第 20 卷　第 10 期
2000 年 10 月

光　学　学　报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 20, No. 10
October, 2000

非简谐振子湮没算符高次幂的本征态及其高阶压缩性质*

王继锁[1),2),3)]　刘堂昆[1),2),4)]　詹明生[1)]

1)，中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室，武汉 430071
2)，中国科学院安徽光学精密机械研究所激光光谱开放实验室，合肥 230031
3)，聊城师范学院物理系，聊城 252059
4)，湖北师范学院物理系，黄石 435002

摘　要　构造出了非简谐振子湮没算符 N 次幂($N \geqslant 3$) 的 N 正交归一本征态，并且研究了它们的数学性质及其高次方压缩特性。其结果表明，它们能组成一个完备的希尔伯特(Hilbert)空间；且当 N 为偶数时，这些本征态均可呈现 M 次方压缩效应[$M = (n + \frac{1}{2})N$，$n = 0, 1, 2, \cdots$]。

关键词　非简谐振子，　湮没算符的高次幂，　本征态，　高阶压缩。

1　引　　言

1963 年 Glauber 相干态的提出[1]，解决了人们用量子电动力学研究光时所遇到的数学困难，大大促进了量子光学的发展；目前相干态理论及其应用研究已成为物理学研究的一个重要领域[2]。由于单模电磁场可等效于一个标准的辐射谐振子，因而相干态是单模电磁场光子湮没算符 a 的本征态。然而，由于许多实际的物理问题是偏离谐振子模型的，因此对非谐振子系统进行详细研究会更具有实际意义。另外，研究非经典态的一种重要且行之有效的途径，就是尽可能多地构造一些量子力学所允许的态矢量，然后研究它们的量子统计性质，从而有可能发现新的非经典效应，并找到各种非经典效应之间的联系[3]。

最近，徐子驳[4]构造出了非简谐振子广义相干态和奇偶广义相干态，它们分别是非简谐振子湮没算符 b_- 的本征态和 b_-^2 的本征态，它们的量子统计性质得到了系统研究[4, 5]。与通常谐振子湮没算符高次幂的本征态[6~8] 相比，人们自然地会想到如何在量子力学框架内来构造出非简谐振子湮没算符高次幂的本征态，以及它们又具有什么非经典效应。本文在文献[4, 5] 工作的基础上，首先构造出了非简谐振子湮没算符高次幂 b_-^N ($N \geqslant 3$) 的正交归一本征态，给出了它们的完备性证明，然后研究了它们的高阶压缩特性。

* 国家自然科学基金(批准号: 19774069) 和山东省自然科学基金资助项目。
收稿日期: 1999-01-11；收到修改稿日期: 1999-05-24

2 算符 b_-^N 本征态的数学结构及有关数学性质

非简谐振子的哈密顿算符为[9]

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{A}{x^2}, \qquad A > 0, \tag{1}$$

式中已取 $m = \hbar = \omega = 1$。与(1)式相应的自然坐标算符 Q 和自然动量算符 P[10] 可取为

$$Q = x^2 - H, \qquad P = \frac{1}{2i}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}x\right), \tag{2}$$

它们满足对易关系 $[H, Q] = -2iP$, $[H, P] = 2iQ$, $[Q, P] = 2iH$。引入升降算符

$$b_\pm = \frac{1}{2}(Q \mp iP), \tag{3}$$

它们满足对易关系 $[H, b_\pm] = \pm 2b_\pm$, $[b_-, b_+] = H$。设 $|n\rangle$ 是第 n 个能量本征态, 则有

$$H|n\rangle = 2(n + k)|n\rangle, \tag{4a}$$

$$b_-|n\rangle = \sqrt{n(n + 2k - 1)}|n - 1\rangle, \qquad b_+|n\rangle = \sqrt{(n + 1)(n + 2k)}|n + 1\rangle, \tag{4b}$$

式中 $k = \frac{1 - \sqrt{A + 1/4}}{2}$; 态矢 $|n\rangle$ 可通过(4)式确定, 其表达式为

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!(2k)_n}}b_+^n|0\rangle, \tag{5}$$

式中 $(2k)_n = (2k)(2k + 1)\cdots(2k + n - 1)$, 共有 n 项连乘(下同)。

2.1 算符 b_-^N 本征态的数学结构

仿照文献[4, 5]对非简谐振子湮没算符二次幂 b_-^2 的本征态——广义奇偶相干态的定义, 现在考虑如下 N 个($N \geqslant 3$)态矢

$$|\Psi_j\rangle = C_j\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^{mN+j}}{\sqrt{(mN + j)!(2k)_{mN+j}}}|mN + j\rangle, \tag{6}$$

式中 β 为复参数, C_j 为归一化系数, j 的可能取值(下同)为 $j = 0, 1, 2, \cdots, N - 1$。为求出(6)式中的归一化系数, 令 $x = |\beta|^2$, 利用归一化条件可得到

$$C_j(x) = [A_j(x)]^{-1/2} = \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{mN+j}}{(mN + j)!(2k)_{mN+j}}\right]^{-1/2}. \tag{7}$$

容易证明, 由(6)式所定义的这 N 个态确实是算符 b_-^N 的属于本征值为 β^N 的本征态(N 重简并态), 并且它们彼此之间是正交归一的, 即

$$b_-^N|\Psi_j\rangle = \beta^N|\Psi_j\rangle, \qquad \langle\Psi_{j'}|\Psi_j\rangle = \delta_{j'j}. \tag{8}$$

这样, 就得到了算符 b_-^N 的 N 个正交归一化本征态

$$|\Psi_j\rangle = [A_j(|\beta|^2)]^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^{mN+j}}{\sqrt{(mN + j)!(2k)_{mN+j}}}|mN + j\rangle. \tag{9}$$

2.2 算符 b_-^N 本征态的有关数学性质

首先, 由于算符 b_-^N 的上述这 N 个本征态是表示以复参数 β 定义的量子态矢, 所以当 β 取不同值时各态矢相应的内积为

$$\langle\Psi_j(\beta)|\Psi_j(\beta')\rangle = [A_j(|\beta|^2)A_j(|\beta'|^2)]^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta^*\beta')^{mN+j}}{(mN + j)!(2k)_{mN+j}} =$$

$$[A_j(|\beta|^2)A_j(|\beta'|^2)]^{-1/2}A_j(\beta^*\beta')\neq 0. \tag{10}$$

这表明, 在"β 平面"上算符 b_-^N 的这 N 个本征态与 Glauber 相干态一样, 本身并不正交。

另外可以证明, 在由算符 b_-^N 的上述这 N 个本征态所组成的空间里, 通过算符 b_- 的连续作用可实现这 N 个态间的相互转换; 比如将算符 b_- 连续作用在态 $|\Psi_0\rangle$ 上, 可以得到

$$b_-^i|\Psi_0\rangle=\beta^iA_0^{-1/2}A_{N-i}^{1/2}|\Psi_{N-i}\rangle,\qquad (i=1,2,\cdots,N), \tag{11}$$

即算符 b_- 连续作用于态 $|\Psi_0\rangle$ 上, 可使该态按照 $|\Psi_0\rangle\to|\Psi_{N-1}\rangle\to|\Psi_{N-2}\rangle\to\cdots\to|\Psi_1\rangle\to|\Psi_0\rangle$ 的顺序, 历经其它$(N-1)$ 个态后又回到原态 $|\Psi_0\rangle$; 亦即算符 b_- 在这 N 个态间起了一个"转动算符"的作用。

余下的是证明算符 b_-^N 的上述这 N 个本征态的完备性, 为了构造其完备性公式, 参照文献[11] 的方法, 若以 $P(mN+j,\beta)$ 表示在态 $|\Psi_j\rangle$ 中可观测到态 $|mN+j\rangle$ 的概率, 则由(9) 式可得

$$P(mN+j,\beta)=|\langle mN+j|\Psi_j\rangle|^2=\frac{1}{A_j(|\beta|^2)}\frac{|\beta|^{2(mN+j)}}{(mN+j)!(2k)_{mN+j}}. \tag{12}$$

定义

$$P(mN+j)\equiv\iint P(mN+j,\beta)\,\mathrm{d}^2\beta,$$

令 ρ_j 表示 $|mN+j\rangle$ 的密度矩阵, 由此 ρ_j 可以表示为

$$\rho_j=\sum_{m=0}^{\infty}P(mN+j)|mN+j\rangle\langle mN+j|,$$

有

$$\rho_j^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}P^{-1}(mN+j)|mN+j\rangle\langle mN+j|。$$

这样, 算符 b_-^N 的本征态的完备性公式如下:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\rho_j^{-1}\iint\mathrm{d}^2\beta|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|=1. \tag{13}$$

下面给出(13) 式的证明。利用(9) 式, 并令 $\beta=r\exp(\mathrm{i}\theta)$, 则 $\mathrm{d}^2\beta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 注意到(7) 式中的 $A_j(r^2)$ 仅是 r^2 的函数, 由此得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1}\rho_j^{-1}\iint\mathrm{d}^2\beta|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|=\sum_{j=0}^{N-1}\rho_j^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(mN+j)!(2k)_{mN+j}(nN+j)!(2k)_{nN+j}}}\times\\
&\quad\iint\mathrm{d}^2\beta\,\frac{\beta^{mN+j}\beta^{*(nN+j)}}{A_j(r^2)}|mN+j\rangle\langle nN+j|=\\
&\quad\sum_{j=0}^{N-1}\rho_j^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}2\pi\int\mathrm{d}r\,\frac{(r^2)^{nN+j}}{A_j(r^2)(nN+j)!(2k)_{nN+j}}|nN+j\rangle\langle nN+j|=\\
&\quad\sum_{j=0}^{N-1}\rho_j^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}P(nN+j)|nN+j\rangle\langle nN+j|=\\
&\quad\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty}P^{-1}(mN+j)|mN+j\rangle\langle mN+j|\sum_{n=0}^{\infty}P(nN+j)|nN+j\rangle\langle nN+j|=\\
&\quad\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=1.
\end{aligned} \tag{14}$$

这表明, b_-^N 的这 N 个本征态能构成一个完备的希尔伯特(Hilbert) 空间, 即可作为一个独立表象使用。

3 算符 b_-^N 本征态的高阶压缩性质

定义两个可测量即两个厄米算符[5]

$$W_1(M)=\frac{b_+^M+b_-^M}{2},\qquad W_2(M)=\frac{\mathrm{i}(b_+^M-b_-^M)}{2},\tag{15}$$

易见，它们之间满足对易关系 $[W_1(M), W_2(M)]=\frac{\mathrm{i}}{2}[b_-^M, b_+^M]$ 和测不准关系

$$\langle(\Delta W_1)^2\rangle\langle(\Delta W_2)^2\rangle\geqslant\frac{1}{16}|\langle[b_-^M, b_+^M]\rangle|^2.\tag{16}$$

若

$$\langle(\Delta W_i)^2\rangle-\frac{1}{4}\langle[b_-^M, b_+^M]\rangle<0,\qquad(i=1\text{ 或 }2),\tag{17}$$

则称态在 W_i 方向上具有 M 次方压缩效应(这与光场振幅高次方压缩的定义[12]相类似)。

下面分四种情况来研究算符 b_-^N 的 N 个正交归一本征态的这种高阶压缩特性。

3.1 当 $M=nN(n=1, 2, 3, \cdots)$ 时

在这种情况下，对于 b_-^N 的这 N 个正交归一本征态，由(8)式得

$$\langle\Psi_j|b_+^{2M}|\Psi_j\rangle=r^{2nN}\exp(-\mathrm{i}2nN\theta),\qquad\langle\Psi_j|b_-^{2M}|\Psi_j\rangle=r^{2nN}\exp(\mathrm{i}2nN\theta),\tag{18a}$$

$$\langle\Psi_j|b_+^{M}|\Psi_j\rangle=r^{nN}\exp(-\mathrm{i}nN\theta),\qquad\langle\Psi_j|b_-^{M}|\Psi_j\rangle=r^{nN}\exp(\mathrm{i}nN\theta),\tag{18b}$$

$$\langle\Psi_j|b_+^M b_-^M|\Psi_j\rangle=r^{2nN},\tag{18c}$$

式中 $\beta=r\exp(\mathrm{i}\theta)$，将以上各式代入(17)式得

$$\langle\Psi_j|(\Delta W_i)^2|\Psi_j\rangle-\frac{1}{4}\langle\Psi_j|[b_-^M, b_+^M]|\Psi_j\rangle=0,\qquad(i=1, 2).\tag{19}$$

这表明这时 b_-^N 的这 N 个正交归一本征态都是算符 $W_1(M)$ 和 $W_2(M)$ 的最小测不准态。

3.2 当 N 为奇数且 $M=nN+i\quad(n=0, 1, 2, \cdots; i=1, 2, \cdots, N-1)$ 时

这时对于 b_-^N 的这 N 个正交归一本征态，均有

$$\langle\Psi_j|b_+^{2M}|\Psi_j\rangle=\langle\Psi_j|b_-^{2M}|\Psi_j\rangle=\langle\Psi_j|b_+^{M}|\Psi_j\rangle=\langle\Psi_j|b_-^{M}|\Psi_j\rangle=0;\tag{20}$$

而由(11)式可以得到

$$\langle\Psi_s|b_+^M b_-^M|\Psi_s\rangle=r^{2(nN+i)}A_{N-i+s}/A_s,\qquad(s=0, 1, 2, \cdots, i-1),\tag{21}$$

$$\langle\Psi_t|b_+^M b_-^M|\Psi_t\rangle=r^{2(nN+i)}A_{t-i}/A_t,\qquad(t=i, i+1, \cdots, N-1).\tag{22}$$

因此对于态 $|\Psi_s\rangle(s=0, 1, 2, \cdots, i-1)$ 和态 $|\Psi_t\rangle(t=i, i+1, \cdots, N-1)$ 分别有

$$\langle\Psi_s|(\Delta W_1)^2|\Psi_s\rangle-\frac{1}{4}\langle\Psi_s|[b_-^M, b_+^M]|\Psi_s\rangle=\frac{1}{2}r^{2(nN+i)}A_{N-i+s}/A_s,\tag{23}$$

$$\langle\Psi_t|(\Delta W_1)^2|\Psi_t\rangle-\frac{1}{4}\langle\Psi_t|[b_-^M, b_+^M]|\Psi_t\rangle=\frac{1}{2}r^{2(nN+i)}A_{t-i}/A_t.\tag{24}$$

而由(7)式不难看出，当 $x=|\beta|^2\neq0$ 时总有 $A_j(x)>0$，所以由以上两式可知，这时对于算符 b_-^N 的 N 个正交归一本征态，在 W_1 方向上不会呈现 M 次方压缩效应(同理，对于在 W_2 方向上也有类似的结论)。

3.3 当 N 为偶数且 $M = nN + i \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; i = 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} + 1, \cdots, N - 1)$ 时

与上面对 3.2 节的讨论相类似，可以得到在此种情况下 b_-^N 的这 N 个正交归一本征态也都不会呈现 M 次方压缩效应。

3.4 当 N 为偶数且 $M = (n + \frac{1}{2})N \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 时

在此种情况下，对于 b_-^N 的这 N 个正交归一本征态均有

$$\langle\Psi_j| b_+^{2M} |\Psi_j\rangle = r^{(2n+1)N} \exp[-i(2n+1)N\theta],$$

$$\langle\Psi_j| b_-^{2M} |\Psi_j\rangle = r^{(2n+1)N} \exp[i(2n+1)N\theta], \tag{25a}$$

$$\langle\Psi_j| b_+^{M} |\Psi_j\rangle = \langle\Psi_j| b_-^{M} |\Psi_j\rangle = 0. \tag{25b}$$

又由(11)式可以得到

$$\langle\Psi_s| b_+^M b_-^M |\Psi_s\rangle = r^{(2n+1)N} \frac{A_{N/2+s}}{A_s}, \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} - 1), \tag{26}$$

$$\langle\Psi_t| b_+^M b_-^M |\Psi_t\rangle = r^{(2n+1)N} \frac{A_{t-N/2}}{A_t}, \qquad (t = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \cdots, N - 1). \tag{27}$$

所以对于态 $|\Psi_s\rangle (s = 0, 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} - 1)$ 和态 $|\Psi_t\rangle (t = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \cdots, N - 1)$ 分别有

$$\langle\Psi_s| (\Delta W_1)^2 |\Psi_s\rangle - \frac{1}{4}\langle\Psi_s| [b_-^M, b_+^M] |\Psi_s\rangle = \frac{1}{2} r^{(2n+1)N} [A_{N/2+s}/A_s + \cos(2n+1)N\theta], \tag{28}$$

$$\langle\Psi_t| (\Delta W_1)^2 |\Psi_t\rangle - \frac{1}{4}\langle\Psi_t| [b_-^M, b_+^M] |\Psi_t\rangle = \frac{1}{2} r^{(2n+1)N} [A_{t-N/2}/A_t - \cos(2n+1)N\theta]. \tag{29}$$

由(28)式和(29)式可得到这时态 $|\Psi_s\rangle (s = 0, 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} - 1)$ 和 $|\Psi_t\rangle (t = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \cdots, N - 1)$ 在 W_1 方向上可呈现 M 次方压缩的条件分别为

$$\frac{A_{N/2+s}}{A_s} + \cos(2n+1)N\theta < 0, \tag{30}$$

$$\frac{A_{t-N/2}}{A_t} - \cos(2n+1)N\theta < 0. \tag{31}$$

如上所述，由于当 $x = |\beta|^2 \neq 0$ 时总有 $A_j(x) > 0$，所以当 N(N 为偶数) 和 n 分别取任一确定值时，只要适当选取复参数 β 的模值 r 和幅角 θ，不等式(30)式或(31)式总可以被满足，即这时态 $|\Psi_j\rangle$ 在 W_1 方向上总可以呈现 M 次方[$M = (n + \frac{1}{2})N$; $n = 0, 1, 2, \cdots$; 且 N 为偶数] 压缩效应。同样，对于在 W_2 方向上也有类似的结论。

结　论　构造出了非简谐振子湮没算符高次幂 b_-^N ($N \geqslant 3$) 的 N 个正交归一化本征态，给出了这些本征态完备性的证明及有关数学性质，并且研究了它们的高阶压缩特性。结果表明，只要适当选取复参数 β 的模值 r 和幅角 θ 的取值，当 N 为任一确定的偶数时，算符 b_-^N 的这 N 个本征态在 $W_1(M)$ 或 $W_2(M)$ 的方向上，可呈现 M 次方[$M = (n + \frac{1}{2})N$; $n = 0, 1, 2, \cdots$] 压缩效应。另外，通过讨论，初步揭示了 b_-^N 的 N 个本征态的有关量子统计特性；这对揭示非简谐振子势场的规律将是有益的。

参 考 文 献

[1] Glauber R J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 1963, **131**(6): 2766~2788

[2] Klauber J R, Skagerstam B S. *Coherent States*. Singapore: World Scientific, 1985.

[3] 彭石安, 郭光灿. 光子消灭算符高次幂的本征态及其性质. 物理学报, 1990, **39**(1): 51~60

[4] 徐子驳. 非简谐振子的奇偶广义相干态. 物理学报, 1996, **45**(11): 1807~1811

[5] 于肇贤, 王继锁, 刘业厚. 非简谐振子广义奇偶相干态的高阶压缩效应及反聚束效应. 物理学报, 1997, **46**(9): 1693~1698

[6] 王继锁. 光子消灭算符高次幂本征态的数学结构及其性质. 物理学报, 1991, **40**(4): 547~554

[7] Sun J Z, Wang J S, Wang C K. Orthonormalized eigenstates of cubic and higher powers of the annihilation operator. *Phys. Rev.* (*A*), 1991, **44**(5): 3369~3372

[8] Sun J Z, Wang J S, Wang C K. Generation of orthonormalized eigenstates of the operator a^k (for $k \geqslant 3$) from coherent states and their higher-order squeezing. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **46**(3): 1700~1702

[9] Zhu Dongpei. A new potential with the spectrum of an isotonic oscillator. *J. Phys.* (*A*), 1987, **20**(13): 4331~4336

[10] Nieto M M, Simmons L M, Jr.. Coherent state for general potentials. I. Formalism. *Phys. Rev.* (*D*), 1979, **20**(6): 1321~1331

[11] 郝三如. 利用 $SU_q(2)$ 量子代数的 q 变形振子实现讨论 $SU_q(2)$ 相干态. 物理学报, 1993, **42**(5): 691~698

[12] Zhang Z M, Xu L, Li F L. A new kind of higher-order squeezing of radiation field. *Phys. Lett.* (*A*), 1990, **150**(1): 27~30

Eigenstates of the Higher Powers of Annihilation Operator of a Non-Harmonic Oscillator and Their Higher-Order Squeezing

Wang Jisuo[1), 2), 3)] Liu Tangkun[1), 2), 4)] Zhan Mingsheng[1)]

1), *State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan* 430071

2), *Laser Spectroscopy Laboratory, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei* 230031

3), *Department of Physics, Liaocheng Teachers University, Liaocheng* 252059

4), *Department of Physics, Hubei Normal University, Huangshi* 435002

(Received 11 January 1999; revised 24 May 1999)

Abstract The eigenstates of the Nth powers ($N \geqslant 3$) of the annihilation operator of the non-harmonic oscillator are constructed, and their mathematical and higher-order squeezing properties are studied. The results show that they form a complete Hilbert space, and the Mth power [$M = (n + \frac{1}{2})N$; $n = 0, 1, 2, \cdots$] squeezing effects exist in all eigenstates when N is even.

Key words non-harmonic oscillator, higher powers of a annihilation operator, eigenstate, higher-order squeezing.