

# 自适应光学系统波前校正残余误差 的功率谱分析方法\*

饶长辉 沈 锋 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

**摘 要** 采用比较自适应光学系统闭环校正前后时间功率谱的方法, 对自适应光学系统的波前校正残余误差进行了分析。在注意系统噪声时, 实测的闭环波前复原相位误差与实际波前校正残余误差是有区别的, 分析了两者功率谱的差别之后, 提出了一种估计实际波前校正残余误差的方法。应用这种方法对 1.2 米望远镜高分辨力自适应光学系统所采集的复原相位数据方差和波前校正残余误差进行了对比。

**关键词** 自适应光学, 大气湍流, 功率谱, 噪声, 波前残余误差, 复原相位, 闭环带宽。

## 1 引 言

自适应光学技术能够实时测量并且校正受到大气湍流扰动的光学相位波前, 从而在天文学观测、激光传输等领域得到了广泛的应用<sup>[1-3]</sup>。自适应光学系统的波前校正残余误差主要由未完全补偿湍流所引起的误差和系统闭环噪声组成, 尤其在极弱光条件下, 如星体目标观测, 系统噪声对波前校正残余误差和系统性能影响很大。自适应光学系统对大气湍流的补偿校正能力在时域上是由其时间控制带宽决定。文献[3]指出, 自适应光学系统存在最佳闭环工作带宽, 并且它是系统光强和湍流强度的函数。实质上自适应光学系统闭环波前校正是以引入系统噪声为代价去换取对湍流校正的受益。

在实际大气湍流补偿实验中, 可以利用所采集的波前斜率  $g$ 、复原相位  $e$ 、校正电压  $V$  的数据分析系统开闭环工作时的误差水平和系统校正效果。一般情况下, 人们都认为系统闭环后的波前相位  $e$  的方差就是系统波前校正残余误差方差, 但实际上并非如此, 本文将对此问题展开讨论。文献[4]采用系统闭环校正前后的功率谱对系统的控制效果进行了分析, 但是该分析没有考虑系统的噪声影响。本文则重点考虑系统的噪声水平, 利用自适应光学系统校正前后的时间功率谱对系统波前校正残余误差进行分析, 并对用于“1.2 米望远镜的可见光高分辨力自适应光学系统”所采集的波前相位数据方差和波前校正残余误差进行了对比。

## 2 自适应光学系统及其控制模型

图 1 给出了自适应光学系统的原理框图, 它主要由波前传感器(WFS)、变形反射镜

\* 国家高技术计划资助项目。

(DM) 和高速波前处理机等部分组成, 其中波前处理机主要完成波前斜率计算(GC)、波前复原(WFR)和控制算法(CC), 并为高压放大器(HVA) 输出控制电压。

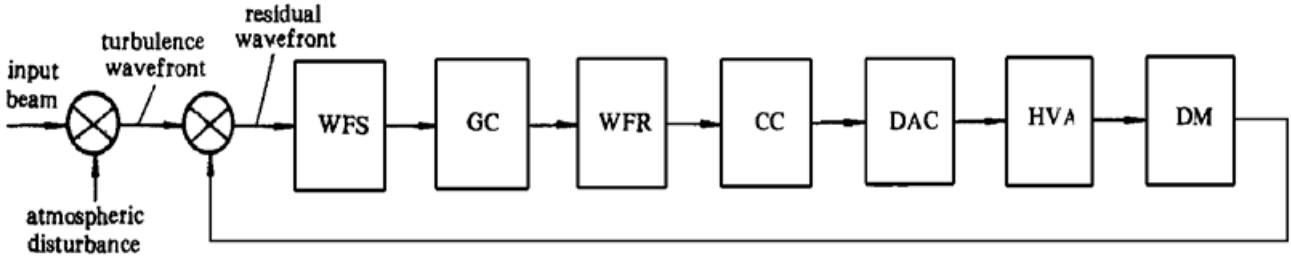


Fig. 1 Block diagram of adaptive optical system. WFS: wavefront sensor, GC: gradient computation, WFR: wavefront reconstruction, CC: control algorithm, DAC: digital to analog converters, HVA: high voltage amplifiers, DM: deformable mirror

图 2 为自适应光学系统控制模型方框图, 图中  $x(t)$  为大气湍流并且扰动输入信号;  $y(t)$  为控制系统反馈信号;  $e(t)$  为系统闭环校正后的误差信号;  $n(t)$  为探测器引入的噪声信号;  $C(s)$  为所采用的控制算法。一般情况下, 系统所采集的波前斜率  $g$ 、复原相位  $e$  和校正电压  $V$  分别对应于 GC、WFR 和 CC 的输出  $z_2(t)$ 、 $z_3(t)$  和  $z_4(t)$ , 如图 2 所示。

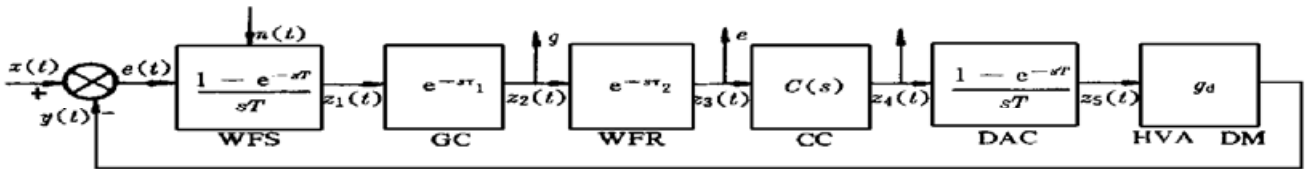


Fig. 2 Block diagram of control system

波前传感器为一采样保持环节, 斜率计算、波前复原可以等效纯延时环节, 数模转换器为一零阶保持器, 高压放大器和变形反射镜可以等效为一纯增益环节。下文中, 时间函数用小写字母表示, 其对应的拉普拉斯变换用大写字母表示, 如  $z(t)$  的拉普拉斯变换为  $Z(s)$ 。因此自适应光学系统控制对象本身的传递函数为:

$$G(s) = g_d \left[ \frac{1 - \exp(-sT)}{sT} \right]^2 \exp[-s(\tau_1 + \tau_2)], \quad (1)$$

式中  $T$  为系统采样周期;  $\tau_1$  为斜率计算时间延迟;  $\tau_2$  为波前复原运算时间延迟;  $g_d$  为变形镜和高压放大器的增益。

对于用于 1.2 米望远镜的可见光高分辨力自适应光学系统, 我们主要采用了比例积分(PI)和期望频率特性(也可称为 PID)两种典型控制算法, 其控制模型分别为:

$$C_1(s) = \frac{Z_4(s)}{Z_3(s)} = \frac{K}{s}, \quad C_2(s) = \frac{K(1 + sT_1)}{s(1 + sT_2)}, \quad (2)$$

其中  $K$  为控制增益,  $T_1$  和  $T_2$  分别为微分和积分时间常数。该系统采用哈特曼-夏克(Hartmann-Shack)波前传感器、变形反射镜驱动器数目为 61。哈特曼-夏克波前传感器主要由阵列透镜、像增强器、耦合物镜以及 CCD 采集系统等组成, 其采样频率为 838 Hz, 系统有效子孔径数为 48。根据(1)式和(2)式可以得到系统的闭环和误差传递函数分别为:

$$H_c(s) = Y(s)/X(s) = G(s)C(s)/[1 + G(s)C(s)], \quad (3)$$

$$H_e(s) = E(s)/X(s) = 1/[1 + G(s)C(s)]. \quad (4)$$

图 3(a) 和图 3(b) 分别给出了该系统中所采用的这两种算法所测量得到的闭环和误差传

递函数, 其闭环 3 dB 带宽  $f_{3\text{dB}}$  和误差过零频率  $f_e$  分别为: PI:  $f_{3\text{dB}} = 27\text{ Hz}$ ,  $f_e = 28\text{ Hz}$ ; PID:  $f_{3\text{dB}} = 94\text{ Hz}$ ,  $f_e = 42\text{ Hz}$ 。

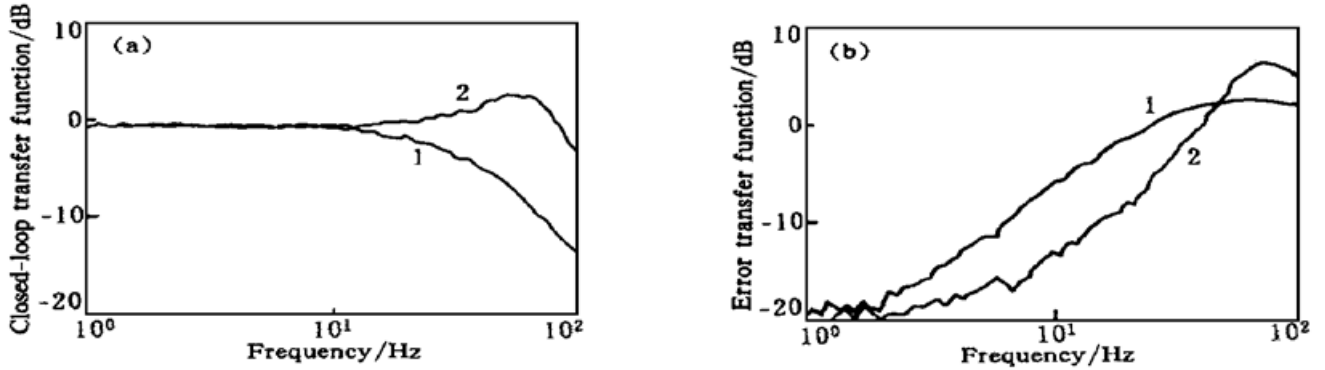


Fig. 3 The measured closed-loop (a) and error (b) transfer function with PI controller (1) and PID controller (2).  $\tau_1 + \tau_2 = 2.85\text{ ms}$ ,  $T_1 = 0.864\text{ ms}$ ,  $T_2 = 0.398\text{ ms}$

### 3 应用实测功率谱方法分析系统波前校正残余误差

#### 3.1 理论推导

在自适应光学系统进行实际大气湍流补偿校正实验中, 不能直接测量出系统的波前校正残余误差, 只能利用所采集的波前斜率  $g$ 、复原相位  $e$ 、校正电压  $v$  数据分析系统开闭环工作时的误差水平和系统校正效果。对所采集到的复原相位  $e$  的开环和闭环数据采用快速傅里叶变换的方法来求取  $e$  的功率谱, 可以推算出系统的波前校正残余误差。

在自适应光学系统中, 系统波前校正残余误差主要由未完全校正湍流引起的误差和系统闭环噪声组成。自适应光学系统闭环工作时, 对于大气湍流引起的波前相位扰动, 其传递函数为误差传递函数; 而对于从波前传感器引入的系统噪声则为闭环传递函数。一般情况下, 相对于系统闭环带宽而言, 波前传感器噪声为白噪声。理论上, 自适应光学系统闭环校正后的波前残余误差方差为<sup>[3, 5]</sup>:

$$\sigma^2 = \sigma_{f_t}^2 + \sigma_{f_n}^2 = \int_0^{\infty} F_f(f) |H_e(jf)|^2 df + \int_0^{\infty} F_{f_n}(f) |H_c(jf)|^2 df, \quad (5)$$

式中  $F_f(f)$  为大气湍流功率谱,  $F_{f_n}$  为系统噪声功率谱,  $H_e(jf)$  和  $H_c(jf)$  分别为系统误差传递函数和闭环传递函数。如果系统的闭环传递函数为:

$$H_c(jf) = \frac{\exp(-j2\pi f \tau)}{1 + jf/f_{3\text{dB}}}, \quad (6)$$

其中  $\tau$  为系统总时延,  $f_{3\text{dB}}$  为系统闭环 3 dB 带宽。则波前校正残余误差为:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} F_f(f) |H_e(jf)|^2 df + \frac{\pi}{2} F_{f_n} f_{3\text{dB}}. \quad (7)$$

对于实测复原相位  $e$ , 其开环和闭环功率谱既包括大气湍流引起的波前相位抖动, 也包括系统的噪声成分。波前相位  $e$  的开环功率谱和闭环功率谱的低频段(几十至几百赫兹, 视光能而定)可以大致反映开环和闭环时的大气湍流功率谱, 在高频段由于系统噪声占主要成分, 因而不能反映大气功率谱的高频(大于几十至几百赫兹)特性。

实测复原相位  $e$  中既包括大气湍流未完全校正后的残余误差, 又包括系统噪声的影响, 大气湍流引起的波前相位扰动的传递函数为误差传递函数, 而系统噪声的传递函数不是闭环

传递函数, 而是误差传递函数。实测复原相位  $e$  的闭环误差方差为:

$$\sigma_e^2 = \int_0^{\infty} F_{f_e}(f) |H_e(jf)|^2 df + F_{f_n} \int_0^{\infty} |H_e(jf)|^2 df, \quad (8)$$

因此实测复原相位  $e$  的闭环误差和(7)式表示的系统波前校正残余误差是有明显区别的。由(7)式、(8)式可以得到:

$$\sigma_e^2 - \sigma^2 = F_{f_n} \left( \int_0^{\infty} |H_e(jf)|^2 df - \frac{\pi}{2} f_{3\text{dB}} \right), \quad (9)$$

$$\text{令} \quad \beta = \int_0^{\infty} |H_e(jf)|^2 df - \frac{\pi}{2} f_{3\text{dB}}, \quad (10)$$

$\beta$  与系统闭环带宽  $f_{3\text{dB}}$  的关系曲线如图 4 所示, 则系统实测波前校正残余误差方差为:

$$\sigma^2 = \sigma_e^2 - \beta F_{f_n}. \quad (11)$$

上式给出了系统实测波前校正残余误差和实测复原相位  $e$  的误差之间的关系。

根据(7)~(11)式, 可以确定系统实测波前校正残余误差, 具体步骤如下:

1) 根据复原相位  $e$  的闭环功率谱  $F_{f_e}(f)$  确定实测

复原相位  $e$  的误差方差  $\sigma_e^2 = \int_0^{\infty} F_{f_e}(f) df$ ;

2) 根据复原相位  $e$  的开环和闭环功率谱确定系统噪声功率谱  $F_{f_n}$ , 复原相位  $e$  的开环和闭环功率谱高频段的交汇处的平坦区域所对应的功率谱大小也就是系统的噪声功率谱  $F_{f_n}$ ;

3) 根据系统闭环工作带宽确定  $\beta$ , 见(10)式;

4) 根据前面得出的  $\sigma_e^2$ 、 $F_{f_n}$ 、 $\beta$  和(11)式确定系统实测波前校正残余误差  $\sigma^2$ 。

### 3.2 一个例子

下面仍以用于 1.2 米望远镜的可见光高分辨力自适应光学系统所采集的复原相位  $e$  数据为例来分析系统的波前校正残余误差。图 5(a) 给出了星等为  $m_v = 1.^m1$ 、闭环带宽为  $f_{3\text{dB}} = 94 \text{ Hz}$  时所实际测量的复原相位  $e$  的开环和闭环功率谱; 图 5(b) 给出了星等为  $m_v = 2.^m9$ 、闭环带宽分别为  $f_{3\text{dB}} = 27 \text{ Hz}$  和  $f_{3\text{dB}} = 94 \text{ Hz}$  时所实际测量的复原相位  $e$  的开环和闭环功率谱。

根据图 5 和与之对应的复原相位数据可以得到这两颗星的噪声功率谱  $F_{f_n}$ 、复原相位  $e$  的方差  $\sigma_e^2$ 、波前校正残余误差  $\sigma^2$  以及相对误差  $\alpha[\alpha = (\sigma_e^2 - \sigma^2)/\sigma^2]$ , 如表 1 所示。

Table 1. Comparison of reconstructed phase variance and closed-loop wavefront residual error variance

magnitude	$f_{3\text{dB}}/\text{Hz}$	$\beta$	$F_{f_n}$	$\sigma_e^2$	$\sigma^2$	$\alpha$
$m_v = 1.^m1$	94	417.30	$9.0 \times 10^{-7}$	$4.4 \times 10^{-3}$	$3.72 \times 10^{-3}$	18.3%
$m_v = 2.^m9$	27	423.80	$1.1 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-2}$	$6.14 \times 10^{-3}$	75.9%
$m_v = 2.^m9$	94	417.30	$1.1 \times 10^{-5}$	$1.72 \times 10^{-2}$	$1.26 \times 10^{-2}$	36.5%

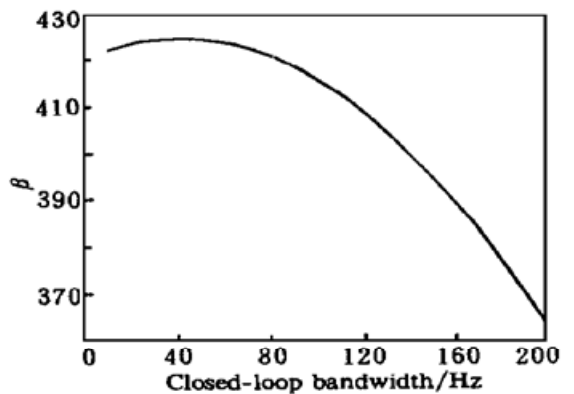


Fig. 4  $\beta$  vs closed-loop bandwidth  $f_{3\text{dB}}$

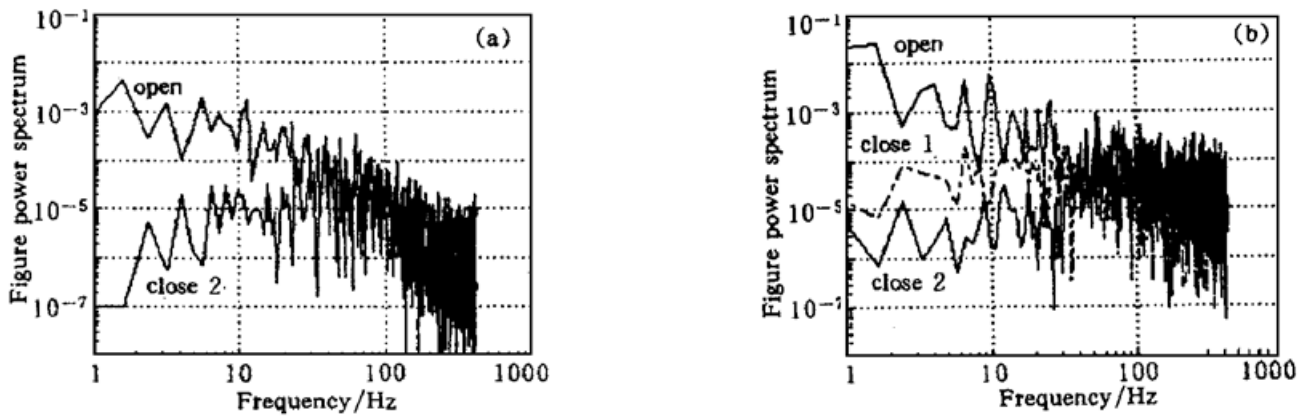


Fig. 5 Open loop and closed-loop power spectrum obtained in star image compensation experiment.

(a)  $m_v = 1.^m1$ , (b)  $m_v = 2.^m9$ , close1:  $f_{3dB} = 27$  Hz, close2:  $f_{3dB} = 94$  Hz

(11) 式及表 1 数据表明: 实际测量的复原相位  $e$  闭环误差方差总是大于系统波前校正残余误差; 对于同一星等的观测星体目标, 闭环带宽(大于 40 Hz) 越小, 这两者之间的相对误差越大; 相同控制带宽情况下, 目标星等越高(光强越弱), 其相对误差也越大。

**总 结** 应用功率谱分析的方法对复原相位误差和系统波前校正残余误差进行了分析和对比, 并重点考虑了系统的噪声因素。分析结果表明:

1) 闭环复原相位  $e$  中既包括大气湍流未完全校正后的残余误差, 又包括系统噪声的影响, 大气湍流引起的相位扰动的传递函数为误差传递函数, 而系统噪声的传递函数不是闭环传递函数, 而是误差传递函数, 呈现高通滤波器的特性。而系统波前校正残余误差中的噪声传递应为闭环传递函数, 呈现低通滤波器的特性。

2) 复原相位  $e$  闭环误差方差总是大于系统波前校正残余误差; 对于相同光强的观测目标, 闭环带宽越小, 其相对误差越大; 相同控制带宽情况下, 目标光强越弱, 其相对误差也越大。

本文建立的一种根据实测  $g$ 、 $e$ 、 $V$  数据的功率谱对系统闭环校正残余误差进行分析的方法, 在实际工作中证明是可行的。

感谢参加该系统工作的所有其他同志。

### 参 考 文 献

- [1] Jiang Wenhan, Li Mingquan, Tang Guomao *et al.*. Adaptive optics image compensation experiments for star objects. *Opt. Engng.*, 1995, **34**(1): 15~ 20
- [2] 姜文汉, 严佩英, 李明全等. 自适应光学实时大气湍流补偿实验. *光学学报*, 1990, **10**(6): 558~ 564
- [3] 饶长辉, 姜文汉. 2.16 m 望远镜红外自适应光学系统的误差和性能分析. *天体物理学报*, 1996, **16**(4): 428~ 437
- [4] 李新阳, 姜文汉, 王春红等. 自适应光学系统控制效果分析的功率谱方法. *强激光与粒子束*, 1998, **10**(1): 6~ 10
- [5] 饶长辉, 姜文汉, 李明全. 光子计数剪切干涉仪波前探测自适应光学系统的噪声分析. *光学学报*, 1997, **17**(2): 175~ 180

## Analysis of Closed-Loop Wavefront Residual Error of Adaptive Optical System Using the Method of Power Spectrum

Rao Changhui    Shen Feng    Jiang Wenhan

(*Institute of optics and electronics, Chinese Academy of Science, Chengdu, 610209*)

(Received 7 July 1998; revised 17 November 1998)

**Abstract** Closed-loop wavefront residual error of adaptive optical system consists of the uncompensated turbulence error and closed-loop noise. The measured closed-loop wavefront residual error is analyzed by using open-loop and closed power spectrum. When the system noise is considered, the measured reconstructed phase error and the closed-loop wavefront residual error are different. Based on the difference of their power spectrum, a method of evaluating the closed-loop wavefront residual error is proposed. The comparison of the reconstructed phase error, which is calibrated in high resolution adaptive optical system of 1.2 m telescope, and the closed-loop wavefront residual error is given.

**Key words** adaptive optics, atmospheric turbulence, power spectrum, noise, wavefront residual error, reconstructed phase, closed-loop bandwidth.