级原子与光场相互作用的 J-C<sup>[6]</sup>及 T-C<sup>[7]</sup>模型作了探讨, 得到了许多有意义的结果。但对类克尔介质中级联型三能级原子与光场相互作用的原子与光场的缠绕, 尚未有人涉及。本文研究克尔介质中级联三能级原子与单模光场相互作用过程中场熵的演化规律, 讨论克尔介质和初始平均光子数对场熵演化的影响。

## 2 理论模型

考虑一个级联三能级原子, 让其处于克尔介质腔中, 腔内场模和克尔介质以及三能级原子都存在着耦合, 对于这样一个模型, 相互作用系统的哈密顿量包含腔场、介质、原子三者各自的自由部分和分别相互作用部分。假定克尔介质对场模的时间响应可作绝热近似, 在与单模腔场共振时, 系统在相互作用表象中取旋波近似下的有效相互作用哈密顿量为<sup>[8, 9]</sup>

$$H_1 = x(a^\dagger a)^2 + \lambda_1(S_{12}^\dagger a + a^\dagger S_{21}) + \lambda_2(S_{23}^\dagger a + a^\dagger S_{32}) \quad (h=1), \quad (1)$$

\* 江西省自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1998-10-19; 收到修改稿日期: 1999-06-11

其中  $a^+$ 、 $a$  为场模的产生、湮没算符;  $S_{ij}^+$ 、 $S_{ji}$  ( $i \neq j$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) 为原子的上升与下降算符;  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ) 为原子与场模间的耦合系数;  $x$  是与介质的三阶极化系数有关, 且反映克尔效应强度的常数。本文取耦合常数  $\lambda_k$  和  $x$  为实数。

设初始时刻原子处于最上能态  $|1\rangle$ , 光场处在相干态  $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) |n\rangle, \quad F(n) = \exp(-\bar{n}/2) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (2)$$

式中,  $\alpha = \bar{n}^{1/2} \exp(i\xi)$ ,  $\bar{n}$  为平均光子数,  $\xi$  为  $\alpha$  的相位角, 系统的初始态函数为

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) |1, n\rangle. \quad (3)$$

在共振条件下, 系统演化到  $t > 0$  的状态方程为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n F(n) \exp[-ix(n+1)^2 t] \times \\ [a_n(t)|1, n\rangle + b_{n+1}(t)|2, n+1\rangle + c_{n+2}(t)|3, n+2\rangle], \quad (4)$$

将上式代入薛定谔方程

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H_1 |\Psi(t)\rangle, \quad (5)$$

利用共振条件和初始条件可得(4)式中的各系数<sup>[9, 10]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} a_n(t) &= \sum_{j=1}^3 [g_j^2 + x(2n+3)g_j - \lambda_2^2(n+2)] A_j \exp(ig_j t), \\ b_{n+1}(t) &= -\lambda_1 \sqrt{(n+1)} \sum_{j=1}^3 [g_j + x(2n+3)] A_j \exp(ig_j t), \\ c_{n+2}(t) &= \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^3 A_j \exp(ig_j t), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中  $g_j$ 、 $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 分别为 ( $g_j$  为实数)

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}(u_1^2 - 3u_2)^{1/2} \cos \theta, \\ g_2 &= -\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}(u_1^2 - 3u_2)^{1/2} \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi), \\ g_3 &= -\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}(u_1^2 - 3u_2)^{1/2} \cos(\theta + \frac{4}{3}\pi), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$A_1 = \frac{1}{(g_2 - g_1)(g_3 - g_1)}, \quad A_2 = \frac{1}{(g_1 - g_2)(g_3 - g_2)}, \quad A_3 = \frac{1}{(g_1 - g_3)(g_2 - g_3)}. \quad (8)$$

(7) 式中  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ 、 $\theta$  可由下述方程得到

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 2x, \\ u_2 &= -[\lambda_2^2(n+2) + \lambda_1^2(n+1) + x^2(2n+1)(2n+3)], \\ u_3 &= x\lambda_2^2(2n+1)(n+2) - x\lambda_1^2(n+1)(2n+3), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{9u_1 u_2 - 2u_1^3 - 27u_3}{2(u_1^3 - 3u_2)^{3/2}} \right]. \quad (10)$$

(2) ~ (10) 式确定了系统在相互作用绘景中的态矢量, 由此可讨论克尔介质及初始光子数对

场熵演化的影响。

### 3 计算场熵的公式

量子腔场作为原子与腔场所组成的闭合体系的一个子体系，是一个开放体系，它的熵是随时间不断变化的。由量子力学中熵的定义  $s = - \text{tr}_a(\rho \ln \rho)$ ，通过对场熵演化行为的研究，可以了解到场熵的动力学行为，描述光场的关联与涨落。根据文献[4]和(4)式的结果，得到光场的约化密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_f(t) = & \text{tr}_a\{|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\} = \\ & \sum_{n,m} F(n)F^*(m)[a_n(t)a_m^*(t)|n\rangle\langle m| + b_{n+1}(t)b_{m+1}^*(t)|n+1\rangle\langle m+1| + \\ & c_{n+2}(t)c_{m+2}^*(t)|n+2\rangle\langle m+2|], \end{aligned} \tag{11}$$

不难得到  $t$  时刻光场的熵  $s(t)$  为<sup>[6]</sup>

$$s(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| \rho_f | n' \rangle \ln \langle n| \rho_f | n' \rangle = - (P_0 \ln P_0 + P_1 \ln P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} P_n \ln P_n), \tag{12}$$

式中  $P_0$ 、 $P_1$  分别为  $n'$  取 0 和 1 时  $\langle n| \rho_f | n' \rangle$  的表达式。当  $n'$  取 2, 3, 4, ... 时， $\langle n| \rho_f | n' \rangle$  的具体表达式  $P_n$  分别为

$$P_0 = \exp(-\bar{n}) |a_0(t)|^2, \tag{13}$$

$$P_1 = \exp(-\bar{n}) [\bar{n} |a_1(t)|^2 + |b_1(t)|^2], \tag{14}$$

$$P_n = \exp(-\bar{n}) \left[ \frac{\bar{n}^n}{n!} |a_n(t)|^2 + \frac{\bar{n}^{n-1}}{(n-1)!} |b_n(t)|^2 + \frac{\bar{n}^{n-2}}{(n-2)!} |c_n(t)|^2 \right]. \tag{15}$$

由于得到(12)式确定的场熵的解析解很困难，但借助于数值计算(设  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ )，便能形象地展示在克尔介质中三能级原子的场熵演化规律。

图 1 给出了当克尔介质常数  $x = 0.5$  时，场熵随光子数  $\bar{n}$  的变化所呈现的演化规律。从图

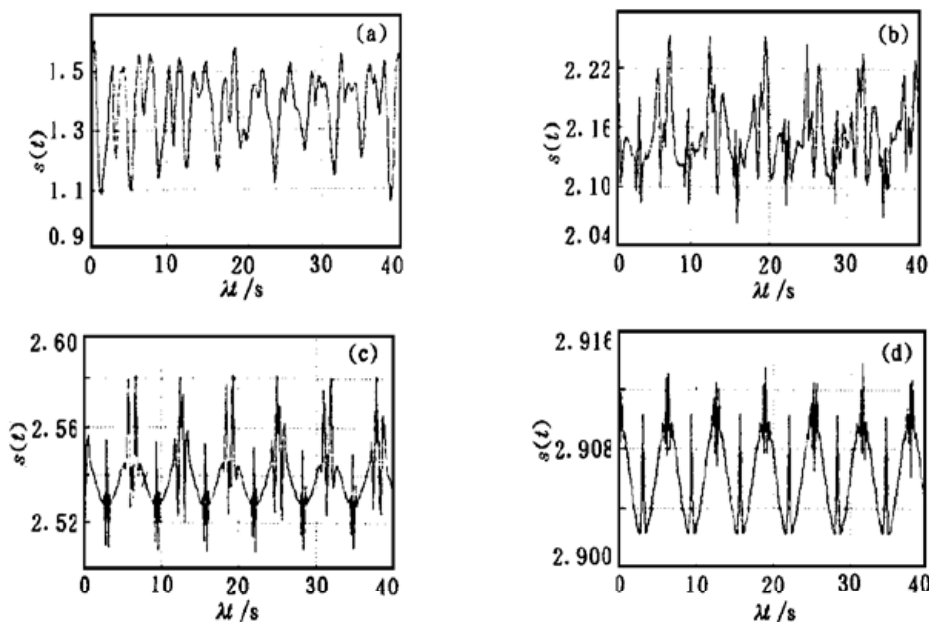


Fig. 1 The evolution of the field entropy with the intensity of Kerr medium  $x = 0.5$  and different values of the mean photon number for (a)  $\bar{n} = 1$ , (b)  $\bar{n} = 5$ , (c)  $\bar{n} = 10$ , (d)  $\bar{n} = 20$

中看出, 场熵的演化具有明显的振荡特性, 这说明光场与原子的关联程度是振荡的。场熵大时关联强, 场熵小时关联弱。随初始平均光子数的增加, 场熵的均值也不断增大, 但振荡的幅度却明显减小。这表明初始平均光子数的增加导致光场与原子的关联增强, 即耦合越紧密<sup>[6]</sup>。当初始光子数较小时[见图 1(a)], 场熵振荡的周期性不明显。而当  $\bar{n}$  增加到一定值时, 场熵演化呈现等幅振荡, 表现出明显的周期性, 其值约为  $4\pi$ , [如图 1(c), 图 1(d)], 这与二能级原子的场熵演化相类似<sup>[4]</sup>。从图 1(c) 还可看出: 在  $\lambda t = (2k + 1)\pi$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 附近时, 场熵处于极大值, 而在  $\lambda t = 2k\pi$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 附近出现分叉振荡, 向上或向下的分叉交替出现。

图 2 给出了克尔介质非线性相互作用强弱参数  $x$  取不同值时场熵演化规律。由图 2 可见, 无克尔介质时, 即  $x = 0$  [如图 2(a) 所示], 场熵演化的第一阶段曲线相对光滑, 而在随后的时间内出现剧烈振荡, 与两能级模型中的场熵曲线类似<sup>[11]</sup>。当克尔介质很弱时[图 2(b) 所示], 其场熵演化曲线与无克尔介质时相比, 变化不大。而当  $x$  增大到 0.2 时[图 2(c)], 其场熵曲线周期性趋于明显。继续增大  $x$  [图 2(d) ~ 图 2(e)], 场熵的演化曲线表现出明显的周期性。在  $x$  增大到 5 时, 其振荡幅值变得很小, 均值几乎接近于初始时刻的场熵大小。因此, 通过克尔介质与模场的强耦合非线性相互作用, 可以获得持续的初态光场。从整个图 2 还可以看出: 随着  $x$  的增大, 其振荡频率越来越快, 振荡的均值也在不断增加, 但场熵演化曲线的最大值却随  $x$  的增加而明显减小。以上分析表明: 场熵敏感于克尔介质的非线性相互作用, 克尔介质直接影响了场熵演化的周期性。

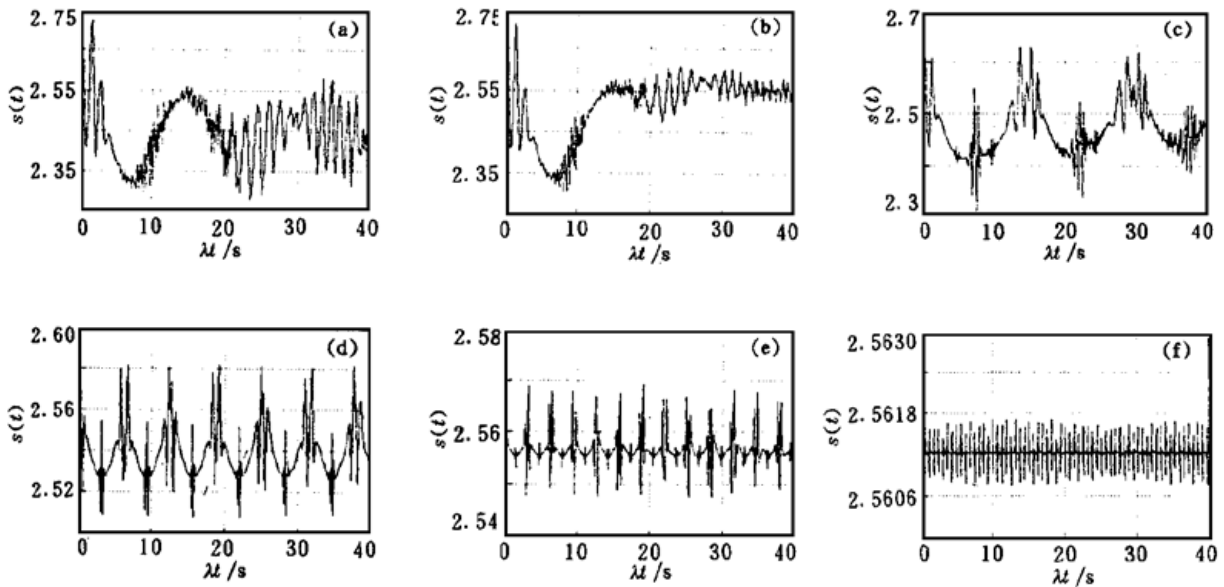


Fig. 2 The evolution of the field entropy with the mean photon number  $\bar{n} = 10$  and different values of the intensity of Kerr medium for (a)  $x = 0$ , (b)  $x = 0.05$ , (c)  $x = 0.2$ , (d)  $x = 0.5$ , (e)  $x = 1$ , (f)  $x = 5$

**结 论** 本文研究了在克尔介质中级联三能级原子模型的场熵演化规律, 研究表明, 随初始平均光子数的增加, 场熵的均值不断增大, 但振荡的幅值却明显减小, 在  $\bar{n}$  较大时, 场熵演化呈现出周期性的等幅振荡。同时, 随克尔介质强度参数的增大, 场熵演化曲线的振荡频率明显变快, 而其最大值却在不断减小。这表明: 场熵敏感于克尔介质的非线性相互作用, 克尔介质会削弱场与原子的相互作用。

## 参 考 文 献

- [1] Phoenix S J D, Knight P L. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Ann. Phys.*, (N.Y.), 1988, **186**(2) : 381~ 407
- [2] Barnett S M, Phoenix S J D. Entropy as measure of quantum optical correlation. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(5) : 2404~ 2409
- [3] Phoenix S J D, Knight P L. Periodicity, phase and entropy in models of two-photon resonance. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, **7**(1) : 116~ 124
- [4] 方卯发, 周 鹏. 多光子 Jaynes-Cummings 模型场熵的演化. *光学学报*, 1993, **13**(9) : 799~ 804
- [5] 方卯发, 周 鹏. 附加克尔介质双光子 Jaynes-Cummings 模型的场熵特性. *物理学报*, 1994, **43**(4) : 570~ 579
- [6] 刘 翔. 双模双光子 Jaynes-Cummings 模型中场与原子的缠绕. *量子电子学*, 1995, **12**(3) : 326~ 330
- [7] 黄生训, 方卯发. 双光子 Tavis-cummings 模型场熵的演化. *量子电子学*, 1996, **13**(3) : 245~ 251
- [8] 李孝申, 刘正东, 龚昌德. 级联双光子过程的压缩效应. *物理学报*, 1987, **36**(12) : 1652~ 1657
- [9] 赖云忠, 容幸福. 级联三能级原子与相干态场相互作用过程中场的振幅  $N$  次方压缩. *量子电子学报*, 1997, **14**(3) : 209~ 213
- [10] 刘金明, 刘三秋, 陶向阳. Kerr 介质中级联三能级原子与压缩相干态相互作用的光子统计演化. *光子学报*, 1998, **27**(7) : 583~ 587
- [11] 方卯发. 非旋波近似下 Jaynes-Cummings 模型中的场熵演化. *物理学报*, 1994, **43**(11) : 1776~ 1786

## Entropy Properties of the Interaction Between Three-Level Cascade Atom and Field in a Kerr Medium

Liu Jinming<sup>1), 2)</sup>      Tao Xiangyang<sup>1)</sup>      Liu Sanqiu<sup>1)</sup>      Nie Yiyou<sup>1)</sup>

[ 1), Department of Physics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027  
2), Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026 ]

(Received 19 October 1998; revised 11 June 1999)

**Abstract** The evolution of the field entropy of the interaction between three-level cascade atom and field in a Kerr medium has been studied. The influences of the Kerr medium and of the initial mean photon number on the field entropy have been discussed.

**Key words** Kerr medium, three-level cascade atom, field entropy, reduce density operator.