第 20 卷 第 1 期
2000 年 1 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 20, No. 1
January, 2000

平顶高斯光束的模相关系数和模分解理论*

张 彬 吕百达 罗时荣
(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

摘 要 利用部分相干光理论, 推导出柱坐标系下平顶高斯光束模相关系数的解析表达式。基于推导出的 M^2 因子的推广公式, 建立了平顶高斯光束的模分解理论。

关键词 平顶高斯光束, 模相关系数, 模分解理论, M^2 因子。

1 引 言

在激光的许多实际应用中, 例如激光材料加工和激光核聚变中, 经常要求空间均匀分布的平顶光束。对这类光束可用超高斯函数来模拟, 但超高斯光束不是波动方程在自由空间中的本征解[1], 对其传输变换的研究常常需要作繁冗的数值积分[2]。为了克服这一困难, 近年来, 提出了平顶高斯光束的概念[3]。由于平顶高斯光束可表示为有限数目拉盖尔-高斯模或厄米-高斯模的叠加[3, 4], 可用熟知的高阶高斯光束变换公式进行研究, 从而带来了不少方便。迄今为止, 对平顶高斯光束的分类、传输变换、聚焦特性和相位分布等已进行了广泛的研究[3~8], 并给出了 M^2 因子的计算公式[6]。在对光束特性研究中, 感兴趣的另一个问题是光束的模结构和模相关系数。Du 和 Weber 等从 M^2 因子的二阶矩定义出发, 在直角坐标系下严格推导出了 M^2 因子(光束传输因子)用模相关系数表示的公式[9~10]。该式表明, 不同空间横模或多或少存在相关性, 并为 Du 等人的实验所证实[11, 12]。本文的目的是研究平顶高斯光束的模相关和模分解问题。首先, 基于部分相干光的正交模展开理论, 推导出柱坐标系下平顶高斯光束的模相关系数。然后, 利用 M^2 因子的二阶矩定义, 推导出 M^2 在柱坐标系下的推广公式和平顶高斯光束的 M^2 因子公式。以此为基础, 建立了平顶高斯光束的模分解理论, 即从给定的 M^2 因子, 计算平顶高斯光束的模式数、模相关系数和权重因子。最后, 对本文所得的主要结果作了总结。

2 平顶高斯光束的模相关系数

由光场部分相干性理论可知, 在准单色场近似下, 描述部分相干光的交叉谱密度函数可表示为[9, 13]

$$J(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2, z) = \sum_{pp'll'} \lambda_{pp'll'} \phi_{pl}(r_1, \theta_1, z) \phi^*_{p'l'}(r_2, \theta_2, z), \tag{1}$$

* 国家高技术基金和国家高技术强辐射重点实验室资助项目。
收稿日期: 1998-09-09; 收到修改稿日期: 1998-10-13

式中, $\lambda_{pp'll'}$ 为模相关系数, p、p'、l、l' 为模阶次, * 表示复共轭, $\phi_i(r_j, \theta_j)$ ($i = pl, p'l'$; $j = 1, 2$, 下同) 为可用正交归一本征函数表示的场分布。在柱坐标系中, 可将 $z = 0$ 处的 $\phi_i(r_j, \theta_j)$ 表示为拉盖尔-高斯函数:

$$\phi_{pl}(r_1, \theta_1) = u_{pl} \exp\left(-\frac{\alpha^2 r_1^2}{2}\right)(\alpha r_1)^l \mathrm{L}_p^l(\alpha^2 r_1^2) \exp(-\mathrm{i} l\theta_1), \tag{2}$$

$$\phi_{p'l'}(r_2, \theta_2) = u_{p'l'} \exp\left(-\frac{\alpha^2 r_2^2}{2}\right)(\alpha r_2)^{l'} \mathrm{L}_{p'}^{l'}(\alpha^2 r_2^2) \exp(-\mathrm{i} l'\theta_2), \tag{3}$$

式中, u_{pl}, $u_{p'l'}$ 为归一化因子, α 为与基模光腰宽度 w_{0h} 有关的参数:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{w_{0h}}. \tag{4}$$

值得注意的是, 在一般情况下, w_{0h} 可不等于 w_0。

由(1)式得到激光束的模相关系数为

$$\lambda_{pp'll'} = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_{pl}^*(r_1, \theta_1) J(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \phi_{p'l'}(r_2, \theta_2) r_1 r_2 \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}r_2. \tag{5}$$

在柱坐标系中, 设 $z = 0$ 处平顶高斯光束的场分布为[3]

$$\varphi(r, \theta) = \exp(-r^2/w_0^2) \sum_{k=0}^{N} \frac{(r/w_0)^{2k}}{k!}, \tag{6}$$

式中, w_0 为正的光束参数, N 为平顶高斯光束阶数。当 $N = 0$ 时, (6) 式简化为高斯光束的场分布表达式。为讨论方便, (6) 式中略去了对本文所讨论问题的结果并不重要的振幅因子。

在准单色近似下, 由(6)式得到 $z = 0$ 处的平顶高斯光束的交叉谱密度函数为

$$J(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = \exp(-r_1^2/w_0^2) \sum_{k=0}^{N} \frac{(r_1/w_0)^{2k}}{k!} \exp(-r_2^2/w_0^2) \sum_{k'=0}^{N} \frac{(r_2/w_0)^{2k'}}{k'!}. \tag{7}$$

将(2)、(3)和(7)式代入(5)式, 利用积分公式[14, 15]

$$\int_0^{2\pi} \exp(-\mathrm{i} l\theta) \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & l = 0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}, \tag{8}$$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-st) t^{\nu} \mathrm{d}t = \nu! s^{-\nu-1}, \tag{9}$$

经复杂的积分运算后可推导出平顶高斯光束的模相关系数的解析表达式为

$$\begin{aligned} \lambda_{pp'll'} = \lambda_{pp'00} = {} & \frac{\pi}{\alpha^2}\left[\sum_{k=0}^{N} \frac{p!}{k!(\alpha w_0)^{2k}} \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \frac{(m+k)!}{(p-m)!m!^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2 w_0^2}\right)^{-m-k-1}\right] \times \\ & \left[\sum_{k'=0}^{N} \frac{p'!}{k'!(\alpha w_0)^{2k'}} \sum_{m'=0}^{p'} (-1)^{m'} \frac{(m'+k')!}{(p'-m')!m'!^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2 w_0^2}\right)^{-m'-k'-1}\right] \times \\ \lambda_{pp'll'} = {} & 0 \qquad (l \neq l' \neq 0). \end{aligned} \tag{10}$$

3　平顶高斯光束的 M^2 因子

在(1)式中, 令 $r_1 = r_2 = r$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, 得到光强分布为

$$I(r) = J(r, \theta, r, \theta). \tag{11}$$

由于光强的二阶矩为

$$\sigma_r^2 = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} r^3 I(r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} I(r)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}. \tag{12}$$

将(2)、(3)式和(11)式代入(12)式，并利用拉盖尔函数的递推公式和正交归一化公式[14, 15]

$$(p'+1)\mathrm{L}_{p'+1}^{l}(z) - (2p'+l+1-z)\mathrm{L}_{p'}^{l}(z) + (p'+l)\mathrm{L}_{p'-1}^{l}(z) = 0, \tag{13}$$

$$\int_0^{+\infty} z^l e^{-z}\mathrm{L}_p^l(z)\mathrm{L}_{p'}^l(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+l+1)}{p!} & p = p', \\ 0 & p \neq p', \end{cases} \tag{14}$$

经计算得到空间域的光强二阶矩为

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{\alpha^2}\sum[(2p+l+1)C_{ppll} - \sqrt{(p+1)(p+l+1)}\,C_{p,\,p+1,\,ll}], \tag{15}$$

式中

$$C_{ppll} = \frac{\lambda_{ppll}}{\sum\lambda_{ppll}}, \qquad C_{p,\,p+1,\,ll} = \frac{\lambda_{p,\,p+1,\,ll}}{\sum\lambda_{ppll}} \tag{16}$$

为归一化模相关系数或称权重因子。在推导(15)式时，已设坐标原点位于光束重心，故光强一阶矩(即光束重心位置) $\bar{r} = 0$。

类似的计算得到空间频率域的光强二阶矩为

$$\sigma_k^2 = \alpha^2\sum[(2p+l+1)C_{ppll} + \sqrt{(p+1)(p+l+1)}\,C_{p,\,p+1,\,ll}]. \tag{17}$$

由 M^2 因子定义，(15) 和(17) 式得到考虑了各模式相关后 M^2 因子的推广公式为

$$M_r^2 = \sigma_r\sigma_k = \sqrt{[\sum(2p+l+1)C_{ppll}]^2 - [\sum\sqrt{(p+1)(p+l+1)}\,C_{p,\,p+1,\,ll}]^2}. \tag{18}$$

由(18)式可知，激光光束的 M^2 因子不仅与各模式的权重因子有关，而且还与第 p 和第 $p+1$ 阶模式之间的模相关系数权重因子有关。仅当 $C_{p,\,p+1,\,ll} = 0$，即各模式间不相关时

$$M_r^2 = \sum(2p+l+1)C_{ppll}, \tag{19}$$

这即由 Siegman 导出的 M^2 因子公式[16]。

对平顶高斯光束，在(7)式中，令 $r_1 = r_2 = r$，$\theta_1 = \theta_2 = \theta$，得到相应的光强分布为

$$I(r) = \exp(-2r^2/w_0^2)\sum_{k=0}^{N}\sum_{k'=0}^{N}\frac{(r/w_0)^{2k+2k'}}{k!\,k'!}. \tag{20}$$

经计算得到空间域的光强二阶矩 σ_r^2 和空间－频率域的光强二阶矩 σ_k^2 分别为

$$\sigma_r^2 = \frac{w_0^2}{2}\frac{R_N}{T_N}, \tag{21}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{2}{w_0^2}\frac{S_N}{T_N}, \tag{22}$$

式中

$$R_N = \sum_{k=0}^{N}\sum_{k'=0}^{N}\frac{k+k'+1}{2^{k+k'}}\begin{pmatrix} k+k' \\ k \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$T_N = \sum_{k=0}^{N}\sum_{k'=0}^{N}\frac{1}{2^{k+k'}}\begin{pmatrix} k+k' \\ k \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N}\sum_{k'=0}^{N}\sum_{m=0}^{k}\sum_{m'=0}^{k'}\frac{m+m'+1}{(-2)^{m+m'}}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+m' \\ m \end{pmatrix}. \tag{25}$$

由(21)和(22)式, 利用 M^2 因子定义, 得到柱坐标系下平顶高斯光束的 M^2 因子为

$$M^2 = \sigma_r\sigma_k = \frac{\sqrt{R_N S_N}}{T_N}. \tag{26}$$

由(23)~(26)式可以看出, 平顶高斯光束的 M^2 因子只与其阶数 N 有关。虽然, (26)式与文献[6]给出公式的形式不同, 但本文作者所进行大量的数值计算证实了二者所得结果是完全一致的。

4 平顶高斯光束的模分解

由于平顶高斯光束的 M^2 因子只与其阶数 N 有关, 因此, 可由(26)式求数值解得到平顶高斯光束的阶数 N。设其结果写为

$$N = f(M^2), \tag{27}$$

于是, 由(10)式可得到

$$\lambda_{pp00} = \frac{\pi}{\alpha^2}\Big[\sum_{k=0}^{N}\frac{p!}{k!(\alpha w_0)^{2k}}\sum_{m=0}^{p}(-1)^m\frac{(m+k)!}{(p-m)!m!^2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2 w_0^2}\Big)^{-m-k-1}\Big]^2, \tag{28}$$

$$\lambda_{p,p+1,00} = \frac{\pi}{\alpha^2}\Big[\sum_{k=0}^{N}\frac{p!}{k!(\alpha w_0)^{2k}}\sum_{m=0}^{p}(-1)^m\frac{(m+k)!}{(p-m)!m!^2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2 w_0^2}\Big)^{-m-k-1}\Big]\times$$
$$\Big[\sum_{k'=0}^{N}\frac{(p+1)!}{k'!(\alpha w_0)^{2k'}}\sum_{m'=0}^{p+1}(-1)^{m'}\frac{(m'+k')!}{(p+1-m')!m'!^2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2 w_0^2}\Big)^{-m'-k'-1}\Big]. \tag{29}$$

相应的权重因子为

$$C_{pp00} = \frac{\lambda_{pp00}}{\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\lambda_{pp00}}, \qquad C_{p,p+1,00} = \frac{\lambda_{p,p+1,00}}{\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\lambda_{pp00}}. \tag{30}$$

由以上分析可知, 在考虑模式相关性的一般情况下, 可将平顶高斯光束表示为空间相干拉盖尔-高斯模的叠加。进一步应用 M^2 因子概念, 可进行平顶高斯光束的模分解, 即由给定的 M^2 因子(例如, 由实验测得的值)并选取截断数, 如 $|C_{pp'00}| \geq 2\%$, 可求得振荡模式 p, 模相关系数 λ_{pp00} 和 $\lambda_{p,p+1,00}$, 以及相应的权重因子 C_{pp00} 和 $C_{p,p+1,00}$。具体的步骤为: 由给定的 M^2 因子和(26)式求得 N 值[即(27)式], 将 N 代入(28)~(30)式得到的 λ_{pp00}、$\lambda_{p,p+1,00}$、C_{pp00} 和 $C_{p,p+1,00}$ 代入(18)式令其自洽, 所得到的 λ_{pp00}、$\lambda_{p,p+1,00}$、C_{pp00} 和 $C_{p,p+1,00}$ 即为 M^2 因子给定值的平顶高斯光束的模相关系数和权重因子。数值计算例示于表 1。

Table 1. Some illustrative numerical examples for the coherence-mode decomposition of flattened Gaussian beams in cylindrical coordinates

M^2	p	C_{0000}/%	C_{0100}/%	C_{1100}/%	C_{1200}/%	C_{2200}/%	C_{3300}
1.1	0; 1	97.8	-4.7				
1.2	0; 1; 2	95.4	-8.6			3.0	
1.3	0; 1; 2	92.0	-16.0	2.8	3.4	4.2	
1.4	0; 1; 2	90.4	-17.1	3.2	4.0	4.9	
1.5	0; 1; 2	89.0	-18.9	4.0	4.5	5.2	
1.8	0; 1; 2; 3	80.2	-32.0	12.8	6.7	3.5	3.0

由表 1 可知, 平顶高斯光束不同模式间总是存在相关性, 且随着 M^2 因子的增大, 不同模式之间的相关性增加。同时, 不同模式的模相关系数可正可负。进一步由(18)和(30)式可知, 不同模式间的模相关系数的贡献是使 M^2 因子减小, 而与其值的正负无关。

当模式间不相关时，令

$$\lambda_{p,\,p+1,\,00} = 0, \tag{31}$$

由(26)、(28)~(30)式得

$$\lambda_{pp00} = \lambda_{0000} = \frac{\pi w_0^2}{2} \qquad (p = 0),$$

$$\lambda_{pp00} = 0 \qquad (p \neq 0), \tag{32}$$

$$M^2 = 1. \tag{33}$$

此时，对应于 $N = 0$ 的高斯光束情况。

结 论 本文从光场部分相干性理论和 M^2 因子的二阶矩定义出发，严格建立了平顶高斯光束的模分解理论。该理论的要点为：1) 平顶高斯光束的模相关系数为(10)式。它表明，仅有 $l = l' = 0$ 的模存在；2) 其 M^2 因子为(26)式，它仅与其阶数 N 有关，且随 N 的增加而增大；3) 基于(18)，(28)~(30)式，可进行平顶高斯光束的模分解，即由 M^2 因子可确定光束的模结构。计算表明，按本文的模分解理论，平顶高斯光束的空间横模总是相关的，即 $C_{p,\,p+1,\,00} \neq 0$。类似的工作可推广到直角坐标系。容易证明，这一重要结论在直角坐标系下也是成立的。国内外的研究工作表明，M^2 因子是一个很重要的光束参数，它不仅是一个传输不变量，而且可用来描述光束的传输行为，在某些应用中还可作为判断光束质量优劣的参数之一，具有重要的应用价值。因此，国内外对 M^2 因子概念和测量方法都作了很多研究，并研制成功了测量 M^2 因子的专门仪器。本文研究结果还表明，对 M^2 因子的研究，可深化对光束特性的认识，例如，由 M^2 因子可获得光束的模结构和模相关等重要信息。

作者曾就本文有关问题与德国柏林技术大学 Weber 教授和美国斯坦福大学 Nemes 博士进行了十分有益的讨论，在此一并致谢!

参 考 文 献

[1] Parent A, Morin M, Lavigne P. Propagation of super-Gaussian field distributions. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, **24**(9): 1071~1079

[2] Lü Baida, Zhang Bin, Wang Xiqing. Three-dimensional intensity distribution of focused super-Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1996, **126**(1~6): 1~6

[3] Gori F. Flattened Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1994, **107**(5, 6): 335~341

[4] Amarande S-A. Beam propagation factor and the kurtosis parameter of flattened Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1996, **129**(5, 6): 311~317

[5] Sheppard C J R, Saghafi S. Flattened light beams. *Opt. Commun.*, 1996, **132**(1, 2): 144~152

[6] Bagini V, Borghi R, Gori F *et al.*. Propagation of axially symmetric flattened Gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(7): 1385~1394

[7] Santarsiero M, Aiello D, Borghi R *et al.*. Intensity and phase distribution of focused flattened Gaussian beams. *Proc. SPIE*, 1996, **2870**: 288~296

[8] Santarsiero M, Aiello D, Borghi R *et al.*. Focusing of axially symmetric flattened Gaussian beams. *J. Mod. Opt.*, 1997, **44**(3): 633~650

[9] Du K M, Herziger G, Loosen P *et al.*. Coherence and intensity moments of laser light. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, **24**(9): 1081~1093

[10] Weber H. Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media. *Opt. & Quant.*

Electron., 1992, **24**(9) : 1027~ 1049

[11] Du K M, Herziger G, Loosen P *et al.*. Measurement of the mode coherence coefficients. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, **24**(9) : 1119~ 1127

[12] Du K M, Koh renz. *Polarization und Fluktuation von Laserstrahlung.* (Ph. D. thesis). Aachen: Verlag der Augustinus-Buchhandlung, 1992. 21~ 65

[13] Gamo H. *Matrix Treatment of Partial Coherence.* In: Wolf E ed. Progress in Optics, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1964. **3**. 187

[14] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F *et al.*. *Tables of Integral Transforms.* New York: McGraw-Hill, 1954.

[15] Gradshtein I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series, and Products.* New York: Academic, 1980.

[16] Siegman A E. New developments in laser resonators. *Proc. SPIE*, 1990, **1224** : 2~ 14

Mode Coherence Coefficients and Mode Decomposition Theory of Flattened Gaussian Beams

Zhang Bin　　Lü Baida　　Luo Shirong

(*Institute of Laser Physics & Chemistry*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064)

(Received 9 September 1998; revised 13 October 1998)

Abstract　By using the theory of partially coherent light, the analytical expression for the mode coherence cofficients of flattened Gaussian beams has been derived in the cylindrical coordinate system. Furthermore, based on the generalized M^2- factor of laser beams which was derived by the authors, the mode decomposition theory of flattened Gaussian beams has been built up.

Key words　flattened Gaussian beams, mode coherence cofficients, mode decomposition theory, M^2-factor.