

高 Q 克尔介质腔中依赖强度耦合的 J-C 模型中光场相位特性*

徐大海** 彭金生*** 田永红** 韩立波**
(华中师范大学物理系, 武汉 430070)

摘 要 应用 Pegg-Barnett 相位理论研究了被克尔介质包围的依赖强度耦合的 J-C 模型中光场相位演化特性, 结果发现, 原子-光场的耦合常数和克尔介质-光场的耦合常数将导致相位的涨落明显增大, 在原子初始处于非相干性激发时光场的频率也会发生漂移。

关键词 克尔介质, 相位特性, 依赖强度耦合的 J-C 模型。

1 引 言

近年来, 人们探讨了位于克尔介质的高 Q 腔中与光场发生单光子相互作用的二能级原子系统(即假设一个二能级原子处在克尔介质的包围之中)的特性^[1]; 讨论了在相干光场作用下, 原子和光场的量子特性, 结果表明, 克尔介质对原子的崩溃和回复有很强的影响, 光场和原子的偶极压缩效应发生明显变化^[2, 3]。

另一方面, 为了反映原子和光场耦合时系统对光场强度的依赖, Buck 和 Sukmar 提出了一个依赖强度耦合的 J-C 模型^[4], 其哈密顿量为

$$H = \omega a^\dagger a + \omega S_z + \epsilon(S_+ a \sqrt{a^\dagger a} + \sqrt{a^\dagger a} a^\dagger S_-), \quad (1)$$

式中 a^\dagger 和 a 为频率为 ω 的单模场的产生和湮灭算符; S_z 和 S_\pm 为原子的反转和跃迁算符, 其跃迁频率为 ω ; ϵ 为原子和场的耦合系数。研究表明, 该模型不仅可以精确求解, 而且还能展示许多光和原子相互作用的量子特性^[4-6]。早先作者曾研究过克尔介质对依赖强度耦合的 J-C 模型中光场和原子偶极压缩效应的影响^[7], 但克尔介质对依赖强度耦合的 J-C 模型中光场相位特性的影响如何, 还有待深入讨论, 本文将集中讨论这一问题。

本文将应用 Pegg-Barnett 相位理论^[8-10], 研究被克尔介质包围的依赖强度耦合的 J-C 模型中的光场相位随时间的演化规律, 并讨论克尔介质对光场相位的影响。结果将表明, 受克尔介质的影响, 光场的相位将随时间的演化而扩散, 在原子初始处于非激发相干时光场的频率也会发生漂移。

* 国家自然科学基金和湖北省教委自然科学基金资助项目。

** 现通信地址: 湖北省荆州师范学院物理系, 邮编 434104。

*** 中国高等科学技术中心(世界实验室)。

收稿日期: 1998-05-11; 收到修改稿日期: 1998-10-05

2 模型和态矢

考虑一个二能级原子处在一个充满克尔介质的良腔中, 二能级原子同腔场耦合, 克尔介质在绝热近似下与光场作用时可用非线性谐振子描述, 而二能级原子和光场的耦合依赖于光场强度, 在旋波近似下, 系统的哈密顿量 H 可写为

$$H = H_0 + V, \quad (2)$$

其中

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \omega_0 S_z, \quad (3)$$

$$V = \chi (a^\dagger)^2 a + \epsilon (S_+ a \sqrt{a^\dagger a} + \sqrt{a^\dagger a} a a^\dagger S_-). \quad (4)$$

式中 χ 是线性谐振子的强度, 它与克尔介质的三阶非线性极化率有关, 为了简单起见, 这里仅考虑共振的情况 ($\omega = \omega_0$)。若在初始时刻, 原子处于激发态 $|e\rangle$, 而光场制备于相干态 $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_n F_n |n\rangle, \quad F_n = \exp\left(-\frac{\bar{n}}{2}\right) \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} \exp(in\xi), \quad (5)$$

式中 \bar{n} 和 ξ 是光场初始时的平均光子数和初始激发方向, 于是系统在初始时刻的态矢为

$$|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |e\rangle, \quad (6)$$

随着时间的演化, 系统在 $t > 0$ 时刻的态矢为

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}t) (|\alpha\rangle \otimes |e\rangle) = \sum [a_n(t) |e, n\rangle + b_{n+1}(t) |g, n+1\rangle], \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n(t) &= \exp\left[-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega t - i\chi n^2 t\right] \left\{ F_n (\cos \mathcal{Y}(n)t + \frac{i\chi n}{\mathcal{Y}(n)} \sin \mathcal{Y}(n)t) \right\}, \\ b_{n+1}(t) &= \exp\left[-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega t - i\chi n^2 t\right] \left\{ -iF_n \frac{\epsilon(n+1)}{\mathcal{Y}(n)} \sin \mathcal{Y}(n)t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里

$$\mathcal{Y}(n) = [\chi^2 n^2 + \epsilon^2 (n+1)^2]^{1/2}. \quad (9)$$

代表原子拉比振荡频率, 可以看出克尔介质对拉比振荡频率的影响体现为 $\chi^2 n^2$, 从(9)式出发, 便可以讨论光场的相位随时间的演化规律。

3 光场相位随时间的演化

根据 Pegg-Barnett 的相位理论, 定义一组完备基矢^[8-10]

$$|\theta_m\rangle = (S+1)^{1/2} \sum_0^S \exp(in\theta_m) |n\rangle, \quad (10)$$

$$\theta_m = \theta_0 + 2\pi m / (S+1), \quad (m = 0, 1, 2, \dots, S) \quad (11)$$

式中 $(S+1)$ 为相位本征基矢张开的希伯空间的维数, θ 为参考相位, 光场的厄米相位算符定义为

$$\phi = \sum_0^S \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (12)$$

显然, $|\theta_m\rangle$ 和 θ_m 分别为相位算符 ϕ 的本征矢和本征值, 应用(7)和(9)式, 可以得到 $|\Psi(t)\rangle$ 状态下光场相位的概率分布函数为

$$P(\theta_m, t) = |\langle \theta_m | \Psi(t) \rangle|^2 = (S+1)^{-1} \left[\left| \sum_n a_n \exp(-in\theta_m) \right|^2 + \left| \sum_n b_{n+1} \exp(-in\theta_m) \right|^2 \right]. \quad (13)$$

如果考虑初始光场很强, 即 $\bar{n} \gg 1$, 则光子数的泊松分布可近似用高斯分布代替^[11, 12],

$$F_n \approx (2\pi\bar{n})^{-1/2} \exp\left[-(n-\bar{n})^2/4\bar{n}\right] \exp(in\xi). \quad (14)$$

$\mathcal{Y}(n)$ 可近似表示为

$$r(n) \approx r(\bar{n}) + \frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\mathcal{Y}(\bar{n})}(n - \bar{n}). \quad (15)$$

在连续谱的极限下, 即 $S \rightarrow \infty$ 时, θ_m 可用连续变量 θ 代替, 相应的求和可用积分代替, 经过计算可得:

$$p(\theta, t) = \frac{1}{4\mathcal{Y}^2(\bar{n})} \frac{2\pi}{s+1} \sqrt{\frac{4\bar{n}}{2\pi(1 + 16\bar{n}^2\chi^2 t^2)}} \left\{ \exp\left[\frac{-2\bar{n}}{(1 + 16\bar{n}^2\chi^2 t^2)}y^2\right]y_1 + \exp\left[\frac{-2\bar{n}}{(1 + 16\bar{n}^2\chi^2 t^2)}z^2\right]z_1 \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \xi - \omega - \theta - 2\bar{n}\chi t - \frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\mathcal{Y}(\bar{n})}t, \\ y_1 &= [\mathcal{Y}(\bar{n}) - \chi\bar{n}]^2 \left[1 + \frac{(\bar{n}\chi + \mathcal{Y}(\bar{n}))^2}{\epsilon^2(\bar{n} + 1)^2} \right], \\ z &= \xi - \omega - \theta - 2\bar{n}\chi t + \frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\mathcal{Y}(\bar{n})}t, \\ z_1 &= [\mathcal{Y}(\bar{n}) + \chi\bar{n}]^2 \left\{ 1 + \frac{[\bar{n}\chi - \mathcal{Y}(\bar{n})]^2}{\epsilon^2(\bar{n} + 1)^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

不难发现

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, t) \frac{s+1}{2\pi} d\theta = 1,$$

式中 $(s+1)/2\pi$ 为相位态密度^[8-10]。

对(16)式进行数值计算(为计算方便这里取 $\xi - \omega = 0$), 可以清楚地看到克尔介质对相位概率分布函数 $P(\theta)$ 的影响(图1~图3)。当 $\chi = 0$ 时相位分布曲线呈双峰结构(图1中的实线), 这与作者早先的结论是一致的^[13]; 而当 $\chi = 0.01$ 时曲线向左偏移, 高度明显下降(图1中的虚线); 随着 χ 值的不断增大, 曲线也不断地向左偏移, 峰的高度下降得更快(图2); 当 χ 增大到一定值时, 双峰结构变成单峰形式, 峰的高度也变得更小(图3)。

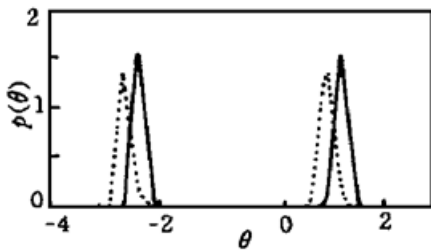


Fig. 1 Curves of evolution of $p(\theta)$, $\bar{n} = 15$, $\epsilon = 2.1$, solid line: $\chi = 0$, dashed line: $\chi = 0.01$

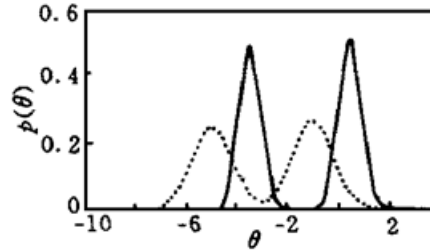


Fig. 2 Same as Fig. 1 but solid line: $\chi = 0.05$, dashed line: $\chi = 0.1$

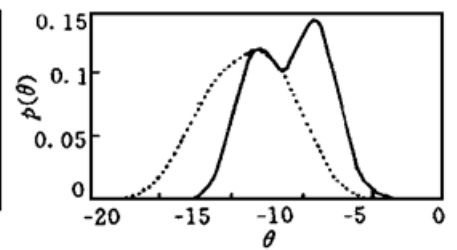


Fig. 3 Same as Fig. 1 but solid line: $\chi = 0.2$, dashed line: $\chi = 0.3$

利用(16)式可以求得连续极限下相位算符的平均值

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, t) \frac{s+1}{2\pi} \theta d\theta = \\ &\xi - \omega - 2\bar{n}\chi t + \frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\mathcal{Y}^2(\bar{n})}\chi\bar{n}t. \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式表明, 光场的相位平均值明显地依赖于光场与原子的耦合常数 ϵ 和光场与克尔介质的耦合常数 χ 及平均光子数 \bar{n} 等。值得注意的是早先作者在研究依赖强度耦合的 J-C 模型中场的相位特性时指出^[13]: 若原子初始处于非相干激发, 原子与场的相互作用并不影响相位平均值的变化; 但当考虑了克尔的作用以后, 结论就不同了。这是因为在克尔介质和原子与光场共同作用时, 不仅克尔介质对光场相位的平均值产生了影响, 原子也会受克尔介质的影响使光场相位的平均值发生变化。

3.1 克尔介质对光场相位涨落的影响

由(16)式还可以得到 Φ 的期待值为

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{4\bar{n}} + 4\bar{n}^{-2}\chi^2 t^2 + (\xi - \omega t - 2\bar{n}\chi t)^2 + 2(\xi - \omega t - 2\bar{n}\chi t) \frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\gamma^2(\bar{n})} \chi \bar{n} t + \left[\frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\gamma^2(\bar{n})} t \right]^2. \quad (19)$$

相应的相位涨落不难给出

$$\langle (\Delta\Phi)^2 \rangle = \langle \Phi^2 \rangle - \langle \Phi \rangle^2 = \frac{1}{4\bar{n}} + 4\bar{n}\chi^2 t^2 + \left[\frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\gamma^2(\bar{n})} t \right]^2 \left[1 - \frac{\bar{n}^2\chi^2}{\gamma^2(\bar{n})} \right]. \quad (20)$$

式中第一项表示相干态的相位涨落^[9], 而其余项代表原子和克尔介质与光场耦合对相位涨落的影响, 其结果使得光场的相位涨落随着时间的演化而增大。

若在(20)式中令 $\chi = 0$, 即仅考虑原子对光场相位涨落的影响, 则

$$\langle (\Delta\Phi)^2 \rangle = \frac{1}{4\bar{n}} + \epsilon t^2. \quad (21)$$

反之, 若在(20)式中令 $\epsilon = 0$, 即仅考虑克尔介质对光场相位涨落的影响, 则

$$\langle (\Delta\Phi)^2 \rangle = \frac{1}{4\bar{n}} + 4\bar{n}^{-2}\chi^2 t^2. \quad (22)$$

通过对(20)~(22)式的数值计算可以看到, 如图4, 无论哪种情况光场的相位涨落都随着时间的演化而明显增大。而克尔介质和原子与光场的共同作用, 使得光场相位涨落均大于二者单独对光场的影响(图4中的点划线所示), 但这种增大并不是(21)和(22)式的简单线性叠加, 而是呈非线性变化, 造成这种非线性增加的原因是原子与光场和克尔介质与光场的非线性相互作用。

利用(7)式还可以得到光子数的涨落为

$$\begin{aligned} \langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle (a^\dagger a)^2 \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 = \bar{n} + \frac{\epsilon^2(\bar{n} + 1)^2}{2\gamma^2(\bar{n})} + [1 - \frac{\epsilon^2(\bar{n} + 1)^2}{2\gamma^2(\bar{n})} - 2\beta(t) \exp[\beta^2(t)] \sin 2\gamma(\bar{n})t - \exp[\beta^2(t)] \cos 2\gamma(\bar{n})t + \{1 + \exp[\beta^2(t)] \cos 2\gamma(\bar{n})w(t)\}], \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$\beta(t) = \frac{\chi\bar{n} + (\bar{n} + 1)^2\epsilon}{\gamma(\bar{n})} 2\bar{n}t, \quad (24)$$

$$\omega(t) = \frac{\epsilon^2(\bar{n} + 1)^2}{\gamma^2(\bar{n})} \exp[\beta^2(t)] \cos 2\chi(\bar{n})t. \quad (25)$$

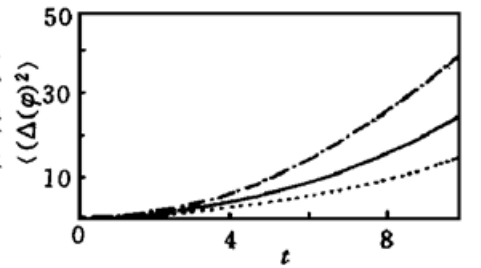


Fig. 4 Curves of evolution $\langle (\Delta\Phi)^2 \rangle$, $\bar{n} = 15$, dot-and-dash line: $\epsilon = 0.5$, $\chi = 0.05$, solid line: $\epsilon = 0.5$, $\chi = 0$, dashed line: $\epsilon = 0$, $\chi = 0.05$

结合(20)式可以得到

$$(\Delta N)^2 \Delta \Phi^2 > \frac{1}{4}, \quad (26)$$

这表明原子和克尔介质与光场的共同作用,使得光场不再保持光子数-相位最小不确定态。

3.2 克尔介质对光场频率的影响

由(18)式可知,当 $\chi = 0$,即只考虑原子对光场相位函数的影响,而忽略克尔介质的作用时

$$\Phi = \xi - \omega t, \quad (27)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\omega. \quad (28)$$

这一结果,与文献[14~16]的结论是一致的,但对作者所考虑模型而言,由(18)式可知

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\omega - (2\bar{n} - 1)\chi + \chi \left[\frac{\bar{n}\chi^2 + (\bar{n} + 1)\epsilon^2}{\gamma^2(\bar{n})} \frac{1}{\bar{n} - 1} \right]. \quad (29)$$

显然,(29)式第一项表示光场的本征频率,第二项表示仅存在克尔介质对光场作用而导致光场频率产生的漂移,第三项表示因克尔介质和原子与光场共同作用对光场频率产生的影响。

值得注意的是,早先作者在研究J-C模型中指出:只有原子初始处在激发相干时才会导致光场频率的漂移,对于初始处于非激发相干(基态或激发态)时,光场的频率不会发生漂移^[14~16]。而(28)式表明由于原子和克尔介质与光场的共同作用,使得原子处在激发态时也会引起光场频率的漂移,其原因在于克尔介质的作用,使得原子拉比振荡频率发生了变化,而正是这一变化的影响使得(28)式中的第三项不为0,导致光场的频率产生漂移。而产生漂移的原因不仅仅是克尔介质的单独贡献,原子亦会因克尔介质的影响使光场的频率产生漂移。

结 论 应用Pegg-Barnett相位理论,系统地研究了处于被克尔包围的依赖强度耦合的J-C模型中光场的相位性质,讨论了原子与光场的耦合系数 ϵ 以及克尔介质与光场的耦合数 χ 对光场相位的影响,结果表明,受克尔介质的影响,光场的相位涨落将随时间的演化而扩散,在原子初始处于非相干激发时光场的频率也会发生漂移。

作者感谢陶少华和王宏伟同志在数值计算上给予的热忱帮助。

参 考 文 献

- [1] Agarwal G S, Puri R R. Collapse and revival phenomenon in the evolution of a resonant field in Kerr-like medium. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(6): 316~ 3175
- [2] Kitagawa M, Yamamoto. Number-phase minimum-uncertainty state with reduced number uncertainty in a Kerr nonlinear interferometer. *Phys. Rev. (A)*, 1986, **34**(5): 3974~ 3988
- [3] Buzek V, Jex I. Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium. *Opt. Commun.*, 1990, **78**(5-6): 425~ 435
- [4] Gora P, Jerdazek C. Nonlinear Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9): 6816~ 6828
- [5] Buzek B, Sukmar C V. Exactly soluble model of atom-phonon coupling Showing periodic decay and revival. *Phys. Lett. (A)*, 1981, **81A**(2, 3): 132~ 135
- [6] Zhou P, Peng J S. Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Comings. *Models. J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(1): 49~ 62

- [7] Buzck V. Light squeezing in the Jaynes Cummings model with intensity-dependent coupling. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(9) : 1151~ 1162
- [8] 徐大海, 彭金生. Kerr 效应对依赖强度耦合的 J-C 模型中光场和原子偶极压缩效应的影响. *中国激光*, 1994, **21**(10) : 815~ 820
- [9] Pegg D F, Barnett S M. Unitary phase operator in quantum mechanics. *Europhys. Lett.*, 1988, **6**(6) : 483~ 487
- [10] Barnett S M, Pegg D T. On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1) : 7~ 19
- [11] Pegg D T, Barnett S M. Phase properties of the quantized. Single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(3) : 1665~ 1675
- [12] Cantsog T, Tanas R. Phase properties of self-squeezed states generated by the anharmonic oscillator. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(6) : 1021~ 1034
- [13] Ganstong T, Tanas R. Phase properties of a damped anharmonic oscillator. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(3) : 2086~ 2098
- [14] 周 鹏, 彭金生. 依赖强度耦合 J-C 模型中场的相位特性. *光学学报*, 1993, **13**(5) : 444~ 449
- [15] 李高翔, 彭金生. 旋波近似和非旋波近似下 Jaynes-Cummings 模型中光场的位相涨落. *物理学报*, 1992, **41**(5) : 766~ 772
- [16] Peng J S, Li G X. Phase fluctuations. in the Jaynes-Cumming model with and without the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(5) : 3289~ 3293
- [17] Meng H X, Chai C L. Phase properties of the coherent light in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett. (A)*, 1991, **155**(8-9) : 500~ 505

Phase Properties of the Field in the Intensity-Dependent Coupling Jaynes-Cummings Model in a High- Q Cavity Filled with a Kerr-Like Medium

Xu Dahai Peng Jinsheng Tian Yonghong Han Libo
(*Department of Physics Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)
(Received 11 May 1998; revised 5 October 1998)

Abstract The properties of phase evolution of light in the intensity-dependent coupling Jaynes-Cummings model with surrounded Kerr medium are investigated by using the pegg-Barnett phase theory. The results show that the atom-field coupling constant ϵ and Kerr medium-field coupling constant χ will lead to increasing phase quantum fluctuations of light, and the frequency of the field will shift when atom is initially at the non-coherent excited state.

Key words Kerr medium, phase property, intensity-dependent coupling Jaynes-Cummings model.