

傅里叶变换轮廓术中频谱泄漏的讨论*

陈文静 苏显渝 谭松新
(四川大学光电系, 成都 610064)

摘 要 讨论了频谱泄漏对傅里叶变换轮廓术测量精度的影响。由于用傅里叶变换轮廓术进行三维面形测量时, 测得的变形光场是空间有限函数, 故离散傅里叶变换时先要进行周期拓展, 如果拓展周期选择不当, 拓展后的条纹将不连续, 对之进行傅里叶变换会产生频谱泄漏。文章从理论上推导了拓展周期与变形结构光场频谱泄漏之间的关系, 给出了由泄漏引起的视场边缘误差的计算模型和定量分析。提出采用条纹外插以减小泄漏误差的方法, 计算机模拟及初步实验证实了该方法的有效性。

关键词 离散傅里叶变换, 频谱泄漏, 傅里叶变换轮廓术。

1 引 言

傅里叶变换轮廓术(FTP)^[1, 2]是一种常用的三维面形测量方法。其工作原理由以下三部分构成: 1) 被测三维物体的面形对光栅的结构光场进行空间调制, 使变形结构光场中携带三维面形的高度分布的信息; 2) 对连续分布的变形结构光场进行抽样, 获取离散信息以易于实现计算机处理; 3) 计算机对所得的离散信息进行傅里叶变换, 选择适当的滤波窗口从频谱中滤出基频分量, 对基频分量进行逆傅里叶变换还原出被测面形的高度分布。

对离散变形结构光场进行傅里叶变换时, 离散傅里叶变换算法要求对变形结构光场在空域上作周期拓展。而周期拓展可能引起频谱泄漏, 故在傅里叶变换轮廓术测量中将引入误差, 但很少有人从理论上对之加以讨论。为了减小周期拓展带来频谱泄漏, 人们常选用适当的窗函数(如汉宁窗)对变形光场进行加权, 使由 CCD 采样得到的变形光场经过窗函数处理后在窗的边缘强度为 0, 然后再进行傅里叶变换。但是信号经过窗函数处理后, 会丢失一些信息, 相当于在减小频谱泄漏的同时也引入了误差。本文分析了空域有限的变形光场的频谱泄漏问题。从理论上推导了拓展周期与变形结构光场频谱泄漏之间的关系, 给出了误差的计算方法和定量分析。指出只有当拓展周期等于光栅周期的整数倍时, 拓展后的条纹才连续, 作傅里叶变换不产生频谱泄漏; 当拓展周期不等于光栅周期的整数倍时, 拓展后条纹是不连续的, 尤以拓展周期和变形光场光栅周期的整数倍之间相差 0.5 个光栅周期时, 拓展后条纹断裂最严重, 频谱泄漏最大。因此用傅里叶变换轮廓术测量时尽量选择拓展周期等于信号周期的整数倍以减小由频谱泄漏带来的测量误差。如不能做到, 则可采用迭代方法进行条纹外

* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1999-02-02; 收到修改稿日期: 1999-06-01

插, 在有效视场的两边生成新条纹, 将泄漏误差延伸到有效视场之外, 减小边缘泄漏误差。计算机模拟及实验证实了本文的理论分析和迭代方法的有效性。

2 理论分析

正弦光栅投影得到的离散变形结构光场表示为:

$$g(x, y) = \{a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f_0 x + \mathcal{Q}(x, y)]\} \text{comb}(x/\Delta x) \text{comb}(y/\Delta y), \quad (1)$$

其中 $a(x, y)$ 为背景光场, $b(x, y)$ 为物面非均匀反射率, $\Delta x, \Delta y$ 为时域抽样间距, $\mathcal{Q}(x, y)$ 为由物体高度分布 $h(x, y)$ 引起的相位调制, f_0 为投影光栅的基频。第一项 $a(x, y)$ 可以通过 π 相移技术消除^[3, 4]。远心投影光路条件下, 考虑到实际测量中 $L_0 \gg h(x, y)$ (L_0 为摄像装置的入瞳到参考平面的距离), 被测物体的高度分布和调制相位的关系为:

$$\mathcal{Q}(x, y) \approx \Delta \mathcal{Q}(x, y) = - \frac{2\pi f_0 d}{L_0} h(x, y), \quad (2)$$

式中, d 为投影装置的出瞳到摄像装置入瞳间的距离。为了便于讨论拓展周期引起的频谱泄漏, 空域有限的变形结构光场可表示为(一维情况下, 不考虑背景):

$$g(x, y) = b(x, y) \cos [2\pi f_0 x + \mathcal{Q}(x, y)] \text{comb}(x/\Delta x) \text{rect}(x/T_w), \quad (3)$$

其中 T_w 代表拓展周期, x 以 Δx 为间距离散取值, 范围是 $-T_w/2 < x < T_w/2$ 。其傅里叶频谱表示为:

$$G(f) = C(f) \odot \delta(f - f_0) \odot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/\Delta x) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f) + C^*(f) \odot \delta(f + f_0) \odot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/\Delta x) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f), \quad (4)$$

$C(f)$ 与 $C^*(f)$ 分别代表 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[j\mathcal{Q}(x, y)]$ 和 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[-j\mathcal{Q}(x, y)]$ 的傅里叶频谱, $\delta(f - f_0)$ 与 $\delta(f + f_0)$ 分别代表 $\exp(j2\pi f_0 x)$ 和 $\exp(-j2\pi f_0 x)$ 的傅里叶频谱, $T_w \text{sinc}(\pi T_w f)$ 是 $\text{rect}(x/T_w)$ 的傅里叶频谱, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/\Delta x)$ 是 $\text{comb}(x/\Delta x)$ 的傅里叶频谱。从(4)式可以看出, 离散变形光场的傅里叶变换是周期性重复的频谱岛, 周期为 $1/\Delta x$ 。满足抽样定理时, 各个频谱岛之间是相互分离的, 每个频谱岛都包含了所需要的信息。当 $n = 0$ 时, 上式简化为:

$$G(f) = C(f) \odot \delta(f - f_0) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f) + C^*(f) \odot \delta(f + f_0) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f), \quad (5)$$

只要(5)式右边的两项是相互分离的, 每一项都包含了物体的高度信息, 在傅里叶变换轮廓术中, 只需对(5)式右边任一项进行逆傅里叶变换即可(例如第一项)。只有当 $C(f) \odot \delta(f - f_0) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f) = C(f)$, 才能得到 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[j\mathcal{Q}(x, y)]$ 。取它的相角就可得到 $\mathcal{Q}(x, y)$, 由(2)式就可以计算出被测物体的高度。否则恢复出的 $h(x, y)$ 中包括由泄漏产生的误差。

3 讨 论

正如上面分析, 对(5)式中的一项进行逆傅里叶变换, $\delta(f - f_0) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f)$ 会影响 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[j\mathcal{Q}(x, y)]$ 的频谱。要精确得到被测物体的高度信息, 在满足抽样定理的前提下, 本文对 $\delta(f - f_0) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f)$ 进行讨论。

当拓展周期为光栅周期的整数倍时, 即 $T_w = mT_0$ 时, 其中 m 为整数, T_0 为光栅的周期,

$\delta(f - f_0) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f)$ 可以写成:

$$T_w \text{sinc}[\pi T_w(f - f_0)] = T_w \frac{\sin[\pi T_w(f - f_0)]}{\pi T_w(f - f_0)}, \quad (6)$$

上式在 $f = f_0$ 处有值, 在 $f \neq f_0$ 处, 由于:

$$\begin{aligned} \sin[\pi T_w(f - f_0)] &= \sin[\pi m T_0(f - f_0)] = \\ &= (-1)^m \sin(\pi m f / f_0) = \\ &= (-1)^m \sin(\pi f / f_w), \end{aligned} \quad (7)$$

傅里叶变换轮廓术测量中信号在空域是离散的, 其傅里叶频谱在频率轴上同样是离散的, f 的取值为 $-1/(2\Delta x)$ 到 $1/(2\Delta x)$, 频谱轴上的最小间隔为 f_w , 所以(7)式等于 0, 即 $\delta(f - f_0) \odot T_w \text{sinc}(\pi T_w f)$ 只在 $f = f_0$ 处有值, 其余地方都为 0。卷积该值对 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[j\mathcal{Q}(x, y)]$ 的频谱无影响, 从基频中恢复的面形不包含泄漏误差。

当拓展周期不为光栅周期的整数倍时, 即 $T_w \neq mT_0$ 时, 则写为 $T_w = mT_0 + kT_0$ 。 m 、 T_0 的定义同上, k 的取值在 0 到 1 之间: 则

$$\begin{aligned} T_w \text{sinc}[T_w(f - f_0)] &= \frac{\sin[\pi(mT_0 + kT_0)(f - f_0)]}{\pi(f - f_0)} = \\ &= \frac{\sin[\pi(mT_0 + kT_0)f - \pi m - \pi k]}{\pi(f - f_0)} = \\ &= \frac{\sin[(\pi f / f_w) - \pi m - \pi k]}{\pi(f - f_0)} = \\ &= (-1)^m \frac{\sin[(\pi f / f_w) - \pi k]}{\pi(f - f_0)}, \end{aligned} \quad (8)$$

由于 f 为 f_w 的整数倍, 所以

$$T_w \text{sinc}[T_w(f - f_0)] = (-1)^M \frac{\sin(\pi k)}{\pi(f - f_0)}, \quad (9)$$

其中 $M = m + f/f_w$, f 的取值范围是 $-1/(2\Delta x)$ 到 $1/(2\Delta x)$, 间距为 f_w 。从(9)式可以看出, 频谱泄漏的大小与 k 有关。实际的基频频谱为 $C(f) \odot (-1)^M \frac{\sin(\pi k)}{\pi(f - f_0)}$ 。当 k 等于 1/2 时, 即拓展周期与变形光场的光栅的整数倍之间相差 0.5 个光栅周期时泄漏对 $C(f)$ 影响最大。对之进行离散逆傅里叶变换得到 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[j\mathcal{Q}(x, y)]M(x)$, 其中 $M(x)$ 为 $(-1)^M \frac{\sin(\pi k)}{\pi(f - f_0)}$ 的离散逆傅里叶变换, 表示为:

$$M(x) = \sum_{nf_w = 0}^{1/(2\Delta x)} [(-1)^M \sin(\pi k) / \pi(nf_w - f_0)] \exp(j2\pi x nf_w / N), \quad (10)$$

其中 $-T_w/2 < x < T_w/2$, 以 Δx 为间距离散取值, N 为总点数。当 $N = 260$ 像素点, 光栅周期为 8 个像素点, $k = 1/2$ 时, 用快速傅里叶变换计算得到 $M(x)$ 的相位谱如图 1(a) 所示。视场中部平滑, 边缘变化较大, 说明泄漏引起的相位误差在边缘大。表示泄漏对傅里叶变换轮廓术的测量精度的影响, 在视场中部小, 边缘较大。由于泄漏的大小与 k 有关, 当 N 在 256 像素点到 260 像素点之间变化, k 分别为 1/2、1/4、1/8 时, 图 1(b) 给出在边缘约占总点数 20% 范围内不同的 k 值对应的泄漏引起的相位误差的变化趋势。从图中可以看出, $k = 1/2$ 时, 边缘误差很大, 最大约 1.2 rad, k 减小, 边缘误差减小。距离边缘超过 10 个像素点(约占 5%),

对于不同的 k 值, 泄漏引入的相位误差很小。图 1(c) 是距离边缘 10 个像素点之后放大的一段相位误差变化趋势图, 从中可见泄漏误差都小于 0.07 rad。距离边缘 25 个像素点处, $k = 1/2$ 的泄漏误差约为 0.04 rad, $k = 1/4$ 的泄漏误差为 0.028 rad, $k = 1/8$ 的泄漏误差为 0.017 rad; 距离边缘 15 个像素点处, $k = 1/2$ 的泄漏误差约为 0.055 rad, $k = 1/4$ 的泄漏误差为 0.04 rad, $k = 1/8$ 的泄漏误差为 0.018 rad。只要距离边缘大于 20 个像素点(约为 2.5 个条纹周期), 泄漏引起的误差在最不利的情况下也小于 0.050 rad。因此对于较小的物体, 当它处于视场中部时, 可以忽略泄漏对边缘的影响。当被测物体宽度占满整个视场, 不能忽略泄漏对边缘的影响时, 可采用对条纹进行迭代外插延拓, 两边外延 5%~10% 后再按傅里叶变换轮廓术处理, 泄漏将被外延出去, 从而减小边缘误差。

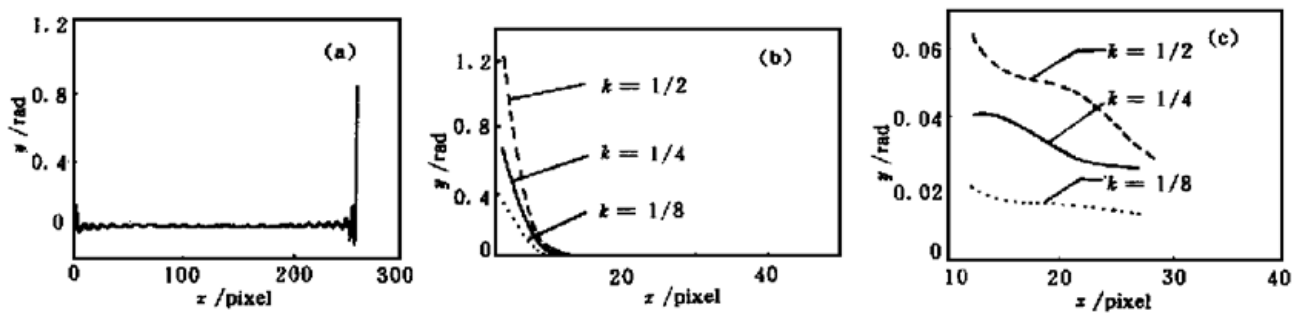


Fig. 1 (a) Phase errors caused by leakage, (b) Phase errors caused by leakage when $k = 1/2, 1/4,$ or $1/8$ respectively, (c) Enlarged phase errors caused by leakage when $k = 1/2, 1/4,$ or $1/8$

4 计算机模拟及初步实验

4.1 计算机模拟

为了证明结论的正确, 进行了计算机模拟。系统的结构参数 $L_0/d = 5.2$, 抽样满足抽样定理, 基频同其他频谱成分相互分离。首先模拟了一个较小的物体, 它处于视场的中心, 宽度为视场的 $1/2$, 如图 2(a) 所示。模拟的总点数为 256, 正弦光栅的周期为 8 个像素点, 此情况相当于拓展周期为光栅周期的整数倍, 无频谱泄漏。变形光场的频谱分布和恢复的物体面形如图 2(b), 模拟物体和恢复面形之间的误差如图 2(c) 所示。当总点数为 260, 正弦光栅的周期不变时, 即拓展周期不为光栅周期的整数倍, 且相差 $T_0/2$ 时, 泄漏最大。泄漏引起边缘误差增大, 恢复的面形和物体之间的误差如图 2(d)、图 2(e) 所示。但边缘不包含物体面形, 此时可以忽略泄漏的影响。

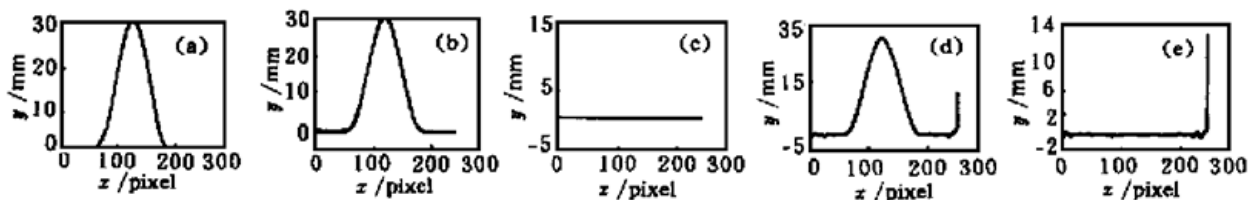


Fig. 2 (a) Simulated object, (b) Retrieved shape without leakage, (c) Retrieved height errors without leakage, (d) Retrieved shape with leakage, (e) Retrieved height errors with leakage

然后, 模拟了一个较大的物体, 宽度占满整个视场, 如图 3(a) 所示。总点数为 260, 正弦光栅的周期为 8 个像素点, 即拓展周期不为光栅周期的整数倍, 且相差 $T_0/2$ 时, 泄漏最大, 恢复的物体面形如图 3(b), 模拟物体和恢复面形之间的误差如图 3(c) 所示, 边缘误差较大。

对条纹进行外插延拓, 两边外延 3 个周期后再按傅里叶变换轮廓术处理, 边缘得到较大改进。恢复的物体面形如图 3(d), 模拟物体和恢复面形之间的误差如图 3(e) 所示。

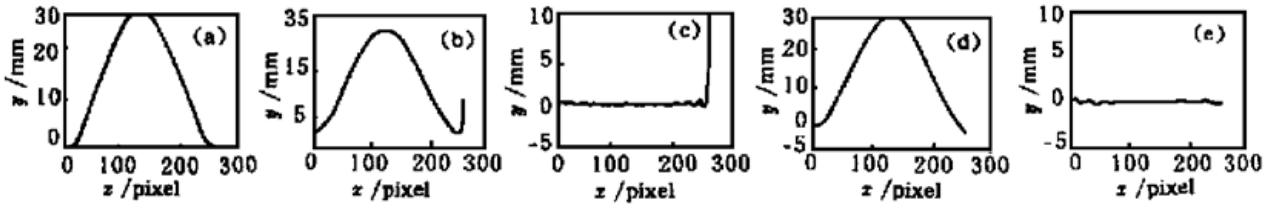


Fig. 3 (a) Simulated object, (b) Retrieved shape with leakage, (c) Retrieved height errors with leakage, (d) Retrieved shape using fringe extrapolation method, (e) Retrieved height errors using fringe extrapolation method

4.2 初步实验结果

通过一个初步实验来验证以上理论。实际测量的简易装置图如图 4 所示, 被测物体横截面是一个底边长 144 mm、高 60 mm 的等腰三角形物体, 投影仪的功率为 100 W, 投影镜头的焦距为 80 mm, 正弦光栅的周期为 2 l/mm, 图像传感器为低畸变 CCD 摄像机(MDCTM-560), 测量系统的几何参数为 $L_0 = 950$ mm, $d = 190$ mm, 摄像机所得数据经 A/D 转换后送 IBM-PC586 进行处理, 恢复

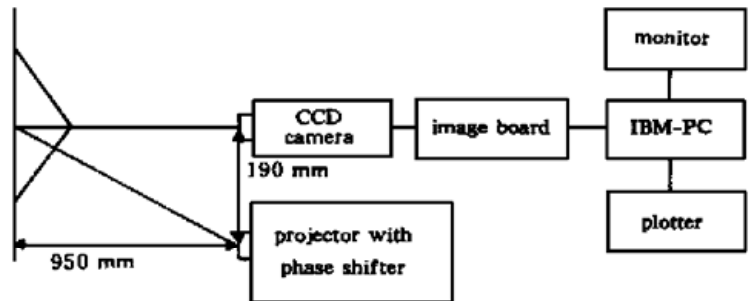


Fig. 4 Experimental setup

的面形由绘图仪绘出(实验中采用相移技术消除变形条纹的零级傅里叶谱)。图 5(a) 是由 CCD 获取的正弦光栅投影到物体上的变形条纹图, 物体水平方向占满整个视场, 并且处于泄漏最大的情况。图 5(b) 是恢复的一维面形, 图 5(c) 是对应的误差, 边缘误差很大, 在边缘不能得到正确的恢复形状。图 5(d) 是通过条纹外插方法处理后恢复的一维面形, 图 5(e) 是对应的误差。可见, 在泄漏最大时, 通过此方法, 减小了边缘误差, 提高了边缘测量的可靠度。

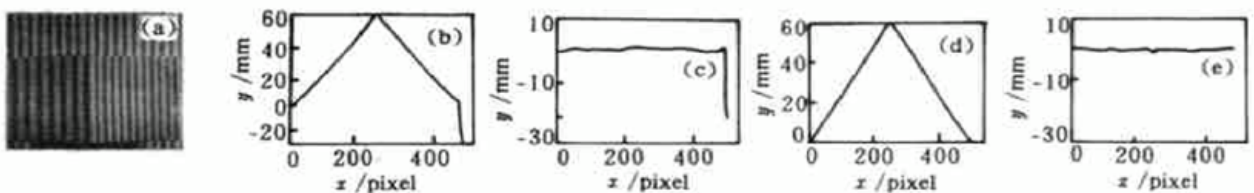


Fig. 5 (a) Deformed fringe pattern captured by a CCD camera, (b) Retrieved shape with serious leakage, (c) Height errors with serious leakage, (d) Retrieved shape using fringe extrapolation method, (e) Height errors after fringe extrapolation method is employed

结论 本文从理论上分析了傅里叶变换轮廓术测量中的频谱泄漏问题, 得出了泄漏与矩形窗口的位置选择之间的关系, 为实际测量中如何减小泄漏提供了理论依据。计算机模拟及初步实验结果表明: 泄漏在傅里叶变换轮廓术测量中引入的相位误差主要出现在距离边缘 5% ~ 10% 范围内, 超过这个范围, 泄漏误差都小于 0.05 rad。因此为了减小泄漏对傅里叶变换轮廓术测量的影响, 在视场边缘 5% ~ 10% 范围内不要出现被测物体。当被测物体占满整个

视场时,可采用对条纹进行迭代外插延拓,两边外延 5%~10%后再按傅里叶变换轮廓术处理,泄漏将被外延出去,从而减小边缘误差。该方法则在三维面形测量中具有实用价值。

参 考 文 献

- [1] Takeda M, Mutoh K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement 3-D object shapes. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24) : 3977~ 3982
- [2] Lin Jianfeng, Su Xianyu. Two-dimensional Fourier transform profilometry for the automatic measurement of three-dimensional object shapes. *Opt. Engng.*, 1995, **34**(12) : 3297~ 3301
- [3] Su Xianyu, Li Jian, Guo Lurong. Improved Fourier transform profilometry. *Proc. SPIE*, 1988, **954** : 32~ 35
- [4] Li Jian, Su Xianyu, Guo Lurong. Improved Fourier transform profilometry of the automatic measurement of three-dimensional object shapes. *Opt. Engng.*, 1990, **29**(12) : 1439~ 1444

Discussion on Phase Errors Caused by Frequency Leakage in FTP

Chen Wenjin Su Xianyu Tan Songxin

(*Opto-Electronics Department, Sichuan University, Chengdu 610064*)

(Received 2 February 1999; revised 1 June 1999)

Abstract The phase error caused by leakage in a 3-D object measurement Fourier transform profilometry (FTP) method is discussed. Because the deformed fringe pattern captured by CCD camera is a function with limited extension in space, it must be extended to infinite space before discrete Fourier transform is computed. If the extended period is not integer times of the grating period, the smooth fringes can not be obtained through extending. When Fourier transform of the discontinuous fringe is calculated, phase error will occur, which is called leakage error. In this paper, the relationship between extended period and frequency leakage is analyzed, the calculation model of phase errors caused by leakage is proposed, quantitative analysis of phase error is presented. A fringe extrapolation method is put forward to decrease the leakage errors. Computer simulations and primary experiments have confirmed the analysis.

Key words discrete Fourier-transform, frequency leakage, Fourier transform profilometry.