

矩形介质光波导的条形传递函数方法

冯莹¹⁾ 李海阳²⁾ 李湘荣³⁾ 周建平²⁾

- 1), 国防科学技术大学应用物理系, 长沙 410073
2), 国防科学技术大学航天技术系, 长沙 410073
3), 广州第一军医大学医学工程系, 广州 510515

摘 要 将条形传递函数方法引入矩形介质光波导传播特性的分析计算。从标量波动方程的变分表达式出发, 推导和建立了条形传递函数方法的基本方程和两种应用模型。作为算例, 给出了阶跃型折射率分布矩形介质光波导的数值计算结果, 并与其它方法进行了比较, 表明了此方法的精度及对光波导问题的适用性。

关键词 光波导, 传播常数, 条形传递函数方法。

1 引 言

众所周知, 即使是最简单的矩形波导, 也没有严格形式的解析解, 故而各种近似解析方法和数值方法被用来作为分析矩形光波导的手段。如对于折射率阶跃型分布的矩形波导, 有圆谐函数分析法^[1], 马卡提里近似分析法^[2], 有效折射率分析法^[3], 有限元分析法^[4]等。但对工程实际中常见的具有渐变折射率分布的扩散型波导, 一些近似的解析方法精度及应用范围往往受到局限, 而数值方法则较为适用, 如有限差分法^[5]、有限元法^[6]等, 可以处理一些复杂的波导问题且能够获得较高精度, 但为提高精度而细分单元的同时也带来了所需计算机存贮空间和计算工作量剧增的问题。

条形传递函数方法(SDTFM)^[7, 8]是近年来在力学领域里发展起来的一种半解析数值方法, 它具有精度高、方法规范、适应性较好、所需计算机存贮空间和计算工作量较小等优点。在此之前, 我们已将一维传递函数方法引入扩散各向异性平面光波导的分析计算, 并取得了很好的精度^[9], 在此基础上, 本文将用条形传递函数方法分析计算矩形介质光波导的传播特性, 通过建立理论模型, 推导出矩形介质光波导的条形传递函数解的基本方程, 以阶跃型折射率分布为例, 给出了具体数值计算结果, 并与其它方法的计算结果进行了比较。

2 理论模型

在弱导条件下, 矩形介质光波导中电磁场直角坐标分量满足标量波动方程^[10]:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + [k_0^2 n^2(x, y) - \beta^2] \Phi(x, y) = 0. \quad (1)$$

式中 $n(x, y)$ 为横向折射率分布, β 为波导模的传播常数, $k_0 = \lambda/2\pi$ 为真空中波数, λ 为真空中波长; 对应 E^x 模, $\Phi = E_x(x, y)$, 对应 E^y 模, $\Phi = H_x(x, y)$ 。在求解上述方程来获得光波导的传播特性的许多方法中, 变分原理均为解方程的基础, 本文的基本方程也是通过变分方法建立起来的, 其变分表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \delta L &= 0, \\ L &= \iint [p(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 + p(\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2 - qk_0^2 \Phi + p\beta^2 \Phi] d\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{对应 } E^x \text{ 模,} \quad \Phi = E_x(x, y), \quad p = 1, \quad q = n^2. \quad (3)$$

$$\text{对应 } E^y \text{ 模,} \quad \Phi = H_x(x, y), \quad p = n^2, \quad q = 1. \quad (4)$$

应用条形传递函数方法对问题进行处理时, 首先需要建立离散模型, 即对问题域进行划分, 并对其内的未知函数的形式进行假设。光波导问题是无限域问题, 但用数值方法实际处理时往往取一足够大的有限域来近似无限域, 有限域 Ω 定义为:

$$\Omega = \{x, y \mid 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\},$$

将区域 Ω 划分为 NK 个子区域:

$$\Omega_k = \{x_k, y \mid -\frac{a_k}{2} \leq x_k \leq \frac{a_k}{2}, \quad b_1 \leq y \leq b_2\},$$

其中 $k = 1, 2, \dots, NK$, x, y 为总体坐标, x_k 为 Ω_k 内的局部坐标, a_k 为 Ω_k 的 x 向长度, 如图 1(a) 所示。对 Ω_k 在 y 方向进一步进行划分, 将其分为 NS 个条形单元,

$$\Omega_k^i = \{x_k, y_i \mid -\frac{a_k}{2} \leq x_k \leq \frac{a_k}{2}, \quad 0 \leq y_i \leq b_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, NS; \quad k = 1, 2, \dots, NK.$$

如图 1(b) 所示, 其中 x_k, y_i 为局部坐标, b_i 为条形单元的 y 向宽度。剖分条形单元的直线称为结线, 结线的两端称为结点, 为了提高插精度, 在每个单元的内部还可以定义若干内部结线, 结线总数为 N^i , 如图 1(c) 所示。

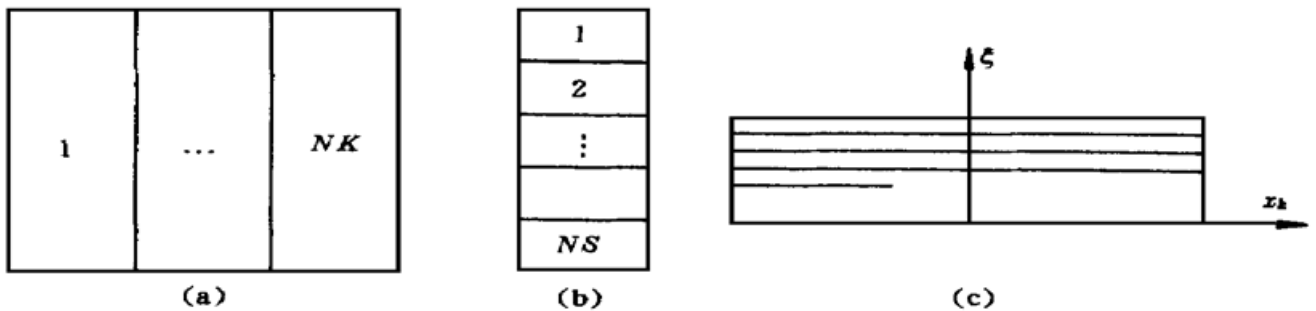


Fig. 1 A rectangular region divided into strips for strip distributed transfer function method

定义 $\xi = y/b_i$ 为条形单元的无量纲局部坐标。条形单元中的场量 Φ 由各结线上的场量函数与 y 方向的插值函数表示:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{N^i} N_k^{ij}(\xi) \Psi_k^j(x_k) = N_k^i \Psi_k^i \quad (5)$$

式中 k 为第 k 个子区域, i 为第 i 个条形单元, N^i 为单元 i 的结线总数, Ψ_k^j 为局部编号为 j 的结线的场量函数矢量, N_k^{ij} 为相应的形函数矩阵, Φ_k 为 Φ 在 k 子区域第 i 单元上的截断函数, 因而整个 Ω 区域内的场量为

$$\Phi = \sum_{k=1}^{NK} \sum_{i=1}^{NS} \Phi_k \quad (6)$$

上式即为离散模型的基本表示, 将其代入变分关系即可得到传递函数方法的控制方程。

3 传递函数解

处理矩形光波导问题时, 将各单元内的折射率取为常数, 即 p 、 q 在单元 i 内的值分别为 p_k^i 、 q_k^i , 将(6)式代入变分方程(2), 可得

$$L = \sum_{k=1}^{NK} \sum_{i=1}^{NS} \int_{-a_k/2}^{a_k/2} [p_k^i (\Psi_k^i)^T k_{00}^{ki} (\Psi_k^i)' + p_k^i \Psi_k^{iT} k_{11}^{ki} \Psi_k^i + (p_k^i \beta^2 - q_k^i k_0^2) \Psi_k^{iT} k_{00}^{ki} \Psi_k^i] dx_k. \quad (7)$$

其中,

$$k_{00}^{ki} = b_i \int_0^1 N_i(\xi) N_i(\xi)^T d\xi, \quad k_{11}^{ki} = (1/b_i) \int_0^1 N_i(\xi) [N_i(\xi)]^T d\xi.$$

类似有限元方法那样, 根据结线局部编号与总体编号、结点局部编号与总体编号的对应关系, 对上标 i 组集矩阵, 可以将(7)式化为:

$$L = \sum_{k=1}^{NK} \int_{-a_k/2}^{a_k/2} [\Psi_k'^T k_{00}^k \Psi_k' + \Psi_k^T k_{11}^k \Psi_k + \beta^2 \Psi_k^T k_{00}^k \Psi_k - k_0^2 \Psi_k^T k_q^k \Psi_k] dx_k. \quad (8)$$

其中, k_{00}^k 、 k_{11}^k 、 k_q^k 分别由 $p^i k_{00}^{ki}$ 、 $p^i k_{11}^{ki}$ 、 $q^i k_{00}^{ki}$ 组集而成。对(8)式取变分可得

$$k_{00}^k \Psi_k'' - k_{11}^k \Psi_k - \beta^2 k_{00}^k \Psi_k + k_0^2 k_q^k \Psi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, NK. \quad (9a)$$

$$\Psi_1(-a_1/2) = 0; \quad \Psi_{NK+1}(a_{NK}/2) = 0. \quad (9b)$$

$$A_k^{-1} k_{00}^k \Psi_k'(a_k/2) - A_{k+1}^{-1} k_{00}^{k+1} \Psi_{k+1}'(-a_{k+1}/2) = 0. \quad (9c)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, NK - 1$, $A_k = \text{diag}(q_k^i)$

用传递函数方法对方程(9)进行求解的步骤如下, 首先定义状态向量

$$\eta_k(x_k) = \{\Psi_k(x)^T \quad \Psi_k'(x)^T\}^T, \quad (10)$$

方程(9a)可以写成状态空间形式

其中,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx_k} \eta_k(x_k) &= F_k \eta_k(x_k), \\ F_k &= \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & I_{m \times m} \\ k_{00}^{k-1} (k_{11}^k + \beta^2 k_{00}^k - k_0^2 k_q^k) & 0_{m \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中 $I_{m \times m}$ 为 m 阶单位矩阵, $0_{m \times m}$ 为 m 阶零矩阵, m 等于矩阵 $k_{00}^{k-1} (k_{11}^k + \beta^2 k_{00}^k - k_0^2 k_q^k)$ 的阶次。为求解方程(11), 引入恒等式

$$M_k \eta_k(-a_k/2) + N_k \eta_k(a_k/2) = Y_k. \quad (12)$$

$$M_k = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad N_k = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad Y_k = \begin{bmatrix} \Phi_k \\ \Phi_{k+1} \end{bmatrix}.$$

式中 Φ_k 为 x 方向上单元 k 左端点场量列阵。且有 $\Phi = \Phi_{NK+1} = 0$, 其中 Φ_k 、 Φ_{k+1} 分别为计算域 x 方向左右边界的场量列阵。(11)式满足约束条件(12)式的解可写成:

$$\eta_k(x_k) = H_k(x_k) Y_k. \quad (13)$$

其中,

$$H_k(x_k) = \exp(F_k x_k) K_k, \quad K_k = [M_k \exp(-F_k a_k/2) + N_k \exp(F_k a_k/2)]^{-1}.$$

记

$$\mathbf{H}_k(x_k) = \begin{bmatrix} H_k^{(0)}(x_k) \\ H_k^{(1)}(x_k) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

将其代入(9b)有:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k \mathbf{k}_{00}^k \mathbf{H}_k^{(1)}\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) \mathcal{Y}_k - \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{k}_{00}^{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^{(1)}\left(-\frac{\alpha_{k+1}}{2}\right) \mathcal{Y}_{k+1} &= 0 \\ k &= 1, 2, \dots, NK - 1. \end{aligned} \quad (15a)$$

$$H_1^{(1)}\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right) \mathcal{Y}_k = 0, \quad H_{NK}^{(1)}\left(\frac{\alpha_{NK}}{2}\right) \mathcal{Y}_k = 0. \quad (15b)$$

将(15)式各方程联立,运用与有限元中相同的节点拼装技术,并注意到 \mathbf{F}_k 、 \mathbf{K}_k 与 β 有关,得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}(\beta) \mathcal{Y} &= 0, \\ \mathcal{Y} &= \{\Phi_2^T \quad \Phi_3^T \quad \dots \quad \Phi_{NK}^T\}^T. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

\mathbf{R} 由(16)式组集得到。

导模存在的必要条件是方程(16)中的 \mathcal{Y} 存在非零解,此时有

$$\det [\mathbf{R}(\beta)] = 0. \quad (17)$$

由(17)式即可得到传播常数 β ,将 β 代入到(16)式求得非零特征向量 \mathcal{Y} ,再代入式(13),即可得到场矢量的分布情况。

4 构造条形单元模型

本文采用了下列两种模型构造条形单元

4.1 二结线二自由度模型

取每个单元的边界结线为未知结线,每个结线有一个独立的未知函数,于是第 k 个子区域中第 i 个单元的未知场函数矢量可以定义为

$$\Psi_k^i = \{u_k^{i1} \quad u_k^{i2}\}^T.$$

式中 u_k^{i1} 、 u_k^{i2} 分别为 Φ 在两条结线上的取值。

形函数的形式为

$$\mathbf{N}_k^i(\xi) = [1 - \xi \quad \xi], \quad (18)$$

$$\mathbf{k}_{00}^{ki} = b_i \int_0^1 \mathbf{N}_k^i(\xi) \mathbf{N}_k^i(\xi)^T d\xi = \frac{b_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{k}_{11}^{ki} = \frac{1}{b_i} \int_0^1 [\mathbf{N}_k^i(\xi)]' [\mathbf{N}_k^i(\xi)]'^T d\xi = \frac{1}{b_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

4.2 三结线三自由度模型

取每个单元的边界结线和单元中线为未知结线,每条结线有一个独立的未知函数,于是第 k 个子区域中第 i 个单元的未知场函数矢量可以定义为

$$\Psi_k^i = \{u_k^{i1} \quad u_k^{i2} \quad u_k^{i3}\}^T. \quad (21)$$

式中 u_k^{i1} 、 u_k^{i2} 、 u_k^{i3} 分别表示 Φ 在三条结线上的取值。

形函数的形式为

$$\mathbf{N}_k^i(\xi) = [1 - 3\xi + 2\xi^2 \quad 4\xi - 4\xi^2 \quad 2\xi^2 - \xi], \quad (22)$$

则

$$\mathbf{k}_{00}^{ki} = b_k^i \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{11}^{ki} = \frac{1}{b_k^i} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \frac{1}{3}. \quad (23)$$

利用上述模型中形函数的形式及与之相应的系数矩阵, 代入方程(7), 即可进行具体的分析计算。另外, 划分单元时要注意, 折射率有跳跃的界面必须在单元边界与结线上。

5 数值结果

首先以最基本的矩形光波导, 即芯层折射率为 n_1 、包层折射率为 n_2 的波导作为算例, 以便于与戈尔的精确定数值解及其它方法比较。图 2 给出了这种光波导的色散曲线, $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.45$, 波导厚度为 T , 宽度为 W , 图中实线为本文方法的结果, 虚线为马卡提里的结果, 点划线为有效折射率方法的结果。图 2(a) 对应 $W/T = 1$, 图 2(b) 对应 $W/T = 2$, 计算中归一化频率定义为: $v = k_0 T \sqrt{n_1^2 - n_2^2} / \pi$, 归一化传播常数定义为 $B = [(\beta/k_0)^2 - n_2^2] / (n_1^2 - n_2^2)$ 。由图 2 可知, 本文方法的计算结果介于马卡提里法的结果与有效折射率方法的结果之间, 尤其在近截止区与戈尔的圆谐函数方法更为接近或一致。

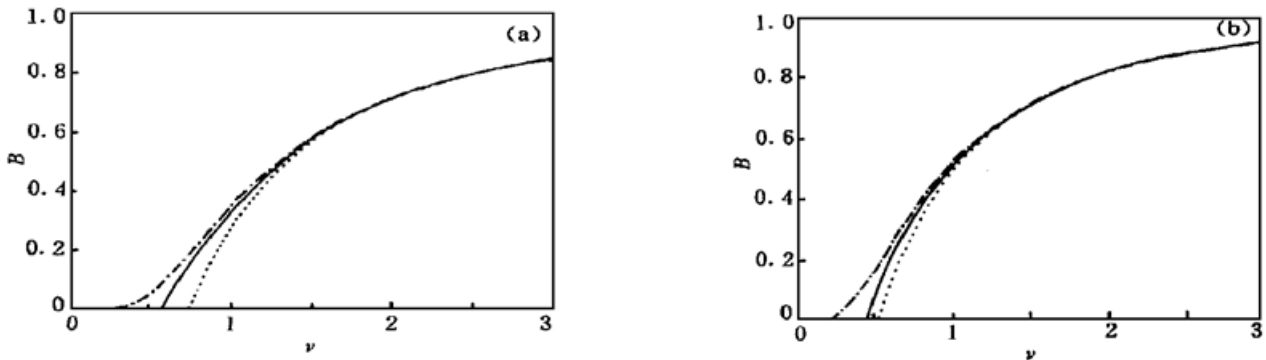


Fig. 2 Dispersion characteristics of the homogeneous rectangular dielectric waveguide. — present; - - Marcattili; -• - effective index. (a) $W = T$, (b) $W = 2T$

从数学角度, 凡与变分法相关的数值计算方法, 在未作非正常近似的情况下, 由变分方程所求得的本征值和本征函数应比准确值要小, 基于这一点, 比较两种方法的精度, 看其所得的本征值即可作出判断。

表 1 为本文方法与有限元方法计算上述矩形波导结果的比较, 其中有限元采用了六结点等参单元, 这是目前有限元方法中精度较高的一种单元模型, 本文方法则用了三结线三自由度模型。从表 1 明显看出, 对阶跃型折射率波导, 本文方法仅取非常少量的单元即获得了高于有限元计算精度的结果, 反映了本方法具有精度高、节约计算机内存空间和计算时间的特点。表 1 也大致反映了本文方法的收敛趋势, 显然, 随着单元划分的增加, 计算结果好于单元划分少的情形, 但这只限于一定范围内, 过多划分单元并不能使计算精度提高。例如, 对表 1 的情况, 当单元数大于 3×12 以后, 计算结果基本在小数点后第四位变化, 若单元数继续增加, 计算结果反而有所减小, 这是因为, 单元数的增加大大扩展了矩阵维数, 导致计算过程的积累误差增大, 不但对计算精度有影响, 同时导致计算量成倍增加。另外, 由上面对

空间状态方程的求解推导过程可知,对阶跃型折射率波导,在解析方向上(x 方向)只需以折射率有跳跃的两个界面为界,划分三个子区域,解析方向区块的增多对提高精度没有任何帮助,反而会增加计算工作量和计算过程的积累误差,其原因是不言而喻的。因此单元划分多少要根据具体情况适当选取。图3和图4分别为 $W/T = 2$ 的矩形沟道波导和脊形波导的色散曲线,其中 $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.45$, $n_3 = 1.0$,计算中采用三结线三自由度模型,结果也表明,本文方法仅取 3×6 个计算单元,其精度已高于文献[4]中给出的有限元方法的精度。

Table 1. Comparison of normalized propagation values using the TEM with this work. ($n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.45$, $W = T$)

ν \ mesh	FEM	FEM	this work	this work	this work
	72	288	3×6	3×9	3×12
0.7	0.0995	0.1030	0.1092	0.1102	0.1108
0.8	0.1796	0.1851	0.1867	0.1877	0.1880
0.9	0.2517	0.2595	0.2594	0.2607	0.2611
1.0	0.3173	0.3277	0.3266	0.3284	0.3287
1.1	0.3765	0.3893	0.3876	0.3900	0.3906
1.2	0.4295	0.4445	0.4422	0.4453	0.4461

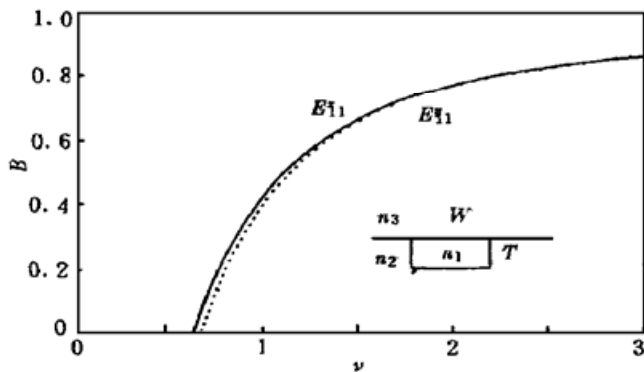


Fig. 3 Dispersion characteristics of the embedded waveguide. $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1.45$, $n_3 = 1.0$, $W/T = 2$

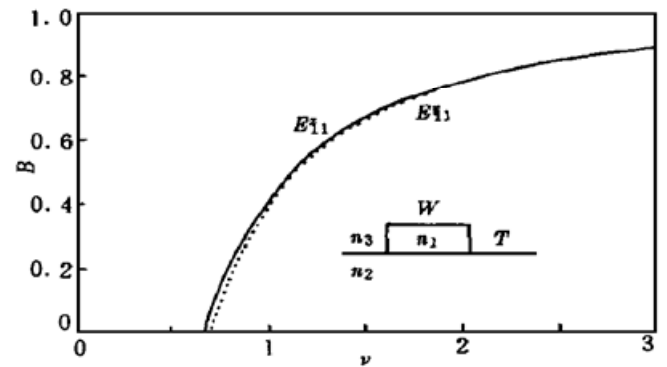


Fig. 4 Dispersion characteristics of the raised waveguide. $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1.45$, $n_3 = 1.0$, $W/T = 2$

结束语 本文将条形传递函数方法引入矩形光波导问题的分析中,从标量波动方程出发,利用变分关系建立了条形传递函数方法的基本方程并对方程进行求解,分别利用两种应用模型对阶跃型折射率分布的矩形光波导作了具体的数值计算,通过与其它方法的比较,表明条形传递函数方法具有精度高,方法规范,适应性好,计算工作量小等优点,是实际处理各种结构介质光波导传播特性问题的一种有效的计算方法。

致谢 衷心感谢高伯龙院士对本文工作的悉心指导和对理论推导过程的严格验证。

参 考 文 献

- [1] Goell J E. A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides. *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, 48(7): 2133~ 2160
- [2] Marcatili E A J. Dielectric rectangular waveguides and directional couplers for integrated optics. *Bell*

- Syst. Tech. J.*, 1969, **48**(7) : 2071~ 2101
- [3] Knox R M, Touliox P P. Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range. in *Proc. MRI symp. Submillimeter Waves*, Fox J Ed. Brooklym, New York: Polytechnic Press. 1970. 497 ~ 516
- [4] Yeh C, Ha K, Dong S B *et al.*. Single mode optical waveguides. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(10) : 1490~ 1504
- [5] Schweig E, Bridges W B. Computer analysis of dielectric waveguides: A finite difference method. *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1984, **MTT-32**(5) : 531~ 541
- [6] Mabaya N, Lagasse P E, Vandenbulcke P. Finite element analysis of optical waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1981, **MTT-29**(6) : 600~ 605
- [7] Zhou J P, Yang B. Strip distributed transfer function method for analysis of plates. *Internat. Numer. J. Numer. Meth. Engng.*, 1996, **39** : 1915~ 1932
- [8] Yang B, Zhou J. Semi-analytical solution of 2-D elasticity problems by the strip distributed transfer function method. *Internat. J. Solids Structures*, 1996, **33**(27) : 3983~ 4005
- [9] 冯 莹, 李湘荣, 李海洋等. 扩散平面光波导的传递函数方法. *光学学报*, 1999, **19**(1) : 50~ 56
- [10] Suhara T, Handa Y, Nishihara H *et al.*. Analysis of optical channel waveguides and direction couplers with graded-index profile. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(6) : 807~ 815

Strip Distributed Transfer Function Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides

Feng Ying¹⁾ Li Haiyang²⁾ Li Xiangrong³⁾ Zhou Jianping²⁾

1), *Department of Applied Physics, National University of Defense Technology, Changsha 410073*

2), *Department of Aerospace Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073*

3), *Department of Medical Engineering, The First Military Medical University, Guangzhou 510515*

(Received 27 April 1998; revised 23 September 1998)

Abstract A semi-numerical method —— strip distributed transfer function method, is developed to analyze the propagation characteristics of rectangular dielectric waveguides. The fundamental equation of the method is derived from scalar variational equation, and two specific models are given. Numerical analyses of the models are presented and compared with other methods. The results show the advantage of this method.

Key words optical waveguide, propagation constant, strip distributed transfer function method.