

分析光栅分数塔尔博特效应的一组新方程*

王淮生 周常河 刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 对一维开口比为 $1/M$ (这里 M 为大于 1 的正整数) 的矩形光栅, 建立了一组新的在分数塔尔博特 (Talbot) 距离上计算其菲涅耳衍射光场分布的简单方程。在该方程中考虑了光栅结构与分数塔尔博特距离的联系, 显然比迭代方程和基于距离的方程更方便地描述分数塔尔博特效应。给出了一种研究光栅分数塔尔博特效应的新途径。

关键词 分数塔尔博特效应, 阵列照明, 菲涅耳衍射。

1 引 言

阵列照明是衍射光学的一个重要方面, 在数字光计算、多重成像及多重全息存储等方面有着广泛的用途。在实现阵列照明的众多方法中, 塔尔博特阵列照明是一个很重要的方法, 因为它结构简单(仅需一个光栅和光在自由空间中传播)。自从 Lohmann^[1, 2] 提出并实现基于分数塔尔博特效应的阵列照明以来, 许多学者对这一领域作过研究。Liu^[3] 和 Arrizon^[4, 5] 分别给出了基于距离的分析分数塔尔博特效应的方程, 周常河等^[6] 给出了特定分数塔尔博特距离处一组简化相位公式, 随后又给出了计算任意分数塔尔博特距离处的一个逐步迭代方程^[7]。本文则给出了一组基于距离和光栅结构联系的方程来研究分数塔尔博特效应。由于非单色光可以进行傅里叶分解, 本文对于深入研究非单色光例如白光和短脉冲光的性质有一定的意义。

2 矩形光栅的菲涅耳衍射

对一开口比为 $1/M$ (这里 M 为正整数)、周期为 d 的矩形光栅, 设其入射光场为

$$T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{x - kd}{d/M} \right). \quad (1)$$

在分数塔尔博特距离 $z = \frac{p}{n} z_t$ 的光场为^[8]

$$\psi(x, z) = \exp \left(i \frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{2np}} \sum_{j=1}^{np} T \left(x + j \frac{d}{n} \right) \exp \left(\frac{i\pi j^2}{2np} \right) [1 + i^n (-1)^j], \quad (2)$$

这里 z_t 为塔尔博特距离, n 和 p 均为正整数。在 $z = \frac{p}{2M} z_t$ 处, (2) 式变为

* 国家自然科学基金和中国科学院及上海应用物理中心的资助课题。

收稿日期: 1999-06-09; 收到修改稿日期: 1999-08-26

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{1}{4Mp}} \sum_{j=1}^{2Mp} T\left(x + j\frac{d}{2M}\right) \exp\left(\frac{i\pi j^2}{4Mp}\right) [1 + i^p (-1)^j]. \quad (3)$$

讨论以下几种情况下的光场分布:

1) 当 M 为偶数时, 不论 p 为奇数或偶数, (3) 式可简化为

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{1}{4Mp}} \sum_{j=1}^{Mp} T\left(x + j\frac{d}{M}\right) \exp\left(\frac{i\pi j^2}{Mp}\right). \quad (4)$$

由于 $T(x)$ 的周期性, (4) 式可简化为

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{Mp}}{Mp} \sum_{k=1}^M T\left(x + k\frac{d}{M}\right) \sum_{j=0}^{p-1} \exp\left[\frac{i\pi(jM+k)^2}{pM}\right]. \quad (5)$$

略去公共相因子, 得到

$$\psi(x, z) = \frac{\sqrt{Mp}}{Mp} \sum_{k=1}^M T\left(x + k\frac{d}{M}\right) \sum_{j=0}^{p-1} \exp\left[\frac{i\pi(jM+k)^2}{pM}\right]. \quad (6)$$

显然有下面方程

$$\psi(x + jd, z) = \psi(x, z) \quad j \text{ 为任意整数}. \quad (7)$$

(6) 式和(7)式表明 $\psi(x, z)$ 是一周期为 d 的周期性函数而且每个周期由 M 个区域组成, 第 k 区域的光场 ψ_k 为

$$\psi_k(x, z) = \frac{\sqrt{Mp}}{Mp} \sum_{j=0}^{p-1} \exp\left[\frac{i\pi(jM+k)^2}{pM}\right], \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (8)$$

光场的一个周期的 M 个区域由图 1 所示。

2) 当 M 为奇数而 p 为偶数时, 由(3)式可推知这时光场分布与情况 1) 相同。

3) 当 M 为奇数、 p 也为奇数时, 由(3)式得

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{1}{Mp}} \sum_{j=1}^{Mp} T\left[x + (2j-1)\frac{d}{2M}\right] \exp\left[\frac{i\pi(2j-1)^2}{4Mp}\right]. \quad (9)$$

由于 $T(x)$ 的周期性, (9) 式可简化为

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{Mp}}{Mp} \sum_{k=1}^M T\left[x + (2k-1)\frac{d}{2M}\right] \sum_{j=0}^{p-1} \exp\left\{i\pi\left[\frac{2(jM+k)-1}{4pM}\right]^2\right\}. \quad (10)$$

略去公共相因子, 得到

$$\psi(x, z) = \frac{\sqrt{Mp}}{Mp} \sum_{k=1}^M T\left[x + (2k-1)\frac{d}{2M}\right] \sum_{j=0}^{p-1} \exp\left\{i\pi\left[\frac{2(jM+k)-1}{4pM}\right]^2\right\}. \quad (11)$$

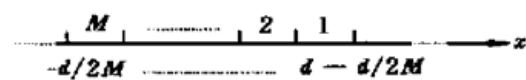


Fig. 2 For a rectangular grating with opening ratio $1/M$, the M regions of a period of the field distribution at the distance $z =$

$\frac{p}{2M}z$, when both M and p are odd

显然, $\psi(x, z)$ 也是周期为 d 的周期性函数, 且每个周期由 M 个区域所组成, 第 k 个区域的光场 ψ_k 为

$$\psi_k = \frac{\sqrt{Mp}}{Mp} \sum_{j=0}^{p-1} \exp\left\{i\pi\left[\frac{2(jM+k)-1}{4pM}\right]^2\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

光场的一个周期的 M 个区域由图 2 所示。由以上的分析可看出, (8) 式和(12)式与文献[3~ 5]中的方程是不

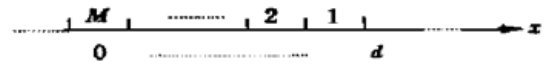


Fig. 1 For a rectangular grating with opening ratio $1/M$, the M regions of a period of the field distribution at the distance $z = \frac{p}{2M}z$, when M is even

同的,这是由于本文的方程考虑了光栅结构与距离的联系。从(8)式和(12)式很容易研究光场分布的特性。

3 讨 论

通过一个例子去验证方程的正确性。考虑在距离 $z = \frac{p_0}{M}z_1$ 处而 M 和 p_0 均为奇数且 p_0M 属于 $4q + 1$ 类型(这里 q 为非负整数)时光场的分布情况。由(2)式可以得到

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{p_0M}}{p_0M} \sum_{k=1}^{p_0M} T(x + kd/n) \exp\left\{i\pi\left[\frac{k^2}{2p_0M} + \frac{(-1)^k}{4}\right]\right\}. \quad (13)$$

由于 $T(x)$ 的周期性, (13)式可简化为

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{Mp_0}}{Mp_0} \sum_{k=1}^M T\left(x + k\frac{d}{M}\right) \sum_{j=0}^{p_0-1} \exp\left\{i\pi\left[\frac{(jM+k)^2}{2p_0M} + \frac{(-1)^{k+jM}}{4}\right]\right\}.$$

定义 $\xi(k)$ 为

$$\xi(k) = \frac{\sqrt{Mp_0}}{Mp_0} \sum_{j=0}^{p_0-1} \exp\left\{i\pi\left[\frac{(jM+k)^2}{2Mp_0} + \frac{(-1)^{k+jM}}{4}\right]\right\}, \quad (14)$$

光场 $\psi(x, z)$ 可写为

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \sum_{k=1}^M T\left(x + k\frac{d}{M}\right) \xi(k). \quad (15)$$

(14)式可简化为

$$\xi(k) = \frac{1}{\sqrt{2Mp_0}} \sum_{j=0}^{p_0-1} \left\{ \exp\left[i\pi\frac{(jM+k)^2}{2Mp_0}\right] \right\} [1 + i(-1)^{jM+k}]. \quad (16)$$

同样的问题可按另一方法解决。分数塔尔博特距离 $z = \frac{p_0}{M}z_1$ 可表示为 $z = \frac{2p_0}{2M}z_1$, 由(5)式可以得到

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2Mp_0}}{2Mp_0} \sum_{k=1}^M T\left(x + k\frac{d}{M}\right) \sum_{j=0}^{2p_0-1} \exp\left[i\pi\frac{(jM+k)^2}{2p_0M}\right]. \quad (17)$$

(17)式可写为

$$\psi(x, z) = \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}\right) \sum_{k=1}^M T\left(x + k\frac{d}{M}\right) \xi_0(k). \quad (18)$$

而 $\xi_0(k)$ 为

$$\xi_0(k) = \frac{\sqrt{2Mp_0}}{2Mp_0} \sum_{j=0}^{2p_0-1} \exp\left[i\pi\frac{(jM+k)^2}{2Mp_0}\right]. \quad (19)$$

(19)式可以简化为

$$\xi_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2Mp_0}} \sum_{j=0}^{p_0-1} \left\{ \exp\left[i\pi\frac{(jM+k)^2}{2Mp_0}\right] \right\} [1 + i(-1)^{jM+k}]. \quad (20)$$

这和(16)式的结果是一样的。

将上述方程应用到一个具体问题。考虑开口比为 $1/6$ 的矩形光栅, 在分数塔尔博特距离 $z = (5/12)z_1$ 处, 光场在 x 方向一个周期内的 6 个区域的分布可由(8)式求得如下结果:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \frac{\exp(-i\pi/6)}{\sqrt{6}}, & Z_2 &= \frac{\exp(i\pi/3)}{\sqrt{6}}, & Z_3 &= \frac{\exp(i\pi/2)}{\sqrt{6}}, \\
 Z_4 &= \frac{\exp(i\pi/3)}{\sqrt{6}}, & Z_5 &= \frac{\exp(-i\pi/6)}{\sqrt{6}}, & Z_6 &= \frac{\exp(i\pi)}{\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

从上面计算可看出这六个区域光场的振幅均为 $(1/\sqrt{6})$ 。而相位分别为 $-\pi/6$ 、 $\pi/3$ 、 $\pi/2$ 、 $\pi/3$ 、 $-\pi/6$ 、 π 。除了一公共相位差外, 本文的结果与文献[7]中用逐步迭代法所得出的结论是相同的。显然, 本文的方程比文献[7]的逐步迭代法要简单。

结 论 给出了一种分析分数塔尔博特效应的途径, 导出的方程比文献[3~ 5]中基于距离的方程去分析分数塔尔博特效应要方便, 比文献[7]中逐步迭代法要简单。

参 考 文 献

- [1] Lohmann A W. An Array illuminator based on the Talbot-effect. *Optik*, 1987, **79**(1) : 41~ 45
- [2] Lohmann A W, Thomas J A. Making an array illuminator on the Talbot effect. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(29) : 4337~ 4340
- [3] Liu L. Lau cavity and phase locking of laser arrays. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(23) : 1312~ 1314
- [4] Arrizón V, Ojeda-Castañeda J. Multilevel phase gratings for array illuminators. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(25) : 5925~ 5931
- [5] Arrizón V, López-Olazagasti E. Binary phase grating for array generation at 1/16 of Talbot length. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1995, **12**(4) : 801~ 804
- [6] Zhou C, Liu L. Simple equations for the calculation of a multilevel phase grating for Talbot array illumination. *Opt. Commun.*, 1995, **115**(1~ 2) : 40~ 44
- [7] Zhou C, Wang L, Tschudi T. Solutions and analyses of fractional-Talbot array illuminations. *Opt. Commun.*, 1998, **147**(4~ 6) : 224~ 228
- [8] Guigay J P. On Fresnel diffraction by one-dimensional periodic objects, with application to structure determination of phase objects. *Optica Acta*, 1971, **18**(9) : 677~ 682

New Equations for Analysing the Fractional Talbot Effect

Wang Huaisheng Zhou Changhe Liu Liren

(Laboratory of Information Optics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 9 June 1999; revised 26 August 1999)

Abstract A new set of simple equations for analyzing the Fresnel diffraction field distribution of an one-dimensional rectangular grating with the opening ratio $1/M$ (where M is a positive integer) is derived. In the equations the connection of the structure of a grating with the fractional Talbot distance is considered. They are more convenient to describe the fractional Talbot effect than that of the distance-oriented equations and the step-by-step equation. A new way to study the fractional Talbot effect of a grating is presented.

Key words fractional Talbot effect, array illumination, Fresnel diffraction.