第 20 卷　第 1 期　　光　学　学　报　　Vol. 20, No. 1
2000 年 1 月　　ACTA OPTICA SINICA　　January, 2000

利用原子–腔场的拉曼相互作用制备双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态*

宋克慧
(怀化师范高等专科学校物理系, 怀化 418008)

摘　要　利用一个参量频率转换过程, 在腔中制备双模 $SU(2)$ 相干态, 然后注入一个与腔场的一个模发生拉曼相互作用的 Λ 型三能级原子, 通过原子–腔场相互作用生成腔场–原子纠缠, 通过对原子进行选择性测量, 腔场–原子纠缠态将塌缩到纯态, 即双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态。

关键词　双模 $SU(2)$ 相干态,　拉曼相互作用,　原子选择性测量,　塌缩,　双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态。

1　引　　言

近几年来, 人们对制备宏观上可区分的量子态的叠加态, 亦即薛定谔猫态[1]产生了极大的兴趣。由于叠加所引起的量子干涉效应使得这种态呈现出压缩和亚泊松分布等非经典性质[2~5], 因此人们利用各种方法制备了单模光场的薛定谔猫态[6~10]。不久前, Chai[11]将薛定谔猫态推广到双模情况, 研究了双模相干态的叠加态, 这种态在一定条件下, 能够呈现双模压缩、对 Cauchy-Schwarz 不等式的违背、光子数的亚泊松分布等许多非经典性质, 因此也吸引了许多作者研究如何制备这种态[12~14]。特别值得一提的是, 1996 年 Monroe 等人报道了用激光把囚禁的 $9Be^+$ 离子冷却到零点能, 通过一系列激光脉冲得到空间分离的相干谐振叠加态, 通过叠加态与 $9Be^+$ 离子内态与外态相互纠缠构成纠缠态, 最后通过量子力学干涉仪检测到具有两个确定位置的波包, 从而从实验上获得了薛定谔猫态[15]。近来, Gerry 等人利用 Ξ 型三能级原子与双模腔场的一个模发生非共振相互作用制备了 $SU(1, 1)$ 和 $SU(2)$ 薛定谔猫态[13], 并且较详细地研究了这种双模相干叠加态的非经典性质。

我们在此提出一种基于 Λ 型三能级原子与腔场的一个模发生拉曼相互作用以制备双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态的方案, 与 Gerry 等人的方案比较, 在我们的方案中, 因利用了 Λ 型三能级原子的两个低能态, 从而克服了原子本身的自发辐射而带来的能量耗散等问题。

2　原子–腔场的拉曼耦合过程及其相互作用的时间演化的描述

2.1　腔中双模 $SU(2)$ 相干态的制备及表述

$SU(2)$ 相干态定义为[16]

---

*　湖南省教委青年骨干教师基金和国内访问学者基金资助课题。

收稿日期: 1998-07-21; 收到修改稿日期: 1998-10-19

$$|\xi, j\rangle = \exp(\beta J_+ - \beta^* J_-)|j, -j\rangle, \tag{1}$$

式中，
$$\beta = \gamma \exp(-\mathrm{i}\Psi), \qquad (0 \leqslant \gamma \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \Psi \leqslant 2\pi),$$
$$\xi = \tan(\gamma/2)\exp(-\mathrm{i}\Psi).$$

若用福克(Fock)态表示，则为

$$|\xi, j\rangle = (1 + |\xi|^2)^{-j/2}\sum_{n=0}^{N}\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}^{1/2}\xi^n|n, N-n\rangle, \tag{2}$$

式中 $N = n_a + n_b$ 为两模的总光子数，其中 a 模的光子数为 $n_a = n$，b 模的光子数为 $n_b = N - n$。而 $j = \frac{1}{2}(n_a + n_b) = \frac{1}{2}N$。在(1)式中 J_+ 和 J_- 由双模玻色算符给出

$$J_+ \equiv a^+ b, \qquad J_- \equiv ab^+, \tag{3}$$

引入另一算符

$$J_3 \equiv \frac{1}{2}(a^+ a - b^+ b), \tag{4}$$

式中 $a(a^+)$ 和 $b(b^+)$ 分别为 a 模和 b 模的湮灭(产生)算符，算符 $J_\pm$、J_3 满足如下的对易关系

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \qquad [J_+, J_-] = 2J_3. \tag{5}$$

$SU(2)$ 相干态可由一个参量频率转换过程进行制备，这一过程的哈密顿算符[13]为

$$H_I = \mathrm{i}\lambda(ab^+ - a^+ b), \tag{6}$$

但双模光场的初始态应处于 $|0, N\rangle$ 态，即一个模处于真空态，而另一个模则处于具有 N 个光子的福克态。

还可以利用 Deb 等人[17]提供的方法在腔中制备双模 $SU(2)$ 相干态。

2.2 Λ 型三能级原子与腔场的一个模耦合的描述

假设腔是具有频率为 ω_a 和 ω_b 的双模腔，而从腔外注入的原子是 Λ 型三能级原子，假设三能级原子仅仅只与模 a 耦合，那么这种腔场耦合系统的哈密顿算符为[18]

$$H = \omega_a a^+ a + \omega_f|f\rangle\langle f| + \omega_0(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) + g_1(a^+|g\rangle\langle f| + a|f\rangle\langle g|) + g_2(a^+|e\rangle\langle f| + a|f\rangle\langle e|), \tag{7}$$

式中 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 是三能级原子的两个退化的低能态，而 $|f\rangle$ 是高能态，a^+ 和 a 是腔模 a 的产生和湮灭算符，$g_1(g_2)$ 是原子在 $|f\rangle$ 和 $|g\rangle(|e\rangle)$ 跃迁与腔模 a 的耦合常数，ω_0 和 ω_f 分别是两个低能态和高能态的能量(假设 $\hbar = 1$)。假设高能态与低能态之间的转移频率与腔模 a 的频率 ω_a 高度失谐，此时高能态 $|f\rangle$ 可被绝热地消去，那么这种系统的相互作用可用如下有效哈密顿描述[18]

$$H_{\mathrm{eff}} = -\lambda a^+ a(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) - a^+ a(\beta_1|g\rangle\langle g| + \beta_2|e\rangle\langle e|), \tag{8}$$

式中

$$\lambda = \frac{g_1 g_2}{\Delta}, \qquad \beta_1 = \frac{g_1^2}{\Delta}, \qquad \beta_2 = \frac{g_2^2}{\Delta}, \qquad \Delta = (\omega_f - \omega_0) - \omega_a. \tag{9}$$

参数 β_1 和 β_2 分别描述了能级 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 强度依赖的斯塔克移位，Δ 为失谐量。在下面为了简化计算，假设 $g_1 = g_2 = g$，从而 $\lambda = \beta_1 = \beta_2 = g^2/\Delta$。

2.3 Λ 型三能级原子与腔场相互作用的时间演化

现在假设腔场已制备成(2)式所表示的双模 $SU(2)$ 相干态，通过一个经典场将三能级原子制备在两个低能态 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 的相干叠加态[8]

$$|\Psi_a(0)\rangle = N(|e\rangle + \gamma|g\rangle), \tag{10}$$

式中 N 为归一化因子，即 $N=(1+|\gamma|^2)^{-1/2}$，而 γ 为复数。把该原子注入腔中，这时原子–腔场系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle_{a\text{-}f}=N(|e\rangle+\gamma|g\rangle)\otimes|\xi,j\rangle, \tag{11}$$

式中⊗表示直积。在相互作用绘景中，原子–腔场系统的态矢满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}|\Psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t}=H_{\mathrm{eff}}|\Psi(t)\rangle, \tag{12}$$

$|\Psi(t)\rangle$ 由下式给出

$$|\Psi(t)\rangle=\exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{eff}}t)|\Psi(0)\rangle_{a\text{-}f}, \tag{13}$$

根据文献[18]，设 $|\Psi(t)\rangle$ 的形式为

$$|\Psi(t)\rangle=c_g^n(t)|g\rangle|\xi,j\rangle+c_e^n(t)|e\rangle|\xi,j\rangle, \tag{14}$$

其中

$$c_g^n(t)=N[\gamma D_1^n(t)+D_2^n(t)], \tag{15}$$

$$c_e^n(t)=N[\gamma D_2^n(t)+D_3^n(t)], \tag{16}$$

(15) 式和(16) 式中 $D_i^n(t)\,(i=1,2,3)$ 分别为

$$D_1^n(t)=\frac{1}{2}\left[1+\exp\left(\frac{\mathrm{i}n2g^2}{\Delta}t\right)\right], \tag{17}$$

$$D_2^n(t)=\frac{1}{2}\left[-1+\exp\left(\frac{\mathrm{i}n2g^2}{\Delta}t\right)\right], \tag{18}$$

$$D_3^n(t)=\frac{1}{2}\left[1+\exp\left(\frac{\mathrm{i}n2g^2}{\Delta}t\right)\right], \tag{19}$$

将(17)～(19) 式代入(15) 式和(16) 式，求出 $c_g^n(t)$ 和 $c_e^n(t)$ 后再代入(14) 式，得到

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle=N'\{&[(\gamma-1)|\xi,j\rangle+(\gamma+1)|\xi\exp(2\mathrm{i}g^2t/\Delta),j\rangle]|g\rangle-\\&[(\gamma-1)|\xi,j\rangle-(\gamma+1)|\xi\exp(2\mathrm{i}g^2t/\Delta),j\rangle]|e\rangle\},\end{aligned} \tag{20}$$

其中 N' 为归一化因子。在上面的计算中考虑到了(2) 式所示的 $SU(2)$ 相干态在福克态的表示，于是便获得了系统在 t 时刻的态矢，即原子–腔场的纠缠。

3　通过原子的选择性测量制备双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态

为了获得双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态，在 t 时刻，对原子进行选择测量，若发现并找到原子处在态 $|g\rangle$，根据波包塌缩原理，$|\Psi(t)\rangle$ 将塌缩到如下的纯态

$$|\Psi(t)\rangle_f=N_g[(\gamma-1)|\xi,j\rangle+(\gamma+1)|\xi\exp(2\mathrm{i}g^2t/\Delta),j\rangle], \tag{21}$$

同样，若探测到原子处于态 $|e\rangle$，得到如下的态

$$|\Psi(t)\rangle_f'=N_e[(\gamma-1)|\xi,j\rangle-(\gamma+1)|\xi\exp(2\mathrm{i}g^2t/\Delta),j\rangle], \tag{22}$$

在上两式中，N_g 和 N_e 为归一化因子。可以通过调节经典场以控制原子的速度，使下式成立

$$t=\frac{\Delta}{g^2}\frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

则由(21) 式和(22) 式，便获得如下形式的两元素的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态

$$|\Psi(t)\rangle_f=N_g[(\gamma-1)|\xi,j\rangle+(\gamma+1)|-\xi,j\rangle], \tag{24}$$

以及

$$|\Psi(t)\rangle_f'=N_e[(\gamma-1)|\xi,j\rangle-(\gamma+1)|-\xi,j\rangle], \tag{25}$$

为了获得三元素的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态，把第二个原子按(10) 式的方式注入腔中，假设此时腔场已塌缩到(21) 式所表示的态，按照上面完全相同的过程，我们获得如下形式的三

元素的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态

$$|\Psi(t+t)\rangle = N_g'[(\gamma-1)^2|\xi, j\rangle + 2(\gamma-1)(\gamma+1)|\xi\exp(2ig^2t/\Delta), j\rangle + (\gamma+1)^2|\xi\exp(4ig^2t/\Delta), j\rangle], \tag{26}$$

同样, 对(22)式, 可以得到

$$|\Psi'(t+t)\rangle = N_e'[(\gamma-1)^2|\xi, j\rangle - 2(\gamma-1)(\gamma+1)|\xi\exp(2ig^2t/\Delta), j\rangle + (\gamma+1)^2|\xi\exp(4ig^2t/\Delta), j\rangle], \tag{27}$$

其中 N_g' 和 N_e' 为归一化因子。

不失一般性, 要获得 n 元素的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态, 可以将适当制备的 $n-1$ 个 Λ 型三能级原子先后注入腔中, 经过与腔场相互作用后, 对每个原子进行探测, 就可以获得如下形式的 n 元素的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态

$$|\Psi(t+t+\cdots+t)\rangle = N\sum_{k=0}^{n-1} C_k(\gamma)|\xi\exp(2ikg^2t/\Delta), j\rangle, \tag{28}$$

上式中的函数 $C_k(\gamma)(k=0, 1, \cdots, n-1)$ 是复变量 γ 的函数, 且与 N 满足如下关系

$$N^2\sum_{k=0}^{n-1}|C_k(\gamma)|^2 = 1, \tag{29}$$

而且各元素的权重可通过 γ 因子来调节。

结　语　通过 Λ 型三能级原子与腔场的一个模发生拉曼相互作用从而制备了双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态, 此方案有如下优越之处:

1) 可以由此方案制备多元素的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态, 而且各元素的权重可以通过调节经典场由 γ 来控制;

2) 由此方法制备的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态, 各元素的相位因子可以通过调节原子的速度和调节高能态与低能态的转移频率与模 a 的频率的失谐量 Δ 来调节, 从而可以获得所需相位因子的双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态;

3) 此方案只利用了 Λ 型三能级原子的两个低能态, 从而可以避免由于原子处于高能态而自发辐射所带来的能量的耗散。

关于双模 $SU(2)$ 薛定谔猫态的若干非经典性质, 文献[13]已作了较详细的研究, 我们在此不加赘述。

衷心感谢郭光灿教授的悉心指导。

参 考 文 献

[1] Schrodinger E. Die gegenwa:rfige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 1935, **23**: 807~812

[2] Yurke B, Stoler D. Generating quantum mechanical superposition of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(1): 13~16

[3] Xia Y, Guo G. Nonclassical properties of even and odd coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1989, **136**(6): 281~283

[4] Janszky J, Vinogradov A V. Squeezing via one-dimensional distribution of coherent states. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(23): 2771~2774

[5] Foldesi I, Adam P, Janszky J. Antisymmetric straight line superposition of coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1993, **173**(2): 97~100

[6] Brune M, Haroche S, Raimond J M *et al*.. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurement and generation of "Schr dinger cat" states. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **45**(7): 5193~5213

[7] Garraway B M, Sherman B, Moya-Cessa H *et al*.. Generation and detection of nonclassical field by conditional measurements following two-photon resonant interactions. *Phys. Rev.* (*A*), 1994, **49**(1): 525~547

[8] Davidovich L, Maali A, Brune M *et al*.. Quantum switches and nonlocal microwave fields. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**(15): 2360~2363

[9] Zheng S B, Guo G C. A method for generating Schr dinger cat states with controllable components. *Opt. Commun.*, 1997, **138**(1): 317~319

[10] Guo G C, Zheng S B. Generation of Schr dinger cat state via the Jaynes-Cummings model with large detuning. *Phys. Lett.* (*A*), 1996, **223**(2): 332~336

[11] Chai C. Two-mode nonclassical state via superpositions of two-mode coherent states. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **46**(11): 7187~7191

[12] Zheng S B, Guo G C. Preparation of correlated two-mode Schr dinger cat states via the atomic interference method. *Opt. Commun.*, 1997, **137**(5): 308~310

[13] Gerry C C, Grobe R. Two-mode $SU(2)$ and $SU(1, 1)$ Schr dinger cat states. *J. Mod. Opt.*, 1997, **44**(1): 41~53

[14] 宋克慧, 郭光灿. 利用 Ξ 型三能级原子双模光场的非共振相互作用制备双模 Schr dinger 猫态. 物理学报, 1998, **47**(9): 1477~1480

[15] Monroe C, Meekhof D M, King B E *et al*.. A "Schr dinger cat" superposition state of an atom. *Science*, 1996, **272**(5265): 1131~1136

[16] Wodkiewicz K, Eberly J H. Coherent states, squeezed fluctuations, and su(2) and su(1, 1) groups in quantum-optics applications. *J. Opt. Soc. Am.* (*B*), 1985, **2**(3): 485~466

[17] Deb B, Gangopadhyay G, Ray D S. Generation of a class of arbitrary two-mode field states in a cavity. *Phys. Rev.* (*A*), 1995, **51**(3): 2651~2653

[18] Xu L, Zhang Z M. Modified effective Hamiltonian for degenerate Raman process. *Z. Phys.* (*B*), 1994, **95**(4): 507~510

Preparation of Two-Mode $SU(2)$ Schr dinger Cat States via Atom-Cavity-Field Raman Interaction*

Song Kehui

(*Department of Physics, Huaihua Teacher's College, Huaihua* 418008)

(Received 21 July 1998; revised 19 October 1998)

Abstract Two-mode $SU(2)$ coherent state of the cavity is prepared by a parametric frequency conversion process. Then atom-cavity-field entanglement is created by atom-field Raman interaction, and atom-field state collapses into two-mode $SU(2)$ Schr dinger cat states through atomic selective measurement.

Key words two-mode $SU(2)$ coherent state, the Raman interaction, atomic selective measurement, collapse, two-mode $SU(2)$ Schr dinger cat state.

* This work was supported by the Young Core Instructor and Domestic Visitor Foundation of the Education Committee of Hunan Province.