

纠缠态原子与相干光场作用的量子信息保真度*

刘堂昆^{1), 2), 3)} 王继锁^{1), 2), 4)} 柳晓军^{1), 2)} 詹明生¹⁾

- 1), 中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071
2), 中国科学院安徽光学精密机械研究所激光光谱学开放实验室, 合肥 230031
3), 湖北师范学院物理系, 黄石 435002
4), 聊城师范学院物理系, 聊城 252059

摘 要 研究了初始处于纠缠态的双原子与相干光场的相互作用。结果表明, 不同的失谐量和初始平均光子数使得系统、原子和光场的量子信息保真度发生改变。

关键词 纠缠态原子, 量子信息, 保真度。

1 引 言

保真度是表示信息在传输过程中保持原来状态的程度。它是量子光学和信息科学领域中的一个重要的概念, 并广泛应用于量子通信和量子计算理论研究中, 如纯态编码中的保真度^[1-3]、量子系统的初态和终态是混合态的情况下保真度的性质^[4]、量子信息和量子隐形传态理论中的保真度^[5-7]等。对保真度的研究已成为量子通信和量子计算领域中的一个热门问题。

近几年来, 人们研制量子计算机的热情高涨。目前, 已经利用原子与光场量子态的制约关系在实验上构造出了量子逻辑门^[8]。此外, 量子态工程^[9]已揭示了多原子纠缠态的任意操纵是实现量子计算机的基础。在量子通信、量子计算机和量子密码术中, 量子态是信息的载体。由于量子计算机要涉及量子态的传输问题, 而量子态的传输必然要考虑保真度问题。对于一个量子系统, 在相互作用过程中它的量子信息并不完全由其熵反映出来, 密度算符间距在量子理论中比熵更加优越, 能提供更多的有关量子态的信息^[10]。由于密度算符间距和保真度在描述量子体系的信息关联和纠缠程度上是等价的, 因此, 本文运用全量子理论, 考察了两个等同的二能级原子初始处于激发态和基态的一种纠缠态^[11](实际上是贝尔基态构成四维希尔伯特空间中具有最大纠缠的套完备基中的一个基态)与相干光场相互作用。揭示了系统、原子和光场量子态(信息)保真度的演化规律, 并着重讨论了原子跃迁频率与光场频率的失谐量和初始平均光子数的变化对量子态保真度的影响。

* 国家自然科学基金(19774069)和湖北省高等学校科研基金(99A048)资助课题。

收稿日期: 1999-06-11; 收到修改稿日期: 1999-11-15

2 理论模型和密度算符

均匀加宽的两个全同二能级原子与单模场相互作用(不考虑两原子间的相互作用)系统的哈密顿量在旋波近似下可表示为($\hbar=1$)^[12]

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_0 s_z + g(s_+ a + a^\dagger s_-). \quad (1)$$

式中

$$s_z = \sum_{i=1}^2 s_z^i, \quad s_+ = s_+^1 + s_+^2 \exp(i\xi), \quad s_- = s_-^1 + s_-^2 \exp(-i\xi), \quad (2)$$

a^\dagger 、 a 为光场的产生和湮灭算符, s_z^i 和 s_\pm^i 分别为第 i 个原子粒子数反转和能级的升、降算符, ξ 为两原子跃迁相对相位, ω 为单模场的频率, ω_0 为原子跃迁玻尔(Bohr)频率, g 为原子和光场的耦合常数。

分解(1)式, 即为

$$H = H_0 + H_1, \quad (3)$$

其中

$$H_0 = \omega(a^\dagger a + s_z), \quad (4)$$

$$H_1 = (\omega_0 - \omega)s_z + g(s_+ a + a^\dagger s_-). \quad (5)$$

考虑到 $[H_0, H_1] = 0$, 并且令 $\Delta = (\omega_0 - \omega)$ 为失谐量, 根据原子算符泡利(Pauli)矩阵的表示形式, 对原子所处的状态作以下定义:

$$|e, e\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |e, g\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |g, e\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |g, g\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

因此, 得到

$$s_z = s_z^1 + s_z^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$s_+ = s_+^1 + s_+^2 \exp(i\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(i\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$s_- = s_-^1 + s_-^2 \exp(-i\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\xi) & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

在相互作用表象中, 系统的时间演化算符为

$$U_1(t) = \exp(-iH_1 t) = \begin{pmatrix} C & -iD & 0 & 0 \\ -iS & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -iD \exp(i\xi) \\ 0 & 0 & -iS \exp(-i\xi) & T \end{pmatrix}. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad C &= \cos(At) - i\left(\frac{\Delta}{2}\right) \frac{\sin(At)}{A}, & D &= ga \frac{\sin(Bt)}{B}, \\ S &= ga^+ \frac{\sin(At)}{A}, & T &= \cos(Bt) + i\left(\frac{\Delta}{2}\right) \frac{\sin(Bt)}{B}, \\ A &= \sqrt{(\Delta/2)^2 + g^2 a a^+}, & B &= \sqrt{(\Delta/2)^2 + g^2 a^+ a}. \end{aligned} \quad (11)$$

这里, C 和 T 对应交流斯塔克(Stark)效应引起的能级分裂项, S 和 D 分别对应受激发射项和吸收项, A 和 B 对应广义拉比(Rabi)振荡频率项。

假设在 $t = 0$ 时刻, 两原子处在一个贝尔(Bell)基态(纠缠态)上, 即

$$|\psi_a(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|e, g\rangle - |g, e\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

光场处在相干态

$$|\psi_r(0)\rangle = |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \exp(in\Phi) |n\rangle. \quad (13)$$

$$\text{其中} \quad F(n) = \exp\left(-\frac{\bar{n}}{2}\right) \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}},$$

Φ 为相干场激发的方向角, \bar{n} 为初始平均光子数。 $t = 0$ 时, 系统的态密度算符为

$$\rho(0) = \rho_r(0) \otimes \rho_a(0) = |\psi_r(0)\rangle \langle \psi_r(0)| \otimes |\psi_a(0)\rangle \langle \psi_a(0)|. \quad (14)$$

由此, 可以得到任一时刻系统的态密度算符:

$$\rho(t) = U_1(t) \rho(0) U_1^\dagger(t) = \begin{pmatrix} |D\rangle \langle D| & |D\rangle \langle T| & |D\rangle \langle C| & |D\rangle \langle S| \\ |T\rangle \langle D| & |T\rangle \langle T| & |T\rangle \langle C| & |T\rangle \langle S| \\ |C\rangle \langle D| & |C\rangle \langle T| & |C\rangle \langle C| & |C\rangle \langle S| \\ |S\rangle \langle D| & |S\rangle \langle T| & |S\rangle \langle C| & |S\rangle \langle S| \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad |C\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} C |\alpha\rangle, & |D\rangle &= -i \frac{1}{\sqrt{2}} D |\alpha\rangle, \\ |S\rangle &= i \frac{1}{\sqrt{2}} S \exp(-i\xi) |\alpha\rangle, & |T\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} T |\alpha\rangle. \end{aligned}$$

从而可以得到原子和光场的约化密度算符:

$$\rho_r(t) = \text{tr}_a \rho(t) = |C\rangle \langle C| + |D\rangle \langle D| + |S\rangle \langle S| + |T\rangle \langle T|, \quad (16)$$

$$\rho_a(t) = \text{tr}_r \rho(t) = \sum_n \kappa | \rho(t) | n \rangle. \quad (17)$$

从(15)~(17)式出发, 根据原子和光场的初态分布情况, 便可以研究系统、原子和光场的量子态保真度。

3 纠缠态原子与光场作用的量子信息保真度

为了描述输入量子态(初态)和输出量子态(终态)的偏差程度,人们引入了两个重要的物理概念,即两个量子态之间的施密特(Schmidt)距离和保真度(Fidelity)。施密特距离定义为^[13]:

$$D(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{tr}\rho_1^2 + \text{tr}\rho_2^2 - 2\text{tr}\rho_1\rho_2]^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

保真度定义为^[14]:

$$F(\rho_1, \rho_2) = [\text{tr}(\sqrt{\rho_1\rho_2}\sqrt{\rho_1})^{\frac{1}{2}}]^2. \quad (19)$$

(18)、(19)式中的 ρ_1 和 ρ_2 为两种态所对应的密度算符。施密特距离 $D(\rho_1, \rho_2)$ 和保真度 $F(\rho_1, \rho_2)$ 的取值范围都在0~1之间。很明显,对于量子纯态, $\text{tr}\rho_1^2 = \text{tr}\rho_2^2 = 1$, $F(\rho_1, \rho_2) = \text{tr}\rho_1\rho_2$ 。因此,可以得到施密特距离和保真度之间满足如下关系式:

$$D(\rho_1, \rho_2) = [1 - F(\rho_1, \rho_2)]^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

其中,当 $F(\rho_1, \rho_2) = 0$ 时,表示信息(量子态)在传输过程中完全失真,此时 $D(\rho_1, \rho_2) = 1$,则表示初态和终态正交(两态距离最远);当 $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ 时,表示理想信息传输(不失真),而使得 $D(\rho_1, \rho_2) = 0$,表示初态和终态相同(两态距离最近)。由此可见,描述初态和终态偏差程度的施密特距离和保真度在物理意义上是等价的,并且在纯态情况下它们之间存在(20)式的关系。根据(19)式和系统初始条件,得到

$$F_s(t) = \frac{1}{2} (|\langle \alpha | T \rangle|^2 + |\langle \alpha | C \rangle|^2 - \langle \alpha | C \rangle \langle T | \alpha \rangle - \langle \alpha | T \rangle \langle C | \alpha \rangle), \quad (21)$$

$$F_a(t) = \frac{1}{2} (\langle T | T \rangle + \langle C | C \rangle - 2 \text{Re} \langle T | C \rangle), \quad (22)$$

$$F_f(t) = |\langle \alpha | C \rangle|^2 + |\langle \alpha | D \rangle|^2 + |\langle \alpha | S \rangle|^2 + |\langle \alpha | T \rangle|^2. \quad (23)$$

式中下标s、a和f分别表示系统、原子和光场。其中

$$\langle \alpha | C \rangle = - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!} [\cos(x\tau) - i(\frac{\Delta}{2g}) \frac{\sin(x\tau)}{x}], \quad (24)$$

$$\langle \alpha | D \rangle = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^{(n+1/2)}}{n!} \exp(i\Phi) \frac{\sin(z\tau)}{z}, \quad (25)$$

$$\langle \alpha | S \rangle = i \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\xi - i\Phi) \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^{(n+1/2)}}{n!} \frac{\sin(x\tau)}{x}, \quad (26)$$

$$\langle \alpha | T \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!} [\cos(y\tau) + i(\frac{\Delta}{2g}) \frac{\sin(y\tau)}{y}], \quad (27)$$

$$\langle C | C \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!} [\cos^2(x\tau) + (\frac{\Delta}{2g})^2 \frac{\sin^2(x\tau)}{x^2}], \quad (28)$$

$$\langle T | T \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!} [\cos^2(y\tau) + (\frac{\Delta}{2g})^2 \frac{\sin^2(y\tau)}{y^2}], \quad (29)$$

$$\langle T | C \rangle = - \frac{1}{2} \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!} \{ [\cos(x\tau) \cos(y\tau) - (\Delta/2g)^2 \frac{\sin(x\tau)}{x} \frac{\sin(y\tau)}{y}] -$$

$$i(\Delta/2g) \left[\cos(x\tau) \frac{\sin(y\tau)}{y} + \cos(y\tau) \frac{\sin(x\tau)}{x} \right]. \quad (30)$$

式中 $x = [(\Delta/2g)^2 + n]^{1/2}$, $y = [(\Delta/2g)^2 + (n+1)]^{1/2}$, $z = [(\Delta/2g)^2 + (n+2)]^{1/2}$, $\tau = gt$. x 、 y 、 z 分别为广义拉比振荡频率。由上述式子可以看出, 保真度 F_s 、 F_a 和 F_r 不仅与失谐量 Δ 有关, 而且与初始平均光子数 \bar{n} 有关。同时, 由于原子和光场相互作用是一个动力学系统, 所以保真度 F_s 、 F_a 和 F_r 还与时间 t 有关。很明显, $t = 0$ 时, F_s 、 F_a 和 F_r 都等于 1。

4 数值计算与分析

在保真度 F_s 、 F_a 和 F_r 式中的级数很难精确求和, 借助数值计算和作图, 可以直观地展示 F_s 、 F_a 和 F_r 的演化规律。为了揭示失谐量 Δ 和初始平均光子数 \bar{n} 对量子态保真度的影响, 分两种情况来讨论: 一定的 Δ/g 值、不同的平均光子数 \bar{n} ; 一定的平均光子数 \bar{n} 、不同的 Δ/g 值。

图 1~ 图 3 分别为 F_s 、 F_a 和 F_r 在一定的 Δ/g 值、不同的初始平均光子数 \bar{n} 情况下的演化规律。由图可以看出, 系统、光场和原子量子态的保真度演化曲线各自的振荡呈现两个系列, 一种是快周期振荡而另一种是振幅包络所呈现的大范围的振荡。称前者为快振荡而后者为慢振荡。当初始平均光子数比较小时, 处在纠缠态的两原子与相干光场进行弱相互作用, 使得系统和原子的量子信息从不失真到完全失真、再由完全失真到不失真这样一个循环过程来回振荡, 而光场的量子信息相比而言失真较小。随着初始平均光子数的增加, 两原子与相干光场相互作用增强, 此时, 慢振荡周期变长、振幅变小。系统、原子和光场的量子信息保真度被削弱。也就是说此时各自的状态偏离初态的程度越来越大, 甚至达到正交。

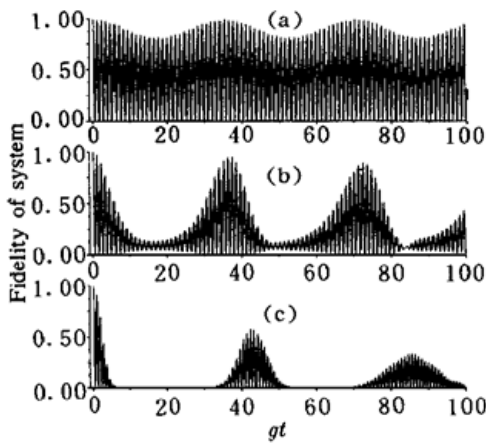


Fig. 1 Time evolution of F_s for $\Delta/g = 5$. (a) $\bar{n} = 0.1$, (b) $\bar{n} = 1$, (c) $\bar{n} = 5$

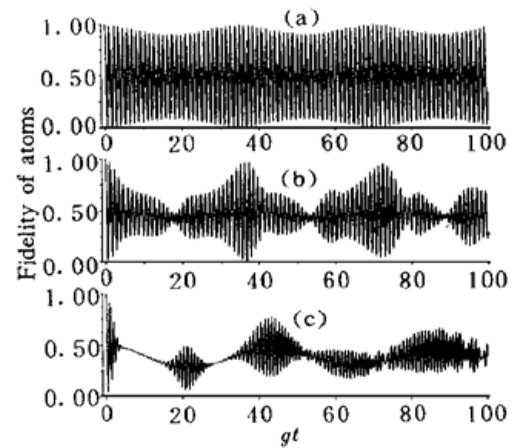


Fig. 2 Time evolution of F_a for $\Delta/g = 5$. (a) $\bar{n} = 0.1$, (b) $\bar{n} = 1$, (c) $\bar{n} = 5$

图 4~ 图 6 分别表示一定的初始平均光子数 \bar{n} 、不同的 Δ/g 值对 F_s 、 F_a 和 F_r 演化的影响。数值计算表明, 当 $0 \leq \Delta/g \leq 1$ 时, F_s 、 F_a 和 F_r 的演化曲线无明显改变。增大 Δ/g 的值, 原子和光场的关联程度减弱。此时快振荡频率加快, 而慢振荡周期变长。从(24)~(30)式可以看出, 出现这些现象的主要原因是拉比振荡频率与 Δ/g 的值有关。另一方面, 随着 Δ/g 的值增大, 慢振荡的振幅也增大, 这是正弦函数项与 Δ/g 的乘积所造成的。从图中还可看出, 当 Δ/g 的值较大时, 原子的信息保真度演化曲线却在某一值上持续很长一段时间不发生改变。这表明此时的原子与光场之间能量交换比较少、原子被陷于某种状态。此时的原子与光场是去耦合的, 都处在各自的不关联的混态。另外, 数值计算还表明: 无论是改变初始平均光子

数, 还是改变失谐量, 光场的信息保真度的演化曲线始终在系统的信息保真度的演化曲线的包络线上作轻微的振荡。

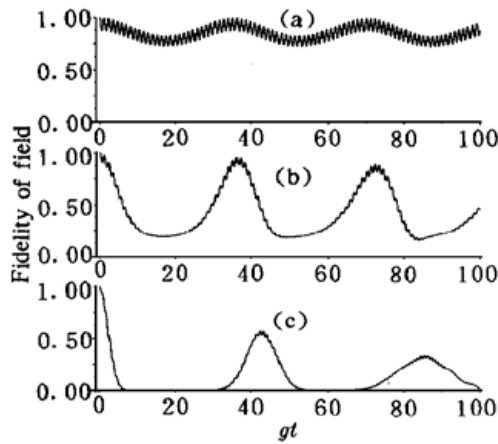


Fig. 3 Time evolution of F_t for $\Delta/g = 5$. (a) $\bar{n} = 0.1$, (b) $\bar{n} = 1$, (c) $\bar{n} = 5$

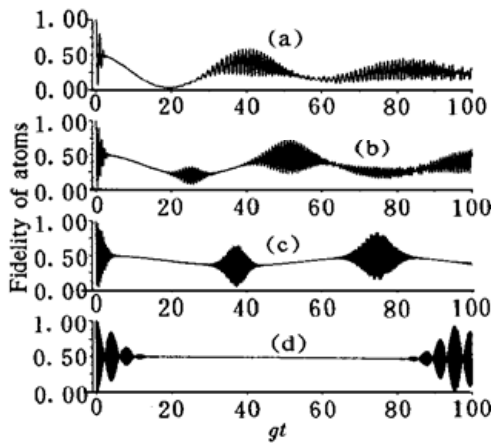


Fig. 5 Time evolution of F_s for $\bar{n} = 10$. (a) $\Delta/g = 0$, (b) $\Delta/g = 5$, (c) $\Delta/g = 10$, (d) $\Delta/g = 30$

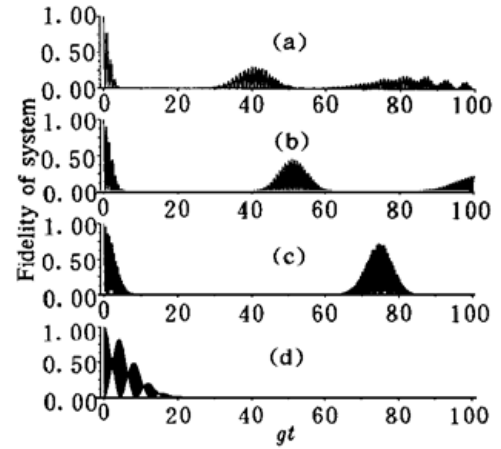


Fig. 4 Time evolution of F , for $\bar{n} = 10$. (a) $\Delta/g = 0$, (b) $\Delta/g = 5$, (c) $\Delta/g = 10$, (d) $\Delta/g = 30$

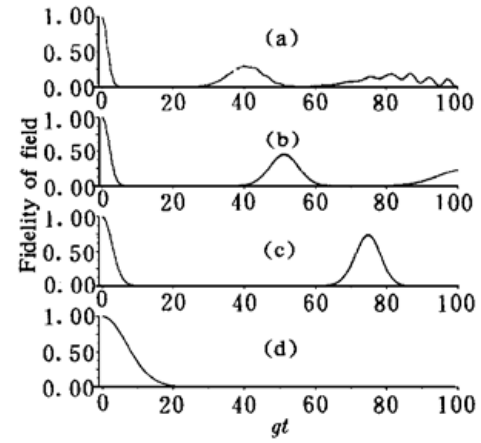


Fig. 6 Time evolution of F_t for $\bar{n} = 10$. (a) $\Delta/g = 0$, (b) $\Delta/g = 5$, (c) $\Delta/g = 10$, (d) $\Delta/g = 30$

结 论 运用全量子理论, 考察了初始处于纠缠态的两个全同二能级原子与相干态光场相互作用, 揭示了系统、双原子和光场量子信息保真度的演化规律。结果表明: 对于本文所研究的体系, 量子态的保真度将随初始平均光子数和失谐量的变化而发生变化。在一定的初始光场强度条件下, 对于较大的失谐量, 光场的量子态保真度完全失真的时间延缓、复原周期延长。原子的量子态保真度在某一值上长时间不改变, 这表明了大失谐对原子与光场相互作用具有退纠缠作用。在失谐量不太大并且保持不变的情况下, 双原子与弱场耦合作用时, 光场的量子态保真度较高。强场耦合作用时, 光场的量子态保真度出现完全失真现象。另外, 还指出了描述输入态和输出态偏差程度的施密特距离和保真度从物理意义上是等价的, 并且在纯态情况下它们之间存在一定的关系。

综上所述, 失谐量和初始平均光子数的变化对初始处在纠缠态的双原子与相干态光场相互作用体系中量子态保真度有调制作用。这些结果将对人们进一步研究和了解量子系统的信息关联与纠缠程度具有一定的意义。

参 考 文 献

- [1] Schumacher B. Quantum coding. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **51**(4) : 2738~ 2747
- [2] Schumacher B. Sending entanglement through noisy quantum channels. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **54**(4) : 2614~ 2628
- [3] Schumacher B, Nielsen M A. Quantum data processing and error correction. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **54**(4) : 2629~ 2635
- [4] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states. *J. Mod. Opt.*, 1994, **41**(12) : 2315~ 2323
- [5] Duan Luming, Guo Guangcan. Perturbative expansions for the fidelities and spatially correlated dissipation of quantum bits. *Phys. Rev. (A)*, 1997, **56**(6) : 4466~ 4470
- [6] Wang Xiangbin, Oh C H, Kwek L C. Bures fidelity of displaced squeezed thermal states. *Phys. Rev. (A)*, 1998, **58**(5) : 4186~ 4190
- [7] Horodecki R, Horodecki M. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **54**(3) : 1838~ 1843
- [8] Turchette Q A, Hood C J, Lange W *et al.*. Measurement of conditional phase shifts for quantum logic. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(25) : 4710~ 4713
- [9] 郭光灿. 量子信息光学. 物理, 1996, **25**(6) : 336~ 342
- [10] 刘堂昆, 王继锁, 柳晓军等. 非共振相互作用系统中密度算符间距的演化. 物理学报, 1999, **48**(11) : 2051~ 2059
- [11] Gerry C C. Preparation of multiatom entangled states through dispersive atom-cavity-field interactions. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **53**(4) : 2857~ 2860
- [12] Barnett S M, Dupontuis M A. Multiatom squeezed states: A new class of collective atomic states. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1987, **4**(4) : 505~ 511
- [13] Knoll L, Orłowski A. Distance between density operator: Applications to the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **51**(2) : 1622~ 1630

Fidelity of Quantum Information in a Pair Atoms of Entanglement State Interacting with Coherent State*

Liu Tangkun^{1), 2), 3)} Wang Jisuo^{1), 2), 4)} Liu Xiaojun^{1), 2)} Zhan Mingsheng¹⁾

1), State Laboratory of Magnetic Resonance, Atomic and Molecular Physics,

Wuhan Institute of Physics and Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071

2), Laser Spectroscopy Laboratory, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,

The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031

3), Department of Physics, Hubei Normal University, Huangshi 435002

4), Department of Physics, Liaocheng Normal University, Liaocheng 252059

(Received 11 June 1999; revised 15 November 1999)

Abstract Fidelity of quantum information in a pair atoms of entanglement state interacting with coherent light field is investigated. The results show that the fidelity of system, atoms and field will change depending on numerical value of the detuning and the mean-photon number.

Key words atoms of entanglement state, quantum information, fidelity.

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 19774069) and the Science Research Foundation of Higher Education of Hubei Province, China (No. 99A048).