

自适应光学系统的控制残余方差分析*

李新阳 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所, 国家 863 计划大气光学重点实验室, 成都 610209)

摘 要 分析自适应光学系统的控制残余方差与控制带宽的关系。对于存在时间延迟的自适应光学系统, 推导了计算大气湍流控制残余方差的近似公式, 并给出了有探测噪声情况下确定系统最优控制带宽的公式。以 61 单元自适应光学系统为例, 讨论了实际自适应光学系统中控制带宽的优化选择问题。

关键词 自适应光学, 控制残余方差, 控制带宽, 探测噪声, 最优控制。

1 引 言

自适应光学技术被用于透过大气的目标成像, 或激光大气传输的光学系统中, 实时校正由大气湍流扰动引起的随机波前畸变, 提高光束质量^[1]。一般自适应光学系统的控制带宽越大, 系统的控制残余方差越小。对于探测与校正间没有时间延迟的理想自适应光学系统, 控制残余方差与系统的闭环控制带宽和大气湍流的格林伍德(Greenwood)频率有关^[2]。但实际自适应光学系统的探测与校正间有一定的时间延迟, 对系统的控制带宽有较大影响^[3]。这种情况下系统的控制残余方差与控制带宽的关系较复杂^[4], 目前还没有方便的计算公式。另外自适应光学系统的波前探测器噪声对控制残余方差也有影响^[5]。实际自适应光学系统中既有时间延迟又存在探测噪声^[6]。为了最大限度地利用系统资源, 希望根据系统的实际情况来合理调整控制器带宽, 使系统工作在最优状态。

2 大气湍流波前扰动的时特性

大气湍流使透过大气传输光束的波前发生动态畸变。一般用时间功率谱密度函数(简称功率谱)分析信号的能量随频率的分布等时间特性。对于符合科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)统计规律的大气湍流, 畸变波前功率谱的高频段是频率的 $-8/3$ 次方关系^[2]:

$$F_t(f)|_{f \rightarrow \infty} = 0.0326k^2 \sec(\xi) f^{-8/3} \int_0^L C_n^2(z) v^{8/3}(z) dz, \quad (1)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长, ξ 为天顶角, f 为时间频率, L 为传输距离, $C_n^2(z)$ 为传输路径上的折射率结构常数, $v(z)$ 为传输路径上的垂直风速。功率谱的单位是 rad^2/Hz 。根据格林

* 国家 863 高技术计划资助项目。

收稿日期: 1999-03-10; 收到修改稿日期: 1999-05-27

伍德等人的分析, 与自适应光学系统的动态控制有密切关系的是大气湍流波前扰动功率谱的高频段部分, 所以常用高频段的功率谱表示大气湍流整个频段的功率谱。(1) 式又可以表示为:

$$F_t(f) = (f_c^{5/6}/\pi)f^{-8/3}, \quad (2)$$

$$\text{其中 } f_c = [0.102k^2 \sec(\xi) \int_0^L C_n^2(z) v^{5/6}(z) dz]^{3/5}, \quad (3)$$

为大气湍流的格林伍德频率, 是表示大气湍流强度的一个重要参数。

波前探测器的输出信号受到探测噪声的影响。探测噪声的大小受采样时间、信号光强等许多因素的影响。在系统采样率固定和信标光强一定的情况下, 可以认为探测噪声是随机白噪声序列, 其大小保持不变, 功率谱为常数^[4]:

$$F_n(f) = \sigma_n^2, \quad (4)$$

噪声功率谱的单位也是 rad^2/Hz 。从波前探测器上测量得到的波前功率谱是大气湍流的功率谱 $F_t(f)$ 与探测噪声功率谱 $F_n(f)$ 叠加的结果。图 1 是 61 单元自适应光学系统的哈特曼-夏克 (Hartmann-Shack) 波前探测器测量的一个波前功率谱。从图中看到, 波前功率谱与频率成 $-8/3$ 次方关系。由于探测噪声叠加的结果, 功率谱高频段呈平台状, 平台对应的值就是噪声功率谱 σ_n^2 的值。把湍流功率谱与探测噪声功率谱大小相同时的频率称为自适应光学系统的信噪比截止频率 f_{snr} , 即 $F_t(f_{\text{snr}}) = F_n(f_{\text{snr}})$, 得到:

$$f_{\text{snr}} = \left(\frac{f_c^{5/6}}{\pi\sigma_n^2}\right)^{3/5}, \quad (5)$$

信噪比截止频率反映了大气湍流波前扰动相对探测噪声的强度水平。系统的信噪比截止频率越高, 表明探测噪声对系统校正精度的影响越小。从图 1 的波前功率谱曲线中可以直接得到这个数据的信噪比截止频率约为 120 Hz, 噪声功率谱的值 $\sigma_n^2 \approx 6 \times 10^{-6} (\text{rad}^2/\text{Hz})$ 。

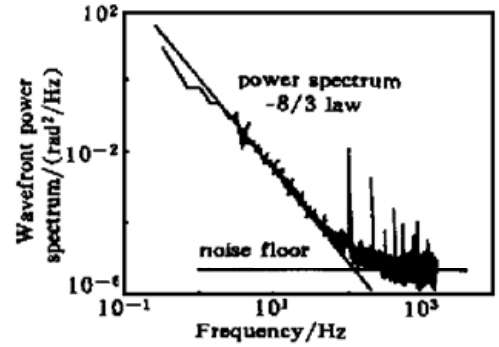


Fig. 1 A typical wavefront phase power spectrum measured on 61 element adaptive optics system

3 理想自适应光学系统的控制残余方差

自适应光学系统的波前控制残余方差 σ_{sevo}^2 是系统对大气湍流扰动部分的控制残余方差 σ_{st}^2 与波前传感器的噪声引入的残余方差 σ_{sn}^2 之和^[4],

$$\sigma_{\text{sevo}}^2 = \int_0^{\infty} |E(f)|^2 F_t(f) df + \int_0^{\infty} |H(f)|^2 F_n(f) df = \sigma_{\text{st}}^2 + \sigma_{\text{sn}}^2, \quad (6)$$

其中 $H(f)$ 是自适应光学控制系统的闭环传递函数, $E(f)$ 是控制系统的误差传递函数。误差传递函数反映自适应光学系统对大气湍流波前扰动的抑制能力, 而闭环传递函数反映自适应光学系统对探测噪声的抑制能力。理想自适应光学系统的波前探测和波前校正之间没有时间延迟, 控制系统的闭环传递函数和误差传递函数分别为:

$$H(f) = (1 + jf/f_{3\text{dB}})^{-1}, \quad (7)$$

$$E(f) = 1 - H(f) = (jf/f_{3\text{dB}})(1 + jf/f_{3\text{dB}})^{-1}, \quad (8)$$

其中 $f_{3\text{dB}}$ 为系统的闭环带宽, 定义为系统的闭环传递函数增益 -3dB 时的频率:

$$|H(f_{3\text{dB}})|^2 = \frac{1}{2}, \tag{9}$$

Greenwood 等人得到这种无时间延迟自适应光学系统的湍流控制残余方差为:

$$\sigma_{\text{st}}^2 = (f_{\text{C}}/f_{3\text{dB}})^{5/6}, \tag{10}$$

同样易得探测噪声带来的控制残余方差为:

$$\sigma_{\text{sn}}^2 = \frac{\pi}{2} \sigma_n^2 f_{3\text{dB}}, \tag{11}$$

总的控制残余方差为:

$$\sigma_{\text{servo}}^2 = (f_{\text{C}}/f_{3\text{dB}})^{5/6} + \frac{\pi}{2} \sigma_n^2 f_{3\text{dB}}. \tag{12}$$

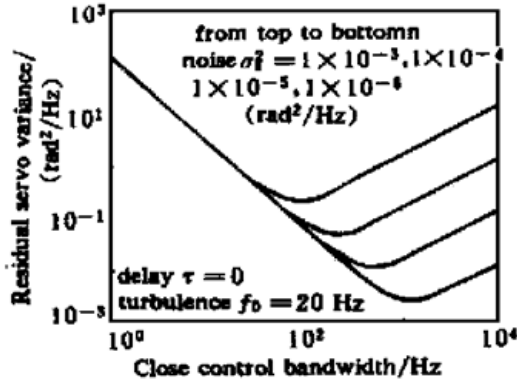


图 2 是对于 $f_{\text{C}} = 20 \text{ Hz}$ 的大气湍流, 控制残余方差 σ_{servo}^2 与系统的闭环带宽 $f_{3\text{dB}}$ 和探测噪声的关系。可见存在一个最优带宽使系统的控制残余方差为极小值。上式对闭环带宽求导并令导数为零, 得到自适应光学系统的最优闭环控制带宽为:

$$f_{3\text{dB}}^* = \left(\frac{3}{10}\right)^{-3/6} \left(\frac{F_{\text{C}}^{5/6}}{\pi \sigma_n^2}\right)^{3/6} = 1.57 f_{\text{snr}}, \tag{13}$$

可见最优闭环控制带宽 $f_{3\text{dB}}^*$ 只与系统的信噪比截止频率 f_{snr} 有关。这时系统的控制残余方差达到最小值:

$$\sigma_{\text{servo}}^2|_{\text{min}} = 2.57(\sigma_n^2 f_{\text{C}})^{5/6}. \tag{14}$$

Fig. 2 Residual servo variance versus the close control bandwidth with measurement noise but without time delay

4 有时间延迟的自适应光学系统的控制残余方差

实际自适应光学系统的波前探测和波前校正不是同时完成的, 波前探测器的光子积累、探测器信号读出、波前计算等都会造成一定的时间延迟。时间延迟对自适应光学系统的控制稳定性和控制带宽影响很大。在这种系统中加上时间纯滞后补偿控制器可以改善系统的控制特性。这时系统的闭环传递函数为^[3, 4]:

$$H(f) = \frac{\exp(-j2\pi\tau f)}{1 + jf/f_{3\text{dB}}}, \tag{15}$$

其中 τ 是系统中的总时间延迟, $f_{3\text{dB}}$ 仍为系统的闭环带宽。这时自适应光学系统的湍流控制残余方差较为复杂:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{st}}^2 &= \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{\exp(-j2\pi\tau f)}{1 + jf/f_{3\text{dB}}} \right|^2 \frac{f_{\text{C}}^{5/6}}{\pi} f^{-5/6} df = \\ &= \frac{f_{\text{C}}^{5/6}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(f/f_{3\text{dB}})^2 + 2(f/f_{3\text{dB}}) \sin 2\pi\tau f + 4 \sin^2 \pi\tau f}{1 + (f/f_{3\text{dB}})^2} f^{-5/6} df, \end{aligned} \tag{16}$$

按积分内的分子表达式把总的积分结果分为三项之和。其中第一项表示没有时间延迟情况下的控制残余方差, 其积分结果可以根据伽马函数积分公式得到:

$$\frac{f_{\text{C}}^{5/6}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(f/f_{3\text{dB}})^2}{1 + (f/f_{3\text{dB}})^2} f^{-5/6} df = (f_{\text{C}}/f_{3\text{dB}})^{5/6}, \tag{17}$$

考虑到 $[1 + (f/f_{3\text{dB}})^2]^{-1} f^{-5/6} \approx f^{-5/6}$, 利用积分公式, 得到第二、第三项的近似积分结果为:

$$\frac{f_G^{5/6}}{\pi} \int_0^\infty \frac{2(f/f_{3\text{dB}}) \sin 2\pi f \tau}{1 + (f/f_{3\text{dB}})^2} f^{-5/6} df \approx \frac{2f_G^{5/6}}{\pi f_{3\text{dB}}} \int_0^\infty \sin(2\pi f \tau) f^{-5/6} df =$$

$$2.2156(2\pi \tau f_{3\text{dB}})^{2/3} (f_G/f_{3\text{dB}})^{5/6}, \tag{18}$$

$$\frac{f_G^{5/6}}{\pi} \int_0^\infty \frac{4 \sin^2 \pi f \tau}{1 + (f/f_{3\text{dB}})^2} f^{-5/6} df \approx \frac{4f_G^{5/6}}{\pi} \int_0^\infty \sin^2(\pi f \tau) f^{-5/6} df =$$

$$1.3292(2\pi \tau f_{3\text{dB}})^{2/3} (f_G/f_{3\text{dB}})^{5/6}, \tag{19}$$

其中 $f_{3\text{dB}}$ 越大近似结果的准确度越高。总的湍流控制残余方差为上面三项之和:

$$\sigma_{st}^2 \approx (f_G/f_{3\text{dB}})^{5/6} [1 + 2.2156(2\pi \tau f_{3\text{dB}})^{2/3} + 1.3292(2\pi \tau f_{3\text{dB}})^{2/3}], \tag{20}$$

括号内的第一项就是理想自适应光学系统的湍流控制残余方差, 第二、第三项是时间延迟所增加的湍流控制残余方差部分。上式可以表示成另一种形式:

$$\sigma_{st}^2 \approx (f_c/f_0)^{5/6}, \tag{21}$$

其中

$$f_0 = f_{3\text{dB}} [1 + 2.2156(2\pi \tau f_{3\text{dB}})^{2/3} + 1.3292(2\pi \tau f_{3\text{dB}})^{2/3}]^{-3/6}. \tag{22}$$

f_0 的物理意义十分明确: 对于时间延迟为 τ 的自适应光学系统, 当其闭环带宽为 $f_{3\text{dB}}$ 时, 系统对大气湍流扰动的真正校正能力仅相当于闭环带宽为 f_0 的无时间延迟理想系统, 所以把 f_0 称为系统的校正带宽。对比发现, 校正带宽 f_0 与文献[3] 讨论的控制系统开环带宽 f_g (开环传递函数增益 0 dB 频率) 和有效带宽 $f_{e3\text{dB}}$ (误差传递函数增益 -3 dB 频率) 接近。它们与闭环带宽的关系分别为:

$$f_g = \frac{f_{3\text{dB}}}{1 + 2\pi \tau f_{3\text{dB}}}, \quad f_{e3\text{dB}} = \frac{f_{3\text{dB}}}{[2(1 + 2\pi \tau f_{3\text{dB}})^2 - 1]^{1/2}}. \tag{23}$$

可见当时间延迟 $\tau = 0$ 时, $f_{3\text{dB}} = f_0 = f_g = f_{e3\text{dB}}$ 。如图 3 所示, 当时间延迟较大时校正带宽 f_0 只有 $f_{3\text{dB}}$ 的几分之一, 介于 f_g 与 $f_{e3\text{dB}}$ 之间。对于 $f_G = 20$ Hz 的大气湍流, 湍流控制残余方差与自适应光学系统闭环带宽的关系如图 4 所示。(20) 式的近似计算结果比准确结果稍微偏大, 当 $f_{3\text{dB}}$ 较大时近似计算结果比较准确。(20)~(22) 式可以作为有时间延迟条件下湍流控制残余方差的近似计算公式。

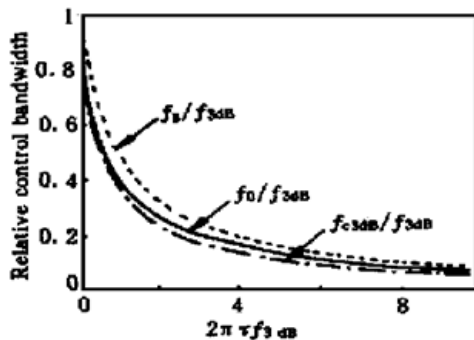


Fig. 3 The relationship between control bandwidths and time delay

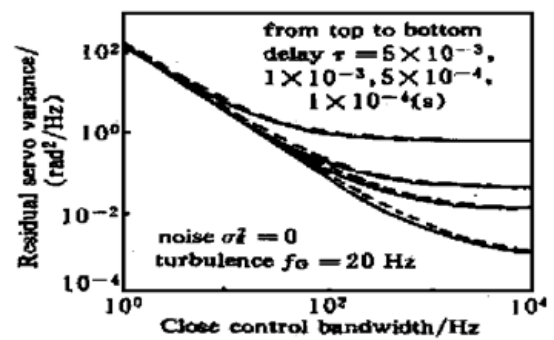


Fig. 4 Residual servo variance versus the close control bandwidth with time delay but without measurement noise. Solid line: accurate result; dotted line: approximate formula result

5 有时间延迟自适应光学系统的最优控制带宽

5.1 考虑探测噪声后自适应光学系统的最优控制带宽

有时间延迟情况下自适应光学系统的探测噪声引入的控制残余方差与系统的闭环带宽成正比:

$$\sigma_{sn}^2 = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-j2\pi ft)}{1 + jf/f_{3dB}}|^2 \sigma_n^2 df = \frac{\pi}{2} f_{3dB} \sigma_n^2, \tag{24}$$

这与无时间延迟情况下的(11)式相同。但因为有时间延迟情况下系统的闭环带宽大得多,探测噪声对系统的影响也要大得多。这时自适应光学系统的控制残余方差是(20)和(24)两式之和。图5是当考虑探测噪声影响时,控制残余方差 σ_{servo}^2 与系统闭环带宽 f_{3dB} 的关系。与图4相比,系统的时间延迟越小,即控制带宽越大,探测噪声对系统控制残余方差的影响越剧烈。残余方差先随着系统闭环带宽的增大而减小,当闭环带宽大于一定值后残余方差又迅速增大。为了得到最优控制带宽的解析表达式,把(20)式中第二项的指数 $2/3$ 近似为 $8/9$,因为另一指数 $5/3$ 项在(20)式中占主导地位,这种近似对求取最优控制带宽影响不大。再考虑(24)式,把总的控制残余方差对闭环带宽求导并令导数为零,得到方程:

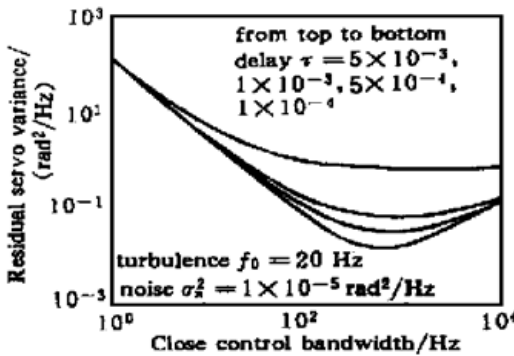


Fig. 5 Residual servo variance versus the close control bandwidth with time delay and measurement noise

测噪声对系统的影响也要大得多。这时自适应光学系统的控制残余方差是(20)和(24)两式之和。图5是当考虑探测噪声影响时,控制残余方差 σ_{servo}^2 与系统闭环带宽 f_{3dB} 的关系。与图4相比,系统的时间延迟越小,即控制带宽越大,探测噪声对系统控制残余方差的影响越剧烈。残余方差先随着系统闭环带宽的增大而减小,当闭环带宽大于一定值后残余方差又迅速增大。为了得到最优控制带宽的解析表达式,把(20)式中第二项的指数 $2/3$ 近似为 $8/9$,因为另一指数 $5/3$ 项在(20)式中占主导地位,这种近似对求取最优控制带宽影响不大。再考虑(24)式,把总的控制残余方差对闭环带宽求导并令导

数为零,得到方程:

$$p^{5/3} - 3.4465t^{5/3}p^{5/3} - 10/3 = 0, \tag{25}$$

其中 $p = f_{3dB}/f_{snr}$, $t = 2\pi f_{snr}$ 。利用三阶方程的卡尔丹求根公式得到最优闭环带宽为:

$$(f_{3dB}^*/f_{snr})^{5/3} = \sqrt[3]{\frac{5}{3} + \sqrt{(\frac{5}{3})^2 - 1.5162t^{5/3}}} + \sqrt[3]{\frac{5}{3} - \sqrt{(\frac{5}{3})^2 - 1.5162t^{5/3}}}. \tag{26}$$

由此得到一个重要结论:系统的最优控制带宽只与信噪比截止频率 f_{snr} 和时间延迟有关。当时间延迟 $\tau = 0$ 时,(26)式退化为(13)式。当自适应光学系统的控制器工作在最优闭环带宽条件下,系统的最小控制残余方差为:

$$\sigma_{servo}^2|_{min} = (f_c/f_0^*)^{5/3} + \frac{\pi}{2} f_{3dB}^* \sigma_n^2. \tag{27}$$

最优闭环带宽 f_{3dB}^* 下的校正带宽 f_0^* 可以根据(22)式计算。在自适应光学系统的控制器设计过程中,经常需要调整系统的开环带宽 f_g 。一旦 f_g 确定下来, f_0 、 f_{c3dB} 、 f_{3dB} 等也就确定下来了。自适应光学系统的最优开环带宽 f_g^* 与信噪比截止频率 f_{snr} 和时间延迟的关系如图6所示。其中最优开环带宽 f_g^* 根据(26)、(23)两式计算。图中实线是根据近似公式计算的结果,星点是准确计算出的结果。两者非常接近,可见我们得到的近似计算公式是比较准确的。

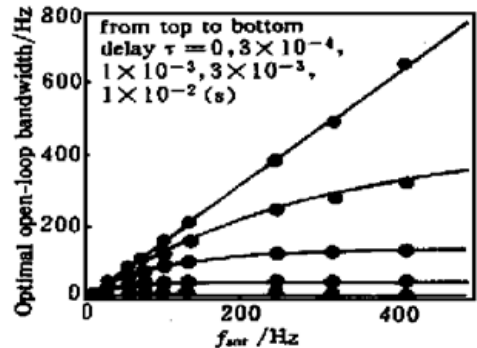


Fig. 6 The optimal open-loop bandwidth versus signal-noise-rate cut frequency f_{snr} . Solid lines are approximate formula results, ● points are accurate results

5.2 实际自适应光学系统的控制带宽优化设计

一个实际自适应光学系统的时间延迟是确定的,理论上如果能测量出大气湍流的信噪比截止频率,就可以按照(26)式或图6确定出系统的最优控制带宽。在系统的控制计算机中通过改变增益等控制参数,可以方便地把系统的控制带宽调整到最优。但以上的分析都是基于这样一个假设:系统的闭环带宽可以无穷大。实际上自适应光学系统的波前采样频率 f_s (夏克-哈特曼波前探测器中 CCD 的帧频)是有限的。根据采样定理,最大闭环带宽是系统采样频率的一半,出于工作稳定性的考虑,实际系统的闭环带宽被限制在采样频率的三分之一以内。根据文献[3],自适应光学系统的时间延迟一般为 $2T \sim 3T$,其中 $T = 1/f_s$ 为系统采样周期。按照闭环带宽 $f_{3dB} \leq f_s/3$,时间延迟 $\tau = 2.5T$ 的条件代入(23)式,得到系统的最大开环带宽为:

$$f_g \leq f_s/18.7, \quad (28)$$

实际系统的最大开环带宽应根据实际的采样频率和时间延迟决定。最终系统的控制带宽要根据最优控制带宽和最大控制带宽的大小综合决定。如果在一定工作环境下按(26)式确定的最优控制带宽在最大控制带宽的范围内,那么系统只需工作在最优控制带宽下即可,不必追求更高的控制带宽。反之,当工作环境的信噪比截止频率 f_{snr} 较高时,按(26)式确定的最优控制带宽会大于最大控制带宽,这时系统最好工作在最大控制带宽下,使控制带宽尽可能接近最优。虽然这时系统的控制残余方差比最优状态稍大,但系统已经工作在可能达到的最好状态,最大限度地利用了系统的资源,这种次最优状态也是所希望的一种结果。

利用以上的分析结果,讨论61单元自适应光学系统^[6]的最优控制带宽问题。在典型大气湍流强度下工作时,系统的信噪比剪切频率约为100~500 Hz。系统的哈特曼-夏克波前探测器有两种采样频率。当采样频率为838 Hz时,系统的时间延迟约3 ms。根据图6系统的最优开环带宽应为40~50 Hz,但根据(28)式最大开环带宽约45 Hz。当采样频率为2900 Hz时,系统的时间延迟约1 ms,系统的最优开环带宽应为90~150 Hz,也受到最大开环带宽约137 Hz的限制。所以当大气湍流较弱、信噪比剪切频率较小时,61单元自适应光学系统可以达到最优控制状态;而当大气湍流较强、信噪比剪切频率较高时,系统只能达到次最优控制状态。所以应根据不同的工作环境把系统调整到较好的状态下工作。

结 论 本文分析了自适应光学系统的控制残余方差与控制带宽、探测噪声等的关系问题。对于存在时间延迟的实际自适应光学系统,给出了计算控制残余方差的近似公式,并建立了等效带宽的概念来表示有延迟系统相对于无延迟的理想系统对大气湍流波前扰动的时域校正能力。对于有探测噪声的情况,还给出了估算系统最优控制带宽的公式。

本文得到的一个重要结论是:最优控制带宽只与系统的信噪比截止频率 f_{snr} 和时间延迟有关。其中信噪比截止频率表示系统中大气湍流扰动与波前探测噪声的相对水平,可以从波前实验数据的功率谱分析中直接得到。为了最大限度地利用系统资源,应根据系统的响应速度和探测噪声水平等实际情况来合理设计控制器,不可一味地追求高控制带宽。

本文的分析表明,目前两种61单元自适应光学系统的控制带宽水平和工作环境基本匹配。在实际工作中应根据工作环境的变化调整系统的控制带宽,使系统在最优控制带宽或次最优控制带宽状态下工作。

感谢中科院光电所八室的吴旭斌、王春红、鲜浩、李梅、饶长辉和中科院安徽光机所二室的龚知本、吴毅、王英俭、汪超等对本文工作的支持和帮助。

参 考 文 献

- [1] Tyson R K. Principles of adaptive optics. San Diego: Academic press, 1991.
- [2] Greenwood D P. Bandwidth specification for adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1977, **67** (3) : 390~ 393
- [3] 李新阳, 姜文汉. 自适应光学控制系统的有效带宽分析. 光学学报, 1997, **17**(12) : 1697~ 1702
- [4] Tyler G L. Turbulence-induced adaptive-optics performance degradation: evaluation in the time domain. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1984, **1**(3) : 251~ 262
- [5] Parenti R R, Sasiela R J. Laser-guide-star systems for astronomical applications. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1) : 288~ 309
- [6] 姜文汉, 王春红, 凌 宁等. 61 单元自适应光学系统. 量子电子学报, 1998, **15**(2) : 193~ 199

Analysis of the Residual Servo Variance for an Adaptive Optics System

Li Xinyang Jiang Wenhan

*(The Key Laboratory of the Atmospheric Optics of National High Technology,
Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)*

(Received 10 March 1999; revised 27 May 1999)

Abstract The relationship between residual servo variance and control bandwidth of an adaptive optics system is discussed. For a system with time delay, a approximate formula for calculating the residual servo variance is derived. The formula to calculate the optimal control bandwidth of a system with measurement noise is given. For an example, the problem of choosing the optimal control bandwidth of the 61 element adaptive optics system is discussed.

Key words adaptive optics, residual servo variance, control bandwidth, measurement noise, optimal control.