

利用彩虹强度角谱分布对圆柱直径的测量*

吴振森 郭立新 韩香娥 侯尚慧

(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

摘 要 采用 CCD 线阵的散射光强角分布测量系统, 测量了水、酒精液柱、光纤的彩虹角分布。根据严格米氏理论, 数值研究了大尺寸参数圆柱的彩虹现象, 获得与实验相吻合的数值结果。讨论了几何光学和艾里理论局限性, 将米氏理论和几何光学结合, 对彩虹现象给予了更为合理的解释。利用第一级彩虹角反演折射率, 以及将彩虹强度导数角分布进行快速傅里叶变换获得了角谱反演圆柱粒子的直径。并讨论了利用角谱反演粒子折射率和直径的精度。

关键词 米氏理论, 艾里理论, 光散射, 彩虹现象, 快速傅里叶变换。

1 引 言

粒度分析的光散射法以其快速、非接触测量等优点日益受到人们的重视。目前已提出并发展了许多测量粒子尺寸及数密度的方法, 如消光法、角谱法、相多普勒法、成像技术及彩虹技术等。但将彩虹现象作为一种测量技术, 还是近 10 年才得到较快的发展。随着实验技术的提高, 人们发现其彩虹光强角分布存在一系列较高频率的振荡峰 (称为艾里峰), 并且在艾里曲线上叠加频率更高的振荡。

本文采用 CCD 线阵的散射光强角分布测量系统, 测量了水、酒精液柱、光纤在 He-Ne 激光照射下的第一级和第二级彩虹。实验数据与米氏理论的数值结果有很好的吻合。根据米氏理论, 从电磁散射角度对彩虹现象给予了更为合理的解释^[1], 并讨论了几何光学和艾里理论局限性。根据米氏理论和几何光学近似, 将彩虹强度导数角分布进行快速傅里叶变换, 获得了 5 个明显的频谱分布的峰值 $F_i (i = 1, 2 \cdots 5)$ 。根据第一级彩虹角谱峰值可以反演圆柱粒子的折射率, 以及利用彩虹角频可以反演圆柱直径。进而从实验角度研究如何提高圆柱彩虹强度频谱分布的分辨率, 使利用彩虹分布高精度地反演折射率和尺寸成为可能。

2 彩虹强度角分布的测量

作者在法国鲁昂大学 LESP 实验室设计了液柱激光散射的彩虹测量系统^[2]。图 1 给出了彩虹测量系统示意图。该测量系统光源采用 He-Ne 激光器, 接收探测器为 2048 单元的 CCD 线阵, 数据采集速度为 15 MHz, 一次采集为 13 ms, 连续采集 512 次, 共计用时 0.67 s。

* 国家自然科学基金资助项目 (69671018)。

收稿日期: 1999-04-26; 收到修改稿日期: 1999-07-30

用探测器 CCD 线阵测得水柱的彩虹角分布示于图 2。水管内径为 0.60 mm，CCD 测量的角宽度为 0.839°。从而 CCD 一个单元对应的角宽为 0.004°。曲线显示出除艾里振荡以外，还有明显叠加在艾里曲线上的高频振荡。所关心的是散射光强的角位置，为了便于比较，其纵坐标为相对光强。当水的折射率为 1.3324 时，其一级彩虹角为 138.27°。

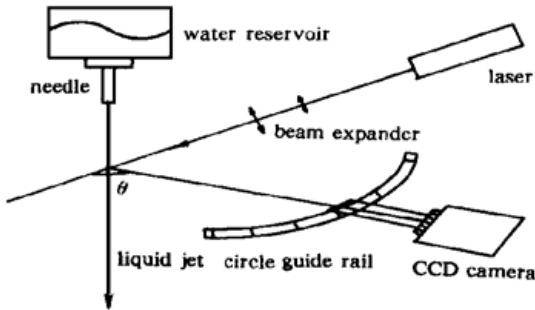


Fig. 1 Outline of the rainbow experimental setup

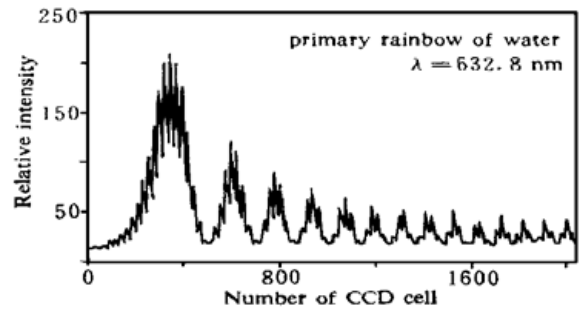


Fig. 2 The first rainbow experimental patterns of water jet

图 3 分别为光纤和乙醚液柱的第一级彩虹光强角分布的实验测量值。与图 4 中乙醚液柱的米氏理论散射光强结果比较，图 3 中测量曲线显示出明显艾里振荡。由于直径为 0.60 mm 的乙醚液柱，其尺寸参数较大，散射强度角分布存在变化剧烈的高频振荡。而此时 CCD 与被

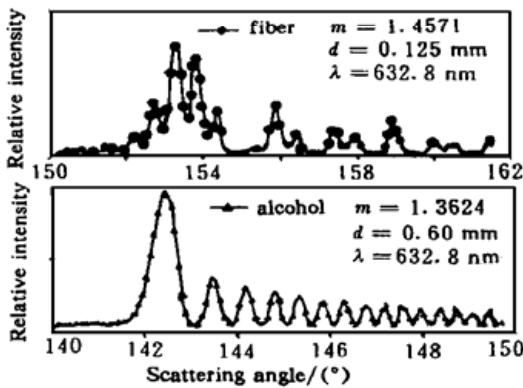


Fig. 3 The experimental patterns of first rainbow for fiber and alcohol

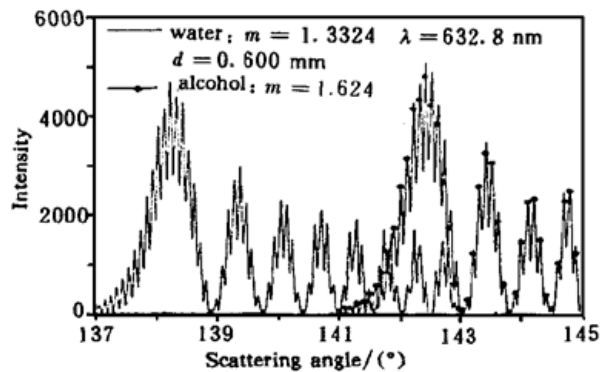


Fig. 4 Comparison of rainbow intensity distributions between water and alcohol jet with diameter 0.600 mm

测液柱或光纤的距离较近，CCD 一个单元对应的角宽为 0.005°，空间角分辨率偏低，使叠加在艾里曲线上的更高频振荡未被测量到。从上述各图中艾里曲线，可以准确地获得几何彩虹角。这些彩虹角位置对折射率实部的变化十分敏感，可由此反演被测圆柱的折射率。图 5 表示均匀光纤二级彩虹光强角分布的实验和理论结果，无论是散射光强分布的形状，还是峰值对应的角位置均吻合良好。此外，从理论和实验上均观察到叠加在艾里曲线上的高频振荡。为了反演圆柱的直径，必须提高 CCD 单元的空间角分辨率。最近作者对液柱彩虹强度分布数据进行了处理，反演了其直径，并研究了液柱的不稳定性^[3]。

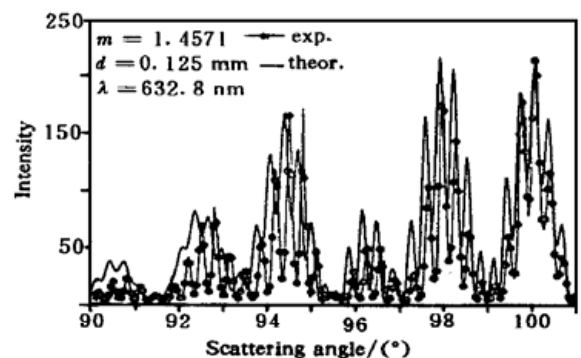


Fig. 5 The experimental and theoretical patterns of second rainbow for fiber

3 反演圆柱粒子折射率和直径的几何光学方法

对于尺寸参数相当大的球形或柱形粒子, 当被光照射时可产生明显的彩虹现象。第一级和第二级彩虹光强角分布之间存在暗区。从几何光学角度上看, 它是分别由水柱的一次和二次内反射光线之间干涉的结果。由艾里理论可以获得彩虹的振荡分布。从图 4 可见, 直径均为 $d = 0.60 \text{ mm}$ 的水和乙醚, 由于它们的折射率分别为 $m = 1.3324$ 和 $m = 1.3624$, 其第一级几何彩虹角相差很大。因此, 彩虹角位置对折射率非常敏感, 用一级彩虹角反演折射率的精度比其他测量方法要高一个量级。根据几何光学, 由一级几何彩虹角的位置不难求出折射率。几何彩虹角与折射率关系如下^[4]:

$$\theta_g = \pi + 2 \arcsin \left(\frac{4 - m^2}{3} \right)^{1/2} - 4 \arcsin \left(\frac{4 - m^2}{3m^2} \right)^{1/2}. \quad (1)$$

作为几何光学近似, (1) 式给出了一级彩虹角与折射率的变化关系。实际上, 当粒子尺寸

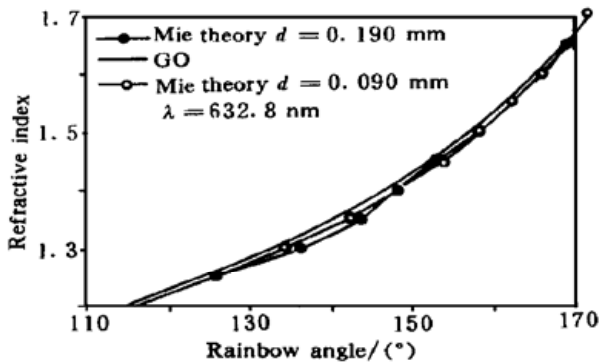


Fig. 6 Relation between geometric rainbow angle and refractive index

参数较小时, 由几何光学和米氏理论得到的彩虹角位置还是有一些差异, 如图 6 所示。一级彩虹的艾里分布 (相当于将米氏理论计算获得彩虹曲线的高频振荡进行平滑) 是相邻平行光通过圆柱一次内反射后, 远场干涉的结果。设一级彩虹分布上任意两个散射角位置为 θ_1 和 θ_2 , 它们之间的干涉条纹数为 N , 则圆柱的直径 d 满足^[4]

$$d = \frac{N\lambda}{F(\theta_1) - F(\theta_2)}, \quad (2)$$

对于垂直入射的情况, 上式中

$$F(\theta) = [m^2 + 1 - 2m \cos(\theta/2)]^{1/2} + \sin(\theta/2). \quad (3)$$

在实验测量彩虹角分布的角度范围 $\theta_2 \sim \theta_1$ 内, 尤其对于大尺寸参数的圆柱, 彩虹的艾里曲线上叠加了高频的振荡, 使人们难以准确地判断干涉条纹数 N 。所以利用 (2) 式和 (3) 式反演圆柱直径存在较大的误差。

4 彩虹强度角谱分布反演圆柱直径

与米氏理论相比, 艾里理论不能获得叠加在艾里曲线上而实际存在的高频振荡。用几何光学获得的彩虹角仅取决于粒子的折射率实部, 且与粒子的直径无关。但实际上粒子的直径变化也会造成彩虹角的变化。几何光学和艾里理论均不能解释偏振效应的影响, 即仅对 TM 波才能观察到明显的彩虹现象。为了能高精度地利用彩虹强度角分布反演圆柱的直径, 有必要将几何光学近似与米氏理论结合起来, 研究彩虹强度的角频谱^[5]。与图 4 对应, 图 7 给出了水和乙醚彩虹强度角谱分布的角谱。进行快速傅里叶变换的采样点数为 4096, 角度间隔为 0.001° 。从图中可以看

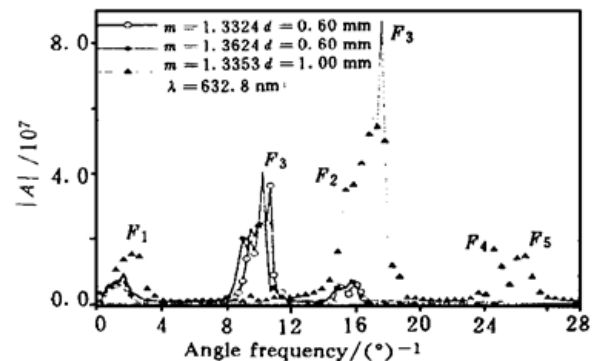


Fig. 7 Angular frequency with respect to the derivative distribution of rainbow intensity. A: Fourier amplitude

到, 直径为 1.00 mm 水柱的角频谱数位置和其幅度明显地高于直径为 0.60 mm 液柱的角频谱。角频 F 对应于单位散射角内散射光强度振荡数。图 7 中每条曲线均有 5 个较明显的角谱峰值 $F_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 。它们可以用平行光在无限远处干涉原理给予解释。其中 F_1 是相距为 δ 的平行光线通过柱内表面反射产生干涉效应的贡献, 它对应于艾里振荡曲线, 即图 4 中彩虹强度分布的轮廓线。 F_2 和 F_3 分别是光线被柱外反射与上述平行光线通过内表面反射后产生干涉的结果, 它导致了在艾里曲线上叠加的部分高频振荡。 F_4 和 F_5 是掠入射光线通过柱表面爬行(表面波)的边缘射线与彩虹角附近内反射的平行光线干涉产生的更高频的小振荡。而且有 $F_1 = F_3 - F_2 = F_5 - F_4$ 。类似于扬氏双缝干涉的分析, F_1 等于两条平行内反射干涉射线的光程差的波数(即光程差与波长之比)。在几何彩虹角 θ_{rg} 时, 其光程差为零, 导致 $F_1 = 0$ 。于是, 对应高频振荡的角频 F_2 和 F_3 相同, 即

$$F_{\text{ripple}} = F_2|_{\theta, rg} = F_3|_{\theta, rg}, \quad (4)$$

通过计算对应于彩虹角时, 在无限远处外反射光线与内反射光线的程差, 不难获得

$$F_{\text{ripple}} = \frac{d}{2\lambda} (\cos \tau_{rg} + \cos \frac{\theta_{rg}}{2}) \frac{\pi}{180^\circ} \quad (5)$$

τ_{rg} 是彩虹角对应的入射角的余角。 F_{ripple} 可以从实验测得的彩虹分布的角频谱中获得。但是, 由于功率角频谱是来自于彩虹角附近的有限角度范围($\theta_2 \sim \theta_1$) 的傅里叶变换, F_{ripple} 峰位置将在 F_2 和 F_3 峰间偏移。如果近似取 F_1 等于艾里角频 F_{Airy} , 则

$$F_2 = F_{\text{ripple}} - F_{\text{Airy}}/2, \quad (6)$$

$$F_3 = F_{\text{ripple}} + F_{\text{Airy}}/2, \quad (7)$$

其中

$$F_{\text{Airy}} = \frac{1}{2.37959} \left(\frac{4d}{\lambda} \right)^{2/3} \left(\frac{\sin^3 \tau_{rg}}{\cos \tau_{rg}} \right)^{1/3} \frac{\pi}{180^\circ} \quad (8)$$

及

$$\sin \tau_{rg} = \sqrt{(m^2 - 1)/3}.$$

利用上述各式, 通过对圆柱彩虹强度分布的实验测量, 以及对数据的导数进行傅里叶变换, 获得 F_2 和 F_3 , 则可以反演圆柱的直径。

5 结果与讨论

图 8 给出了彩虹强度导数的角频 F_1 和 F_3 与圆柱直径的关系, 其中实线为 (7) 式和 (8) 式的结果, 点划线对应于米氏理论结果。对于角频 F_3 , 两种方法获得的结果吻合很好。当圆柱尺寸参数大于 $500 \mu\text{m}$ 时, 两者的误差不大于 0.1%。但从图 8 也看出, 根据艾里理论获得的艾里角频, 即 F_1 , 对折射率和圆柱直径的变化并不十分灵敏。而依据米氏理论获得的 F_1 随粒子直径还是有较明显的变化, 而且两种曲线有明显的差别。随着直径的增加, 这种误差越来越大。显然, 仅利用彩虹强度艾里分布的实验数据, 获得的角频 F_1 反演圆柱直径, 存在较大的误差。因此, 结合米氏理论, 利用高频角谱 F_3 反演粒子直径将获得相当高的精度。表 1 给出了利用 (7) 式和 (8) 式, 以及由米氏理论获得的不同直径水柱的角谱 F_1 与 F_3 数据。由 F_3 反演直径时, 当 ΔF_3

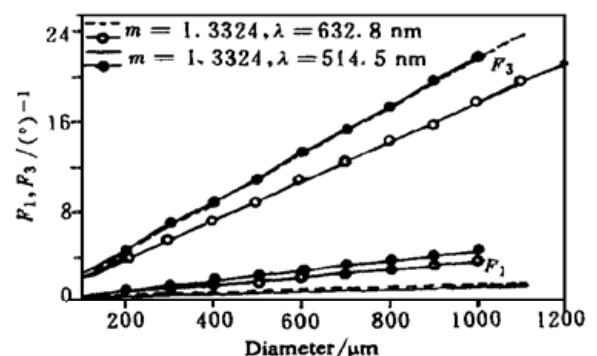


Fig. 8 Relation between the angular frequency and the diameter of cylinder

$= 0.0100$, 有 $\Delta d = 0.57 \mu\text{m}$ 。而由 F_1 反演直径时, 当 $\Delta F_1 = 0.0100$, 有 $\Delta d = 10.00 \mu\text{m}$ 。从表 1 看到, 两种方法的平均偏差 $\Delta F_3 = 0.1632$, 对应直径的平均偏差 $\Delta d = 9.26 \mu\text{m}$ 。随着直径增大, ΔF_1 的偏差越来越大, 无法准确地由 (8) 式反演圆柱直径。

根据图 2 所示水的一级彩虹强度分布实验数据, 将它的导数进行傅里叶变换, 获得频谱分布示于图 9。角频 $F_3 = 10.9500$, 对应的水柱的直径为 $619.55 \mu\text{m}$ 。尽管实验中水管的内径为 $600.00 \mu\text{m}$, 但由于流出水柱的不稳定性, 带来直径起伏, 作者也对这种不稳定性进行了讨论^[5]。

Table 1. Angular frequency of derivatire distribution of F_1 and F_3 rainbow intensity for water jet with different diameters

diameter $d / \mu\text{m}$	F_1		F_3	
	Mie theory	equation (8)	Mie theory	equation (7)
200	0.7324	0.4582	3.9063	3.5964
300	0.9796	0.6004	5.3711	5.3511
400	1.4648	0.7274	7.3242	7.0982
500	1.7090	0.8440	8.7891	8.8402
600	2.0752	0.9531	10.7422	10.5784
700	2.4414	1.0563	12.2070	12.3136
800	2.8076	1.1546	14.1602	14.0464
900	3.1738	1.2490	15.6250	15.7772
1000	3.5400	1.3398	17.5781	17.5062

为了模拟实验测量, 本文根据米氏理论计算了折射率为 1.3324、直径为 0.600 mm 水柱的彩虹强度角分布。3 个样本曲线的取值范围分别为 8.3° 和不同位置的 2.1° , 取采样点为 4096, 并均包含一级彩虹的第一个艾里主峰。通过快速傅里叶变换给出了强度分布导数的角谱曲线, 如图 10 所示。显然, 3 种采样范围均可获得角频 F_3 。其中采样范围为 $(135.0^\circ \sim 143.3^\circ)$ 的曲线, 角间距为 0.005° , 频率间隔为 0.122, 获得对应的 $F_3 = 10.6200$ 。根据 (7) 式反演获得的直径为 $609.05 \mu\text{m}$ 。采样范围为 $(136.5^\circ \sim 138.6^\circ)$ 和 $(137.0^\circ \sim 139.1^\circ)$ 的曲线是仅取一级彩虹的第一艾里峰对应的角谱分布。虽然, 频率间隔为 $0.488/(\circ)$, 获得的角频 F_3 理论值为 10.7422, 与 (7) 式获得的结果完全一致, 即由此反演的直径为 $600 \mu\text{m}$ 。但获得的频谱曲线丢失了很多其它信息。这是由于减小了角宽, 并突出了高频振荡, 故能准确地获得角频 F_3 。表明测量彩虹强度分布角分辨率只要不大于 0.002° , 均可通过彩虹强度分

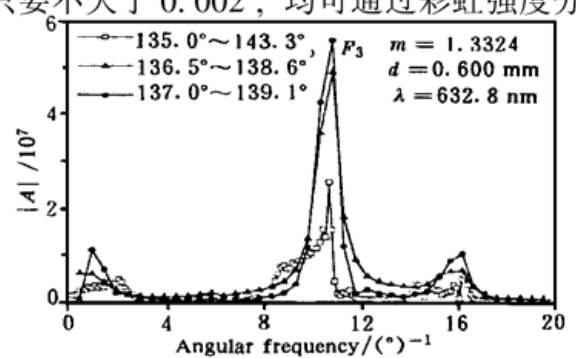
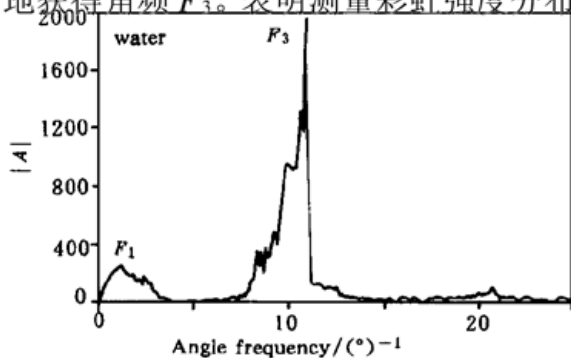


Fig. 9 Angular frequency of derivative distribution of the measured primary rainbow shown in Fig. 2. A: Fourier amplitude

Fig. 10 Angular frequency of derivative distribution of rainbow intensity with different ranges. A: Fourier amplitude

布实验数据的角谱反演圆柱的直径。由于角间距 $\Delta\theta$ 与频率间隔 Δf 和采样数 N 之间关系为 $N\Delta f\Delta\theta = 1$, 因此在实验中必须在保证高角分辨率下, 尽可能增大测量角宽, 以便获得准确的角频 F_3 , 用于对圆柱直径的反演。

结束语 应用粒子光散射的彩虹现象对其折射率和尺寸参数测量, 是近些年国内外学者感兴趣的课题之一。该方法可以用于在线测量并具有相当高的精度。本文较详细地讨论了利用彩虹角谱反演圆柱的方法与精度分析。根据实验数据反演直径的结果, 将进一步讨论与分析。

参 考 文 献

- [1] Wu Zhensen, Guo Lixin. Electromagnetic scattering from a multilayered cylinder arbitrarily located in a Gaussian beam, A new recursive algorithms, *Progress in Electromagnetic Research*, Cambridge, Massachusetts, USA: EMW Publishing, 1998, **18** : 317~ 333, and *J. Electromagnetic Waves and Application*, (abstract), 1998, **12** (6) : 725~ 726
- [2] Corbin C, Han Xiange, Wu Zhensen *et al.*. Rainbow refractometry: Application to nonhomogeneous scatters. *Proc. 3rd Int. Conference on Fluid Dynamic Measurement and Its Applications*, Beijing: International Academic Publisher, 1997, **39-44** : 14~ 17
- [3] Han Xiange, Ren Kuanfang, Wu Zhensen *et al.*. Characterization of initial disturbances in a liquid jet by rainbow sizing. *Appl. Opt.*, 1998, **37** (36) : 4575~ 4581
- [4] 吴振森, 李明柱. 彩虹现象和圆柱折射率及直径的反演. *光散射学报*, 1997, **9** (2-3) : 358~ 360
- [5] Van Beeck J. Rainbow phenomena: Development of a laser-based, non-instrusive technique for measuring droplet size, temperature and velocity, PhD Thesis, Technische University of Eindhoven, The Netherlands, 1997

Measurement of Infinite Cylindrical Diameter by Angular Frequencies of Rainbow Intensities

Wu Zhensen Guo Lixin Han Xiange Hou Shanhui

(*Institute of Mathematics and Physics, Xidian University, Xi'an 710071*)

(Received 26 April 1999; revised 30 July 1999)

Abstract The experimental results of the first and second rainbows for water, alcohol jet and fiber are measured by rainbow refractometer with a linear CCD camera. Based on Mie theory the rainbow intensity distribution is calculated, and numerical results agree with the experiment. The limitation of the geometric optics and Airy theory is discussed. And the rainbow phenomena are interpreted reasonably by using geometric optics and Mie theory. The refractive index can be determined by the first rainbow angle. Based on the fast Fourier transform of the derivative distribution of rainbow intensities, the diameter of a droplet is measured by the angular frequencies. The precision of measurement is also discussed by means of the angular frequency.

Key words Mie theory, Airy theory, light scattering, rainbow, fast Fourier transform.