

高散射介质中光子扩散成像的 线性平移不变性*

曾绍群 骆清铭 龚 辉 石定河 阮 玉

(华中理工大学生物医学光子学研究所, 生物医学光子学教育部重点实验室, 武汉 430074)

摘 要 运用微扰理论探讨了光子扩散成像的线性平移不变性, 阐明了光子扩散成像用于生物组织这一高散射介质结构与功能成像的信号形成机理。光子扩散成像所得的图像是介质内部异常结构通过光子扩散成像系统的响应。光子扩散成像系统的作用可用一个脉冲响应函数来表征。

关键词 光子扩散成像, 线性平移不变性, 高散射介质。

1 引 言

光子扩散成像由于可无损地提供组织内部隐藏异物的信息而受到广泛的关注。基于这一思想所建立的光子扩散成像系统已有相当多的报道^[1-3], 已由初期的根据经验判断组织内部结构, 发展到现在的计算机求解逆衍射问题获得组织内结构分布^[4]。由于体内生物组织结构复杂, 人们对其光学特性参数尚未确知, 光子扩散成像一直面临一个富于挑战的问题, 即如何正确描述扩散光子信号的形成机理, 从而全面理解由光子扩散成像所获得样品内部结构或功能图像的物理意义。

由于对这一问题的研究直接关系到光子扩散成像对结构与功能测试的有效性, 以及成像系统性能的优劣等, 故这方面的研究一直十分活跃。常用方法有蒙特卡罗模拟信号的形成, 扩散方程的数值求解以及在一定条件下求精确解等。其中, Feng^[5]等人采用微扰理论研究了高散射介质中内嵌异物产生的信号, 提出了光子扩散成像的电荷偶极子模型, Zhu^[6]在此基础上给出了更精确的电偶极子系数。他们的工作独树一帜, 在一定程度上解释了测试信号与样品内部结构的关系, 有助于理解光子扩散成像所得图像的物理意义。

事实上, 对于成像系统, 其是否具有线性平移不变性, 是至关重要的。如果能证明光子扩散成像在一定条件下具有线性平移不变性, 则可应用线性系统理论进行研究, 特别是运用线性系统理论和傅里叶分析提供的频谱分析方法, 对光子扩散成像进行系统的理论研究^[7]。采用频谱分析方法研究光子扩散成像系统, 无疑会获得光子扩散图像信号的形成机理, 揭示测试信号与内部结构的内在关系, 阐明所测结果的物理意义, 并可得到成像分辨率、对比度以及探测深度等性能指标与系统结构参数的关系, 为适当设计系统、评价系统性能, 以及进

* 国家自然科学基金(39770228, 69778004)、211 基金和教育部回国人员基金资助。

收稿日期: 1998-09-01; 收到修改稿日期: 1999-07-05

一步进行光子扩散信息处理提供方法及理论指导。

基于上述思想, 本文研究了光子扩散成像的线性平移不变性。从半无限大高散射介质样品出发, 采用微扰处理方法, 分别求解了光子源与样品相对静止时的光子扩散场以及源与样品相对扫描时的光子扩散场, 在此基础上证明了光子扩散成像在一定条件下具有线性平移不变性, 由此阐明了光子扩散成像用于生物组织结构与功能测试的机理。

2 光子扩散方程求解

生物组织及其它混浊介质(高散射介质)中的光子迁移规律用光子扩散理论描述已获得公认, 所感兴趣的物理量为光子通量密度 $\Phi(\mathbf{r}, t)$, 其单位为单位时间通过单位面积的光子数。在均匀介质中, 光子迁移遵从扩散方程^[4, 5]。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) + \mu_a \Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

式中高散射介质(例如人体等)的扩散常数 $D = 1/[3\{\mu_a + (1-g)\mu_s\}]$; μ_a 为吸收系数, 其单位为 cm^{-1} ; $\mu_s = 1/l_s$ 为扩散系数; l_s 为散射平均自由程; g 为各向异性因子; $\mu'_s = (1-g)\mu_s$, 称为运输散射系数或约化散射系数; $l'_s = (1-g)l_s$, 物理意义为约化散射平均自由程; $c = c_0/n$ 为高散射介质(折射率为 n) 中光速; $S(\mathbf{r}, t)$ 为扩散光子源函数。

根据测试中常用的实验结构, 设生物组织样品为半无限大。 $z > 0$ 为生物组织, $z < 0$ 为自由空间。光子入射生物组织表面, 进入生物组织后发生散射。因此可认为扩散光子源函数 S 仅在界面取值, 记为 P_1 。根据界面上光子通量守恒准则, 在 $z = 0$ 面上满足如下边界条件

$$D \mathbf{n}_1 \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r})|_{z=0} = P_1 - h_0 \Phi(\mathbf{r})|_{z=0}, \quad (2)$$

式中 \mathbf{n}_1 为界面外法线单位矢量; h_0 为界面光子输运系数, 单位为 cm^{-1} , $h_0 \Phi$ 为通过界面逸出生物组织的光子通量, 与界面上光子通量成正比。

在稳态情况下, 描述高散射介质中光子扩散的(1)式、(2)式可化为

$$D \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) - \mu_a \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_0 \Phi(\mathbf{r}) - \frac{P_1}{D}. \quad (4)$$

对于光学成像, 样品中的非均匀成分或待测结构表现为其散射系数、各向异性因子以及吸收系数与周围均匀介质相应光学参数的差异, 常用 μ_a 与 D 的相对偏差表示, 如下式所示^[4]

$$\mu_a(\mathbf{r}) = \mu_a [1 + \delta\mu_a(\mathbf{r})], \quad (5)$$

$$D(\mathbf{r}) = D_0 [1 + \delta D(\mathbf{r})], \quad (6)$$

式中 μ_a 、 D_0 为均匀样品光学参数(与空间坐标无关), $\delta\mu_a$ 、 δD 为样品非均匀结构产生的光学特性参数相对偏差(与空间坐标有关)。根据文献[1, 2, 4~6], 对于实际测试可作微扰假设, 即

$$\delta\mu_a \ll 1, \quad \delta D \ll 1. \quad (7)$$

在样品中引入非均匀微扰之后, 样品中光子密度函数将产生变化, 可表示为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi_1(\mathbf{r}), \quad (8)$$

式中 $\Phi_1(\mathbf{r})$ 表示样品中非均匀成分所产生的光子密度函数的变化。

将(5)~(8)式代入(3)式、(4)式, 仅计入 $\delta\mu_a$ 、 δD 的一阶项时, 可得 Φ_0 、 Φ_1 所满足的微分方程

$$D_0 \nabla^2 \Phi_0(\mathbf{r}) - \mu_a \Phi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Phi_0(\mathbf{r})}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_0 \Phi_0(\mathbf{r}) \Big|_{z=0} - \frac{P_1(x, y)}{D_0} \Big|_{z=0}, \quad (10)$$

$$D_0 \nabla^2 \Phi_1 - \mu_a \Phi_1(\mathbf{r}) = -q, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{r})}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_0 \Phi_1(\mathbf{r}) \Big|_{z=0} + \frac{P_1}{D_0} \delta D(\mathbf{r}) \Big|_{z=0}, \quad (12)$$

(11) 式中

$$q = D_0 \delta D(\mathbf{r}) \nabla^2 \Phi_0(\mathbf{r}) - \mu_a \delta \mu_a(\mathbf{r}) \Phi_0(\mathbf{r}), \quad (13)$$

设样品表面无非均匀结构, 即 $\delta D(z=0) = 0$, 因此(12) 式中末一项为 0。(11) 式、(12) 式为描述生物组织中光子扩散传输的重要方程, 其物理意义为: 当样品内部非均匀结构引起样品光学特性参数偏差较小时, 均匀光子通量与非均匀结构的相互作用相当于次级光子激励源, 在均匀样品中产生的光子通量分布即为非均匀光子通量 Φ_1 。事实上, 在生物医学无损诊断与测试中, 主要采用后向散射方式测量, 仅对表面非均匀光子通量分布感兴趣。

(9)~(12) 式可由格林函数法^[8] 求解。其基本思路如下: 1) 首先求得算子的基本解; 2) 然后求得满足边界条件的格林函数; 3) 最后代入格林公式求得满足边界条件的微分方程解。在求基本解时, 通常采用傅里叶变换方法, 直接求得解的傅里叶谱。由于用谱表示的解, 形式更为简洁, 并有利于讨论, 除非特殊需要, 下面均采用其谱的形式。

令

$$O(x, y, z) = \delta D(x, y, z) - \delta \mu_a(x, y, z)$$

表示样品非均匀光学参数的综合分布, 相当于常规光学成像中的待测物函数。由附录 A 求得物函数产生的表面非均匀光子通量分布如下

$$\tilde{\Phi}_1(k_x, k_y, s) = \iint dk'_x dk'_y \frac{\tilde{P}(k_x - k'_x, k_y - k'_y)}{D_0 \mu_a (h_0 + \xi)(h_0 + \xi')} \tilde{O}_z(k'_x, k'_y, s). \quad (14)$$

上式中 \tilde{O}_z 为经(A7) 式变换后样品的非均匀性函数, s 为 z 的变换对偶量[见附录(A7) 式]。

(14) 式为入射光子源与生物组织样品相对静止时, 样品内部非均匀结构在入射光子激励下, 在表面产生的光子通量场空间频谱。由该频谱即可获得样品内部结构信息。上式的推导尚未考虑实际光子扩散成像系统的扫描成像工作方式。实际成像时, 光子源与样品间存在相对运动。每相对移动一次, 记录下激励源产生的光子扩散场, 再由多次激励产生的多个光子扩散场确定样品内部的非均匀结构。因此有必要研究在扫描坐标下非均匀结构产生的用于实际成像的光子扩散场。

3 成像光子通量分布谱函数

设 X_s [即 (x_s, y_s)] 为扫描坐标, 每次光子激励产生的光子通量分布为 $\Phi(x, y, z, x_s, y_s)$, 它所满足的方程形式上与(11) 式、(12) 式完全一致。在半无限大、高散射介质这一假设下, 样品的光学性质具有平移不变性, 即

$$\delta D(x, y, z, x_s, y_s) = \delta D(x_s - x, y_s - y, z), \quad (15)$$

$$\delta \mu_a(x, y, z, x_s, y_s) = \delta \mu_a(x - x_s, y - y_s, z), \quad (16)$$

同理可求得每次激励产生的光子通量场 $\Phi(x, y, z, x_s, y_s)$ 的谱为

$$\tilde{\Phi}_1(k_x, k_y, x_s, y_s) = \iint dk'_x dk'_y \frac{\tilde{P}_1(k_x - k'_x, k_y - k'_y)}{D_0 \mu_a (h_0 + \xi)(h_0 + \xi'')} \tilde{O}_z(-k_x, -k_y, s) \exp[-i(x_s k'_x + y_s k'_y)], \quad (17)$$

细心观察(17)式会发现,其积分核正是光子通量场关于空间坐标 X [即 (x, y)]、 X_s [即 (x_s, y_s)] 的双谱,即

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, k_{sx}, k_{sy}) = \frac{\tilde{P}_1(k_x + k_{sx}, k_y + k_{sy})}{D_0\mu_a(h_0 + \xi)(h_0 + \xi'')} \tilde{O}_z(k_{sx}, k_{sy}, s'), \quad (18)$$

式中 $\xi'' = [(k_x + k_{sx})^2 + (k_y + k_{sy})^2 + \mu_a/D_0]^{1/2}$, $s' = \xi + \xi''$ 。

设 $g_p(x, y)$ 为与测试方法、实验结构、仪器等有关的测试函数,则实际测量值 Φ_m 与表面非均匀光子通量密度 Φ 的关系可表示为

$$\Phi_m(x_s, y_s) = \iint \Phi(x, y; x_s, y_s) g_p(x, y) dx dy, \quad (19)$$

对上式作傅里叶变换,可得

$$\tilde{\Phi}_m(k_{sx}, k_{sy}) = \iint \tilde{\Phi}(k_x, k_y; k_{sx}, k_{sy}) G_p(-k_x, -k_y) dk_x dk_y, \quad (20)$$

式中 G_p 为测试函数 g_p 的傅里叶变换, (k_{sx}, k_{sy}) 与扫描坐标 (x_s, y_s) 相对应。

将(18)式代入(20)式,可得测试信号的谱函数为

$$\tilde{\Phi}_m(k_{sx}, k_{sy}) = \iint dk_x dk_y \frac{\tilde{P}_1(k_x + k_{sx}, k_y + k_{sy})}{D_0\mu_a(h_0 + \xi)(h_0 + \xi'')} \tilde{O}_z(k_{sx}, k_{sy}, s') G_p(-k_x, -k_y), \quad (21)$$

(21)式为成像过程中光子通量信号的频谱变换关系,描述用于构成图像的信号频谱与样品物函数(内部非均匀结构)频谱之间的关系。它包含了光子激励源、生物组织样品的光学性质以及实际测试方法和系统的影响。下面将从(21)式出发,讨论生物组织中光子扩散成像的线性平移不变性。

4 线性平移不变性

根据线性系统理论,如果系统的输出是输入函数与系统脉冲响应的卷积,或者输出频谱等于输入频谱与传递函数的乘积,则可认为该系统是线性平移不变系统^[7]。

光子扩散成像是否具有线性平移不变性呢?为了简化问题,将物函数限定为样品内部 $z = z_0$ 层面上的结构,则物函数可表示为,

$$O(x, y, z) = O(x, y, z_0) \delta(z - z_0). \quad (22)$$

将(22)式代入(21)式,求得它所产生的测试信号频谱为

$$\tilde{\Phi}_m(k_{sx}, k_{sy}) = \tilde{O}(k_{sx}, k_{sy}, z_0) \frac{1}{D_0\mu_a} H_k(k_{sx}, k_{sy}, z_0). \quad (23)$$

式中 $H_k(k_{sx}, k_{sy}, z_0) = \frac{\exp(-\xi z_0)}{h_0 + \xi} G_p \otimes \frac{\exp(-\xi_0)}{h_0 + \xi} P_1$, \otimes 表示二维卷积。

(23)式表明,光子扩散成像系统对生物组织内部任一截面上的非均匀光学结构进行测量时,测试信号频谱等于物函数谱与函数 $\frac{H_k}{D_0\mu_a}$ 的乘积。因此由线性系统理论可知,光子扩散成像具有线性平移不变性。

总结上述推导中所作的假设:1) 样品为半无限大;2) 非均匀性引起的 μ_a 或 D 的相对偏差远小于1;3) 测试目标为样品内部某截面上的结构非均匀性或功能引起的光学参数变化。在光子扩散成像的大多数的医学应用特别是肿瘤早期诊断以及功能成像中,上述假设均是成立的^[1~6]。因此可认为高散射介质中的光子扩散成像具有线性平移不变性。

讨 论 根据以上分析可知,对于样品内部某截面上的结构非均匀性,当其产生的 μ_a 与 D 相对变化较小时,可把物体看作是点物的集合;各点物在表面产生的光子扩散信号,其函数形式是相同的;强度受到各点异常量的调制;总的测试信号是各点结构响应的线性叠加。因此光子扩散成像所得的图像是样品内部某截面上异常结构通过光子扩散成像系统的响应,光子扩散成像系统的作用可用一个脉冲响应函数来表征。在分析中根据文献[1~6]采用了微扰假设。实际生物医学应用中光子扩散成像方法主要用于早期诊断和组织功能测量,光学参量的相对变化常小于 10%^[2],因此该假设是成立的。当组织结构异常程度比较严重,产生的光学参数(μ_a 与 D 等)相对变化较大,或者样品较小,不能作半无限大假设时,本文的有关结论则不能适用,需作进一步分析。

以上讨论的是稳态情况。事实上,对于连续波调制的时变频域光子扩散成像,即扩散光子密度波成像,仅需将 ξ 由原来(A3)式换为 $\xi = [k_x^2 + k_y^2 + \mu_a/D_0 - i\omega/(D_0C)]^{1/2}$,式中 ω 为入射光强度调制频率,上述分析及结果仍是成立的。

参 考 文 献

- [1] Boas D A, O'leary M A, Chance B *et al.*. Scattering and wavelength transduction of diffuse photon density waves. *Phys. Rev. (E)*, 1993, **47**(5) : 2999~ 3002
- [2] Chance B, Luo Q M, Nioka S *et al.*. Optical investigations of physiology: A study of biomedical intrinsic and extrinsic contrast. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, 1997, **352**(1354) : 707~ 716
- [3] Boas D A, O'leary M A, Chance B *et al.*. Detection and characterization of optical inhomogeneities with diffuse photon density waves: A signal-to-noise analysis. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(1) : 75~ 92
- [4] Li X D, Durduran T, Yodh A G *et al.*. Diffraction tomography for biochemical imaging with diffuse photon density waves. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(8) : 573~ 575
- [5] Feng S, Zeng F, Chance B. Photon migration in the presence of a single defect —— a perturbation analysis. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(19) : 3826~ 3837
- [6] Zhu X D, Wei S, Feng S C. Analysis of a diffuse photon density wave in multiple scattering media in the presence of a small sphere object. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(3) : 494~ 499
- [7] Goodmak J W. 傅里叶光学导论. 詹达三等译. 北京: 科学出版社, 1979. 4~ 23
- [8] 舌犬进铁郎. 偏微分方程. 杨永芳译. 上海: 科学技术出版社, 1965.
- [9] Mandelis A. Theory of photothermal wave diffraction tomography via spatial Laplace spectra decomposition. *J. Phys. (A): Math. Gen.*, 1991, **24**(11) : 2485~ 2505

附录 A

根据格林函数法^[8]的基本思想,求得 Φ_0 、 Φ 的谱如下

$$\tilde{\Phi}_0(k_x, k_y, z) = \frac{\tilde{P}_1(k_x, k_y)}{D_0(h + \xi)} \exp(-\xi z), \quad (\text{A1})$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \int_0^\infty dz' \frac{1}{2\xi} [\exp(-\xi|z - z'|) + \frac{\xi - h_0}{h_0 + \xi} \exp(-\xi|z - z'|)] \tilde{q}(k_x, k_y, z'), \quad (\text{A2})$$

式中

$$\xi = (k_x^2 + k_y^2 + \mu_a/D_0)^{1/2}, \quad (\text{A3})$$

$$\tilde{q}(k_x, k_y, z) = \iint dk'_x dk'_y \Phi_0(k_x - k'_x, k_y - k'_y, z) \{D_0 \delta \tilde{D}(k'_x, k'_y, z) \times \\ [- (k_x - k'_x)^2 - (k_y - k'_y)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}] \mu_a \tilde{\delta \mu}_a(k'_x, k'_y, z)\}, \quad (\text{A4})$$

\tilde{q} 为 q 的傅里叶谱。(A1)式描述了光子在均匀高散射介质中的传播规律,(A2)式为光学性质非均匀时,非均匀分量产生的光子通量误差信号谱。

令 $z = 0$, 求得表面非均匀光子通量分布如下

$$\bar{\phi}_0(k_x, k_y, 0) = \frac{\bar{P}_1(k_x, k_y)}{D_0(h + \xi)}, \quad (\text{A5})$$

$$\bar{\phi}_1(k_x, k_y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} dk'_x dk'_y \frac{\bar{P}_1(k_x - k'_x, k_y - k'_y)}{\mu_a D_0(h_0 + \xi)(h'_0 + \xi')} \times \int_0^{\infty} dz' \exp[-(\xi + \xi')z'] [\delta\bar{D}(k'_x, k'_y, z') - \delta\bar{\mu}'_a(k'_x, k'_y, z')], \quad (\text{A6})$$

式中 $\xi' = [(k_x - k'_x)^2 + (k_y - k'_y)^2 + \mu_a/D_0]^{1/2}$ 。

为简化分析, 定义修正的空间拉普拉斯变换公式如下^[9]

$$F(s) = \int_0^{\infty} dz f(z) \exp\{-sz\}, \quad (\text{A7})$$

式中, $s = (k_x^2 + k_y^2 + \mu_a/D_0)^{1/2} + [(k_x - k'_x)^2 + (k_y - k'_y)^2 + \mu_a/D_0]^{1/2}$ 为与 z 对应的空间波矢。(A7) 式的逆变换为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds F(s) \exp(sz), \quad (\text{A8})$$

式中 C 为使得上式收敛的适当积分路径。需要指出的是, 这里的积分路径与普通拉普拉斯逆变换的积分图线不一样。普通拉普拉斯逆变换中, 积分沿直线 $\text{Re}(s) = C$ 进行, 选择常数 C 的值使得在 $\text{Re}(s) > C$ 的区域内 $F(s)$ 是解析的即可。由于光子通量的复空间波矢 s 的特殊意义, 必须寻找适当的拉普拉斯逆变换路径。

引入(A7)式之拉普拉斯变换后, (A6)式可化简为

$$\bar{\phi}_1(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} dk'_x dk'_y \frac{\bar{P}_1(k_x - k'_x, k_y - k'_y)}{D_0 \mu_a (h_0 + \xi)(h_0 + \xi')} \bar{O}_z(k'_x, k'_y, s), \quad (\text{A9})$$

式中 $\bar{O}_z(k'_x, k'_y, s) = [\delta\bar{D}(k'_x, k'_y, s) - \delta\bar{\mu}'_a(k'_x, k'_y, s)]$ 是经(A7)式变换后样品的非均匀性物函数。

On the Linear Shift Invariance of Photon Diffusive Imaging in High Scattering Media

Zeng Shaoqun Luo Qingming Gong Hui
Shi Dinghe Ruan Yu

(National Laboratory for Biomedical Photonics, Institute for Biomedical Photonics,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 1 September 1998; revised 5 July 1999)

Abstract The linear shift invariance of photon diffusive imaging in high scatter media is analysed based on the perturbation approximation. The image formation mechanism of the photon diffusive imaging system is illustrated for the noninvasive imaging measurements in medical application. The image obtained with this technique is a response of the inhomogeneities inside the sample to the imaging system. The feature of the photon diffusive imaging system can thus be characterized with a pulse spreading function.

Key words photon diffusive imaging, linear shift invariance, high scattering media.