

非科尔莫戈罗夫湍流情况下光学波前的 到达角起伏方差分析*

饶长辉 姜文汉 凌 宁

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘 要 引入非科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)湍流情况下的归一化相位空间功率谱, 针对 G 倾斜和 Z 倾斜两种情形, 分别推导了非科尔莫戈罗夫湍流情况下光学波前的到达角起伏方差与相位空间功率谱指数下降因子 β 和归一化大气湍流相干长度 ρ_0 之间的关系。结果表明, 对于 $2 < \beta < 4$, 非科尔莫戈罗夫湍流情况下光学波前的到达角起伏方差随着 β 的增加而增大, β 相同时, G 倾斜方差总是小于 Z 倾斜方差。

关键词 非科尔莫戈罗夫湍流, 到达角起伏, G 倾斜, Z 倾斜。

1 引 言

长期以来, 光波在大气湍流中的传播研究均是围绕科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)^[1]湍流理论展开的, 且日臻成熟。Tatarskii^[2]应用科尔莫戈罗夫模型求解了光波在大气湍流中传播的波方程。根据 Tatarskii 的结果, Fried^[3, 4]应用泽尼克(Zernike)多项式描述了大气湍流对光学系统性能的影响, 并且定义了一个表征大气湍流强度的参量——大气湍流相干长度 r_0 。在实际测量 r_0 时, 通常是首先测量光波的到达角起伏方差, 然后再根据光波的到达角起伏方差与 r_0 之间的关系求出 r_0 。

各个观测台的站址不同, 观测时间不同, 大气湍流的强度和功率谱分布也不尽相同。在许多测量实验中, 大气湍流波前并不服从科尔莫戈罗夫谱。近几年来, 国内外已经报道了很多这方面的试验结果^[5, 6], 作者在很多实验中也发现类似现象, 这方面的研究也越来越受到各方面的重视。在国内外有关文献中, 关于光波的到达角起伏方差的分析均是对科尔莫戈罗夫湍流情形, 而对于非科尔莫戈罗夫湍流情况下的光波到达角起伏方差的分析还未见报道。本文通过引入非科尔莫戈罗夫湍流情况下的归一化相位空间功率谱, 针对 G 倾斜和 Z 倾斜两种情形, 分别推导了非科尔莫戈罗夫湍流情况下光学波前的到达角起伏方差与相位空间功率谱指数下降因子 β 和归一化大气湍流相干长度 ρ_0 之间的关系。必须指出, 本文的分析也适合科尔莫戈罗夫湍流情形。

* 国家自然科学基金资助项目(No. 69908006)。

收稿日期: 1999-03-23; 收到修改稿日期: 1999-05-25

2 非科尔莫戈罗夫湍流引入

在本文中, 惯性区域内非科尔莫戈罗夫湍流定义为折射率三维功率谱随频率增加呈任意功率指数下降。根据文献[7], 非科尔莫戈罗夫湍流情况下, 归一化相位空间功率谱为

$$W_{\phi}(k) = A_{\beta} k^{-\beta} / \rho_0^{\beta-2}, \quad 2 < \beta < 4 \quad (1)$$

式中 k 为空间频率; ρ_0 为归一化大气湍流相干长度, 它类似于大气湍流相干长度 r_0 , 是一个表征大气湍流强度的参数; A_{β} 为当 $D = \rho_0$ (D 为观测系统口径) 和去除整体平移(piston)后波前残余方差为 1 rad^2 时的归一化系数。当 $\beta = 11/3$ 时, (1) 式就是对应科尔莫戈罗夫湍流的空间功率谱, 此时 $A_{11/3} = 0.023$, $\rho_0 = r_0$ 。

文献[8]根据归一化相位功率谱推导出了相位空间结构函数为

$$D_{\phi}(r) = \gamma_{\beta} (r/\rho_0)^{\beta-2}, \quad (2)$$

式中

$$\gamma_{\beta} = \frac{2^{\beta-1} [\Gamma(\frac{\beta+2}{2})]^2 \Gamma(\frac{\beta+4}{2})}{\Gamma(\frac{\beta}{2}) \Gamma(\beta+1)}, \quad (3)$$

其中 $\Gamma(x)$ 为伽玛函数。

3 非科尔莫戈罗夫湍流情况下波前倾斜方差占总波前误差的比例

Boremann 和 Dainty^[7] 分析了非科尔莫戈罗夫湍流情况下, 光学波前泽尼克多项式展开所得各阶模式系数方差, 表示为:

$$\langle \alpha_j^2 \rangle = \frac{(n+1) \Gamma(\frac{2n+2-\beta}{2}) \Gamma(\frac{\beta+4}{2}) \Gamma(\frac{\beta}{2}) \sin[\pi(\beta-2)/2]}{\pi \Gamma(\frac{2n+4+\beta}{2})} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2}. \quad (4)$$

由于大气湍流光学波前泽尼克多项式分解的第二项和第三项分别对应 X 倾斜和 Y 倾斜(j 分别为 2 和 3), 因此根据(4)式可以得到非科尔莫戈罗夫湍流情况下波前倾斜方差占总波前误差的比例为

$$\eta_{\beta} = \frac{\langle \alpha_2^2 \rangle + \langle \alpha_3^2 \rangle}{\sum_{j=2}^{\infty} \langle \alpha_j^2 \rangle} = \frac{4 \Gamma(\frac{4-\beta}{2}) \Gamma(\frac{\beta+4}{2}) \Gamma(\frac{\beta}{2}) \sin[\pi(\beta-2)/2]}{\pi \Gamma(\frac{\beta+6}{2})} = \frac{4(\beta-2)}{\beta+4}. \quad (5)$$

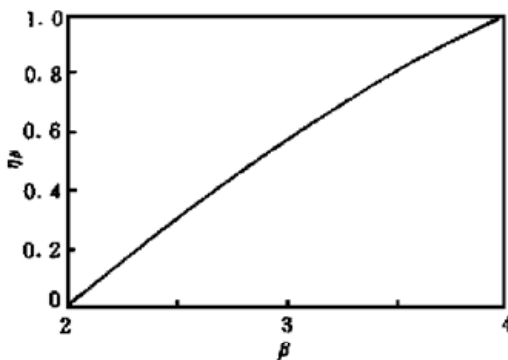


Fig. 1 η_{β} as function of β

图 1 给出了非科尔莫戈罗夫湍流情况下波前倾斜方差占总波前误差的比例随 β 变化的关系曲线。从图中可以看出, 当 $\beta = 2$ 时, 波前倾斜方差为 0; 当 $\beta = 4$ 时, 波前倾斜方差包括全部波前起伏方差。并且随着 β 的增加, 在大气湍流引起的相位扰动中波前倾斜分量所占的比例逐渐增大。这是由于大气湍流波前空间功率谱曲线随着 β 的增加而变得越来越陡峭, 导致其对应的低频分量所占比重也越来越大。

4 非科尔莫戈罗夫湍流情况下光学波前的到达角起伏方差

在实际系统中, 光学波前的到达角起伏通常有两种形式: 一种是 Z 倾斜, 即光学波前泽尼克展开多项式的倾斜项; 另一种是 G 倾斜, 即平均波前斜率。下面就这两种情形分别求出它们的到达角起伏方差。

4.1 非科尔莫戈罗夫湍流情况下的 Z 倾斜到达角起伏方差

根据 Z 倾斜的定义, 用 Z 倾斜拟合出的最佳光学波前可表示为

$$O_z(\mathbf{r}, t) = a_2(t)Z_2(\mathbf{r}/R) + a_3(t)Z_3(\mathbf{r}/R) = \frac{4}{D}[a_2(t)x + a_3(t)y], \quad (6)$$

式中 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 。于是 Z 倾斜为

$$\theta_z(t) = \frac{1}{k_0} \left(\frac{\partial O_z}{\partial x} + \frac{\partial O_z}{\partial y} \right) = \frac{2\lambda}{\pi D}[a_2(t) + a_3(t)], \quad (7)$$

由于 $\langle a_2(t)a_3(t) \rangle = 0$, 因此 Z 倾斜方差为

$$\langle \theta_z(t)^2 \rangle = (2\lambda/\pi D)^2 [\langle a_2(t)^2 \rangle + \langle a_3(t)^2 \rangle], \quad (8)$$

将(4)式代入(8)式可以得到非科尔莫戈罗夫湍流情况下的 Z 倾斜方差为

$$\langle \theta_z(t)^2 \rangle = H_\beta (\lambda/D)^2 (D/\rho_0)^{\beta-2} (\text{rad}^2), \quad (9)$$

式中 H_β 为归一化系数,

$$H_\beta = \frac{16\Gamma(\frac{4-\beta}{2})\Gamma(\frac{\beta+4}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2}) \sin[\pi(\beta-2)/2]}{\pi^3\Gamma(\frac{\beta+6}{2})} = \frac{16(\beta-2)}{\pi^2(\beta+4)}. \quad (10)$$

4.2 非科尔莫戈罗夫湍流情况下的 G 倾斜方差

在探测大气湍流光学波前斜率时, 通常采用哈特曼-夏克(Hartmann-Shack)、剪切干涉仪等波前传感器, 大多数情况下探测孔径均为方形, 而不是圆形。为结合实际情况, 下面只分析方形孔径的 G 倾斜方差。

对于方形孔径, G 倾斜可表示为^[9]

$$\theta_G(t) = \frac{1}{k_0} \int \mathbf{r} W(\mathbf{r}) [\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)] = - \frac{1}{k_0} \int \mathbf{r} [\nabla W(\mathbf{r})] \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (11)$$

式中 k_0 为波数, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 为探测光波长; “ ∇ ” 为梯度运算符; $W(\mathbf{r})$ 为子孔径权重函数。对于方形子孔径,

$$W(\mathbf{r}) = \frac{1}{D^2} \text{rect}\left(\frac{\mathbf{r}}{D}\right) = \begin{cases} D^{-2}, & |r_x| \leq D/2, |r_y| \leq D/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12)$$

式中 D 为子孔径尺寸。根据(12)式可以得到

$$\begin{aligned} \nabla W(\mathbf{r}) &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial r_x} W(r_x, r_y) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial r_y} W(r_x, r_y) = \\ &= \frac{\mathbf{i}}{D^2} [\delta(r_x + \frac{D}{2}) - \delta(r_x - \frac{D}{2})] \text{rect}\left(\frac{r_y}{D}\right) + \\ &+ \frac{\mathbf{j}}{D^2} [\delta(r_y + \frac{D}{2}) - \delta(r_y - \frac{D}{2})] \text{rect}\left(\frac{r_x}{D}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$, \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别为 x 方向和 y 方向的单位矢量, $\delta(x)$ 为狄拉克函数。于是 G 倾

斜方差可表示为

$$\langle |\Theta_C(t)|^2 \rangle = \frac{1}{k_0^2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 [\nabla W(\mathbf{r}_1)] \cdot [\nabla W(\mathbf{r}_2)] \langle \Phi(\mathbf{r}_1, t) \Phi(\mathbf{r}_2, t) \rangle. \quad (14)$$

假设大气湍流对光波波前的扰动空间平稳, 则根据(2)式可以得到

$$\langle \Phi(\mathbf{r}_1, t) \Phi(\mathbf{r}_2, t) \rangle = -\frac{1}{2} D \langle \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle = -\frac{\gamma_\beta}{2} \left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\rho_0} \right)^{\beta-2}, \quad (15)$$

将(13)式和(15)式代入(14)式可得

$$\langle |\Theta_C(t)|^2 \rangle = -\frac{\gamma_\beta}{k_0^2 D^3} \left(\frac{D}{\rho_0} \right)^{\beta-2} \int du \text{tri}\left(\frac{u}{D}\right) [2|0, \frac{u}{D}|^{\beta-2} - |-1, \frac{u}{D}|^{\beta-2} - |1, \frac{u}{D}|^{\beta-2}], \quad (16)$$

式中

$$\text{tri}(u) = \begin{cases} 1 - |u|, & |u| \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}, \quad |x, y| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

作变量代换 $t = u/D$, 并稍加整理可以得到 G 倾斜方差为

$$\langle |\Theta_C(t)|^2 \rangle = G_\beta \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 \left(\frac{D}{\rho_0} \right)^{\beta-2} (\text{rad}^2), \quad (17)$$

其中 G_β 为归一化系数

$$G_\beta = \frac{2^{\beta-5} (\beta+2) \beta^3 [\Gamma(\beta/2)]^2}{\pi^2 \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 dt (1-t) [(1+t^2)^{\beta-2} - t^{\beta-2}]. \quad (18)$$

图 2 给出了光波到达角起伏方差归一化系数 H_β 和 G_β 随 β 变化的关系曲线。从图 2 可以看出, 对于 $2 < \beta < 4$, 非科尔莫戈罗夫湍流情况下光学波前的到达角起伏方差随着 β 的增加

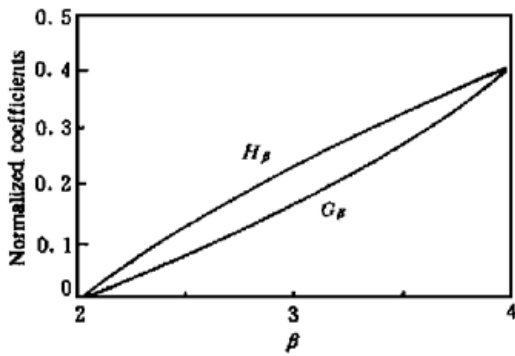


Fig. 2 The normalized coefficients H_β and G_β as function of β

而增大, β 相同时, G 倾斜方差总是小于 Z 倾斜方差。作为比较, 表 1 给出当 $\beta = 11/3$ (科尔莫戈罗夫湍流) 时本论文的光波到达角起伏方差归一化系数 $H_{11/3}$ 和 $G_{11/3}$ 与文献[9]所对应的结果。

Table 1. Comparison between the normalized coefficients $H_{11/3}$ and $G_{11/3}$ from this paper and from ref. 9

$\beta = 11/3$	$H_{11/3}$	$G_{11/3}$
from this paper	0.3524	0.3143
from ref. 9	0.364	0.340

结 论 本文针对 G 倾斜和 Z 倾斜两种情形, 分别推导了非科尔莫戈罗夫湍流情况下波前倾斜方差占总波前误差的比例以及光学波前的到达角起伏方差与相位空间功率谱指数下降因子 β 和归一化大气湍流相干长度 ρ_0 之间的关系。结果表明, 对于 $2 < \beta < 4$, 随着 β 的增加, 在大气湍流引起的相位扰动中波前倾斜分量所占的比例逐渐增大; 光学波前的到达角起伏方差随着 β 的增加而增大, β 相同时, G 倾斜方差总是小于 Z 倾斜方差。本文分析可用于在实际大气湍流波前扰动测量时估算大气湍流相干长度。

参 考 文 献

- [1] Kolmogorov A N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large reynold's numbers. In: Friedlander S K, Topper L, eds. *Turbulence, Classic Papers on Statistical Theory*. New York: Wiley Interscience, 1961. 151~ 155
- [2] Tatarskii V I. *Wave Propagation in a Turbulent Medium*. New York: Dover Publications, 1967.
- [3] Fried D L. Statistics of a geometric representation of wavefront distortion. *J. Opt. Soc. Am.*, 1965, **55**(11) : 1427~ 1435
- [4] Fried D L. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **56**(10) : 1372~ 1379
- [5] Belen'kii M S, Karis S J, Brown II J M *et al.*. Experimental study of the effect of non-Kolmogorov stratospheric turbulence on star image motion. *Proc. SPIE*, 1995, **3126** : 113~ 123
- [6] Belen'kii M S. Effect of the stratosphere on star image motion. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(12) : 1359~ 1361
- [7] Boreman G D, Dainty C. Zernike expansions for non-Kolmogorov turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(3) : 517~ 522
- [8] 饶长辉, 姜文汉, 凌 宁. 低阶模式校正自适应光学系统的补偿效果分析. *光学学报*, 1999, **19**(12) : 1615~ 1624
- [9] Tyler G A. Bandwidth considerations for tracking through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1) : 358~ 367

Analysis of Arrival-of-Angle Fluctuations of Optical Wavefront for Non-Kolmogorov Turbulence

Rao Changhui Jiang Wenhan Ling Ning

(*Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, 610209*)

(Received 23 March 1999; revised 25 May 1999)

Abstract For Z -tilt and G -tilt, the variances of the arrival-of-angle fluctuations of optical wavefront, which are functions of the power-law exponent β and the generalized coherence length ρ_0 , are deduced by introducing the generalized phase spatial power spectrum for non-Kolmogorov turbulence respectively. The results show that for $2 < \beta < 4$, the variances of the arrival-of-angle fluctuations of optical wavefront become larger and larger with the increasing of the power-law exponent β and the variance of G -tilt is smaller than that of Z -tilt for the same β .

Key words non-Kolmogorov turbulence, arrival-of-angle fluctuation, G -tilt, Z -tilt.