

双压电变形反射镜的优化设计*

杨 强** 朱建平 曹根瑞

(北京理工大学光电工程系, 北京 100081)

摘 要 利用 Kokorowski 导出的自由边界条件下双压电变形镜表面位移-电压所满足的偏微分方程, 运用高斯迭代法求解该方程, 得出变形镜的静态响应函数矩阵 $f(r, \theta)$ 。考虑到由大气湍流造成的光学波前畸变中各泽尼克(Zernike)基元模式的统计权重分布, 以及变形镜的实际装夹定位方式, 对双压电变形反射镜的优化设计进行了分析。结果表明: 变形镜的校正能力随被校正的各项泽尼克模式像差在大气湍流造成的波前畸变中所占统计权重的不同而有很大的差别, 其优化设计结果也随之而变; 变形镜的定位方式对其校正能力有一定的影响, 但影响不大。

关键词 自适应光学, 变形反射镜, 优化设计, 响应函数矩阵。

1 引 言

变形反射镜(通常也称之为波前校正器)是自适应光学系统中的核心器件之一, 它具有能可控地改变其反射波前相位畸变的特点。目前国内外用得比较普遍的分立式压电变形镜具有灵敏度高、校正自由度多、动态范围大等优点, 但造价昂贵, 结构复杂, 加之随着控制电极的增多, 信号处理电路也变得复杂, 导致整个系统的响应速度变慢。相比之下双压电变形镜具有工作电压低、动态范围大、结构简单、造价低廉以及在和曲率波前传感器配合使用的情况下系统响应速度快等优点。不足之处是它只适合于校正低阶像差, 但在多数情况下, 这已能满足使用要求, 因此仍有广阔的应用前景。

双压电变形镜的优化设计工作目前在国外初见报道^[1~3]。本文研究的重点是针对大气湍流造成的光学波前畸变中各泽尼克基元模式统计权重的不同, 以及变形镜的实际装夹定位方式不同, 对优化设计作更深入的研究和探讨。

2 双压电变形镜的工作原理

利用压电体的逆压电效应, 把两个沿旋转对称轴方向极化的圆片形压电材料以相反的极化方向粘到一起构成一双压电片变形镜, 当在圆片的两侧加电压时, 横向压电效应将使两个粘成一体的圆片朝相反的方向弯曲, 如图 1 所示。Kokorowski 导出了决定这种双压电变形镜

* 本课题得到国家科委 863 高科技项目部分支持。

** 现工作单位: 钢铁研究总院工艺研究所, 北京 100081。

收稿日期: 1998-04-07; 收到修改稿日期: 1998-07-14

的变形量与所加电压之间满足的微分方程^[4]:

$$\nabla^2 w(x, y) = -4V(x, y)/ah^2 \tag{1}$$

其中 $V(x, y)$ 为变形镜上所加的电压, h 为薄圆片的厚度, a 为和压电材料有关的常数, $w(x, y)$ 为圆片表面上点 (x, y) 处的法向位移, ∇^2 是二维拉普拉斯算子。同时存在的纵向逆压电效应也将导致薄圆片在厚度方向发生变化, 但在圆盘直径远大于圆盘厚度 h 的情况下, 该变化和 $w(x, y)$ 相比可以忽略不计。

图 2 所示为控制电极的分布图。图中电极 1~ 7 与镜面的有效通光口径相对应; 电极 8~ 13 在有效通光口径之外, 用以控制有效通光口径的边界条件。把该器件固定于半径为 R_3 的圆周上, 当各电极加上一定电压而使表面变形时, 变形量的计算问题就成为求解上述泊松 (Poisson) 方程的第一边值问题。不难通过求解极坐标形式下的泊松方程得到镜面上 (r, θ)

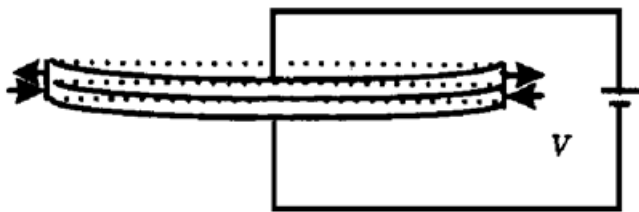


Fig. 1 Principle of bimorph deformable mirror



Fig. 2 Electrode pattern of 13-segment bimorph deformable mirror

处的法向位移与电压的关系:

$$\left. \begin{aligned} w(r, \theta)_{rr} + w(r, \theta)_{r/r} + w(r, \theta)_{\theta\theta}/r^2 &= -4V(r, \theta)/ah^2 \\ V(r, \theta) &= V_0, \quad R_i < r < R_j, \theta_k < \theta < \theta_l; \text{对电极 1 有 } 0 < r < R_1, 0 < \theta < 2\pi \\ w(r, \theta) &= 0, \quad r = R_3 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

这里假设 a 和 h 为已知常数, 其中 $i < j; i, j = 1, 2, 3; k, l$ 满足 $(\theta_k - \theta_l) = \pi/3$ 。以下分析两种特殊情况:

1) 当在 13 个电极上同时加电压 V 时, 求解上述泊松方程的第一边值问题可以得到^[5]:

$$w_a(x, y) = \frac{V}{ah^2}(R_3^2 - \rho^2), \tag{3}$$

其中 $\rho^2 = x^2 + y^2$ 。

2) 在第一个电极上加电压 V , 而其它电极电压均为 0 时, 作二级近似, 解上述方程得到:

$$w_b(x, y) = \begin{cases} \frac{V}{ah^2}[(R_1^2 - \rho^2) + 2R_1^2 \ln \frac{R_3}{R_1}], & (0 \leq \rho \leq R_1) \\ -\frac{2VR_1^2}{ah^2} \ln \frac{\rho}{R_3}, & (R_1 < \rho \leq R_3) \end{cases} \tag{4}$$

当对电极 2~ 13 逐个施加电压时, 很难给出上述泊松方程的解析解, 但可以用高斯迭代法求解^[5]。图 3 所示为运用该算法得到的 13 幅当电压分别作用于图 2 所示的各电极时变形镜的变形图。

考虑到用泽尼克多项式表示和分析光学零件面形误差或光学系统波像差的方法已被广泛应用, 因此以图 3 所示的用高斯迭代法求得各电极在单位电压作用下所引起的镜面变形函数或响应函数 $f_1(r, \theta), f_2(r, \theta), \dots, f_{13}(r, \theta)$ 为基底, 在 $\rho \leq R_2$ (变形镜的有效工作口径)

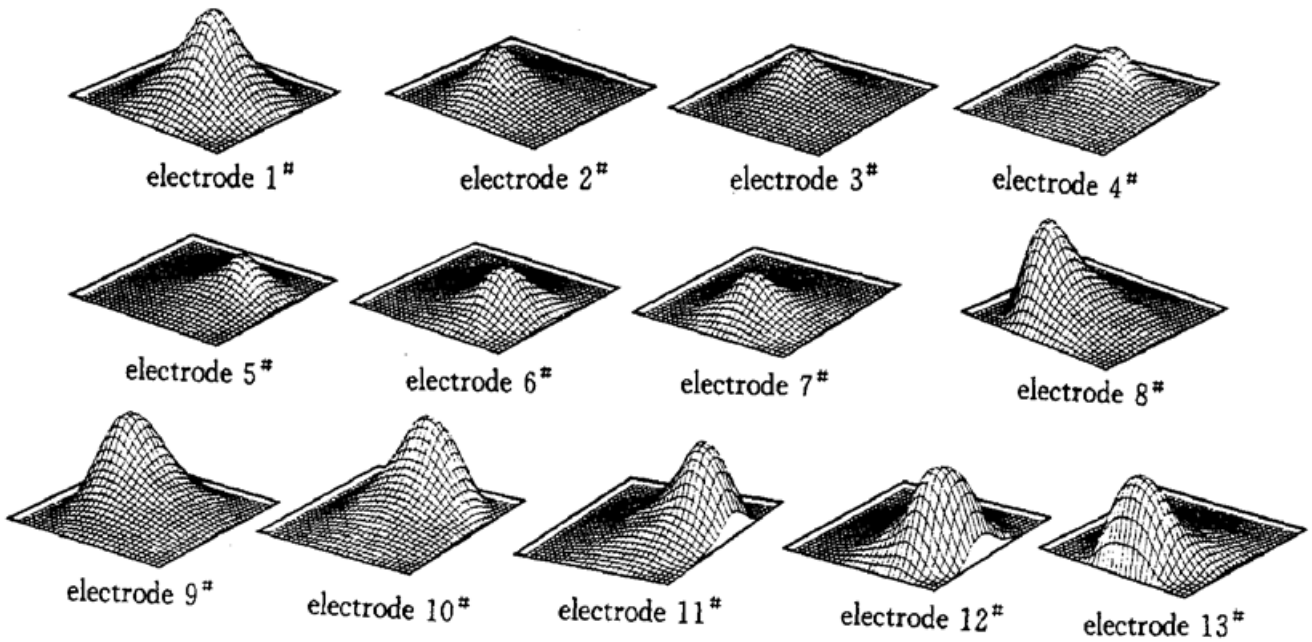


Fig. 3 The deformation profiles responded for each electrode actuation of bimorph mirror calculated by Gaussian iteration algorithm

范围内, 对泽尼克多项式前 8 项(或更多项) 基元波面(倾斜 $-X$ 、 Y ; 离焦; 像散 $-X$ 、 Y ; 纯彗差 $-X$ 、 Y ; 球差) 逐项进行最小二乘拟合, 便可得出欲使变形镜分别产生泽尼克基元波面形式的变形时应施加的控制电压系数矩阵, 以便作为控制变形镜工作的一组基本数据备用。为此, 首先可写出:

$$V_{i,1}f_1(r, \theta) + V_{i,2}f_2(r, \theta) + \dots + V_{i,13}f_{13}(r, \theta) = z_i(r, \theta) \tag{5}$$

这里取 $i = 1 \dots 8$, $V_{i,1} \dots V_{i,13}$ 为拟合第 i 项泽尼克基元波面时各电极应施加的电压系数。显然 (5) 式为一超定方程组。记拟合第 i 项泽尼克基元波面时的波前残差的方差为:

$$\Phi(i) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \{z_i(r_k, \theta_l) - \sum_{j=1}^{13} V_{i,j}f_j(r_k, \theta_l)\}^2 \tag{6}$$

式中 $m \times m$ 为响应函数 f_j 的采样点数。以 $V_{i,j}$ 作自变量, 当满足最小二乘拟合条件时, 应有:

$$\frac{\partial \Phi(i)}{\partial V_{i,t}} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m 2 \left[\sum_{j=1}^{13} V_{i,j}f_j(r_k, \theta_l) - z_i(r_k, \theta_l) \right] f_t(r_k, \theta_l) = 0 \tag{7}$$

当 t 取尽 1~ 13 里所有自然数时, 即可得到用以产生各泽尼克基元波面的控制电压矩阵表达式:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{F}]_{13 \times 13}^{-1} [\mathbf{Z}'_{i,1} \mathbf{Z}'_{i,2} \dots \mathbf{Z}'_{i,13}]^T \tag{8}$$

其中 $[\mathbf{F}]_{13 \times 13}$ 和 $\mathbf{Z}'_{i,t}$ 的求法可参考文献[5]。

3 控制电极的优化

控制电极划分的形式不同可得到不同的响应函数组 $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{13}\}$, 以此为基底分别最小二乘拟合泽尼克多项式的前 n 项时将得到不同的拟合残差的方差值。同时, 考虑到大气湍流造成的波前畸变中各项基元波面所占的比重是不同的。Noll 根据大气湍流的柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)模型, 建立了用泽尼克多项式表示的大气湍流造成的波前相位畸变的数学模型并给出当前 n 项像差已得到校正后, 残余波前相位畸变的方差为^[6]:

$$\sigma_\phi^2 = \langle \Phi \rangle - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \tag{9}$$

式中 $\langle \Phi \rangle$ 表示大气湍流造成波前位相畸变方差的系综平均值, a_i 为以泽尼克多项式表示大气湍流畸变波前时第 “ i ” 项泽尼克模式像差的系数。当 $n > 10$ 时, (9) 式可近似为:

$$\sigma_{\Phi}^2 \approx 0.294n^{-\sqrt{3}/2}(D/r_0)^{5/3} \quad (10)$$

式中 D 为被考察波前的直径, r_0 为大气相干长度。

表 1 列出了大气湍流波前相位畸变中, 前 n 项泽尼克模式像差得到校正后的残余波前相位方差值(当 $D/r_0 = 1$ 时)。例如表中 $n = 1$ 时所对应的 $\sigma_{\Phi}^2 = 1.030$ (rad^2) 就表示常数项或称活塞项模式像差得到校正后的残余位相方差。表中前项与后项所对应的相位方差值之差就代表了前一项泽尼克模式相位畸变的方差。例如表中第二项($n = 2$) 与第三项($n = 3$) 之差 $\sigma_{\Phi_2}^2 - \sigma_{\Phi_3}^2 = 0.582 - 0.134 = 0.448$ (rad^2) 就代表了第二项, 即波前在 y 方向的倾斜所造成的相位方差。因此可按下式定义大气湍流所造成的波前畸变中各项泽尼克模式像差所占的比重:

$$A_i = \sqrt{\frac{\sigma_{\Phi_j}^2 - \sigma_{\Phi_{j+1}}^2}{\sigma_{\Phi_1}^2}}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

Table 1. The residual error for Zernike polynomials and Kolmogrov turbulence

n	$\sigma_{\Phi}^2/\text{rad}^2$	n	$\sigma_{\Phi}^2/\text{rad}^2$	n	$\sigma_{\Phi}^2/\text{rad}^2$	n	$\sigma_{\Phi}^2/\text{rad}^2$
1	1.030	5	0.088	9	0.046	13	0.033
2	0.582	6	0.065	10	0.040	14	0.031
3	0.134	7	0.059	11	0.038	15	0.028
4	0.111	8	0.053	12	0.035	16	0.027

为了更切合实际地评价变形镜用于校正大气湍流所造成的波前畸变的能力, 根据大气湍流造成的波前畸变中各项泽尼克模式像差所占比重的不同, 给变形镜校正各项泽尼克模式像差时的残余相位方差赋以相应的权重系数 A_i 是合理的。于是可写出变形镜用于校正前 n 项泽尼克模式像差时的残余相位均方差 e_i 的加权平均值

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i e_i \quad (12)$$

e_i 可参照(6)式写出:

$$e_i = \sqrt{\Phi_i / (m^2 - 1)} \quad (13)$$

显然, E 值越小就表示变形镜拟合大气湍流畸变波前的误差越小, 即校正能力越强。因此可以此作为评价变形镜校正能力大小的标准, 或作为变形镜优化设计的依据。例如比较变形镜控制电极在不同的划分形式下所求得 E 值的大小, 就可以找出其最佳电极分布。

下面以图 2 所示的电极划分形式为例, 并且考虑到变形镜边界的整周精确定位在技术上较难实现, 故在采用 120° 均分三点定位情况下, 分别计算等权 ($A_i = 1$) 和加权情况下变形镜校正前 8 项泽尼克模式像差时的残余相位均方差的平均值随电极环半径比例不同时变化规律, 如图 4 所示。

由图 4 可以看出, 用等权法得到的最佳控制电极半径比例为 $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 0.9 \cdot 2.0 \cdot 4.0$, 用加权法得到的为 $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 0.8 \cdot 2.0 \cdot 4.0$, 加权情况下变形镜的校正能力明显优于等权情况。

如取 $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 0.8 \cdot 2.0 \cdot 4.0$, 改变三个定位点的位置, 如图 5(a) 中的黑点改成图 5(b) 中的所示, 经计算得到两种不同的定位点安排方式下拟合误差的加权平均值之比为 $E_a/E_b = 0.9870$, 可见图 5(a) 所示的定位点安排方式比图 5(b) 的要略好。

仍然取 $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 0.8 \cdot 2.0 \cdot 4.0$, 变形镜的定位方式如图 5(a), 但将第三层电极(8~ 13)沿顺时针(或逆时针)旋转 30° , 如图 5(c)。通过计算得到 $E_a/E_c = 0.9824$, 可见图 5(a)所示的电极分布形式的校正效果比图 5(c)的要好。

图 6 所列为用图 5(a)所示的 13 单元变形镜分别校正各项泽尼克基元波面时的残余均方差 e_i 及同时校正大气湍流的前 8 项或前 15 项泽尼克模式像差时的加权平均值 E_8 和 E_{15} 。

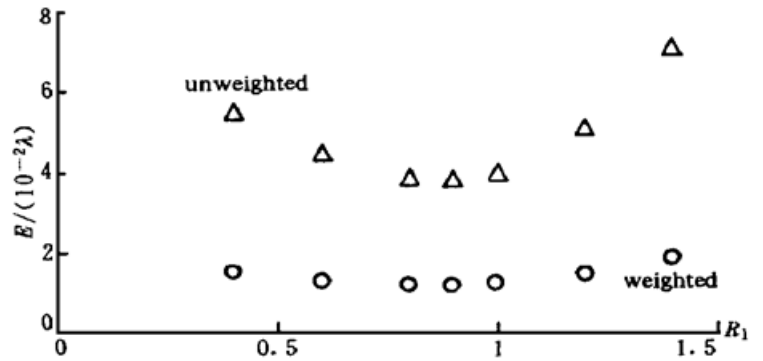


Fig. 4 The weighted and unweighted correction capability variations of the 13-electrode birmorph deformable mirror shown in Fig. 2 versus the different $R_1(R_2 \cdot R_3 = 2.0 \cdot 4.0)$ at correcting the first 8th Zernike model aberrations induced by the atmospheric air turbulence

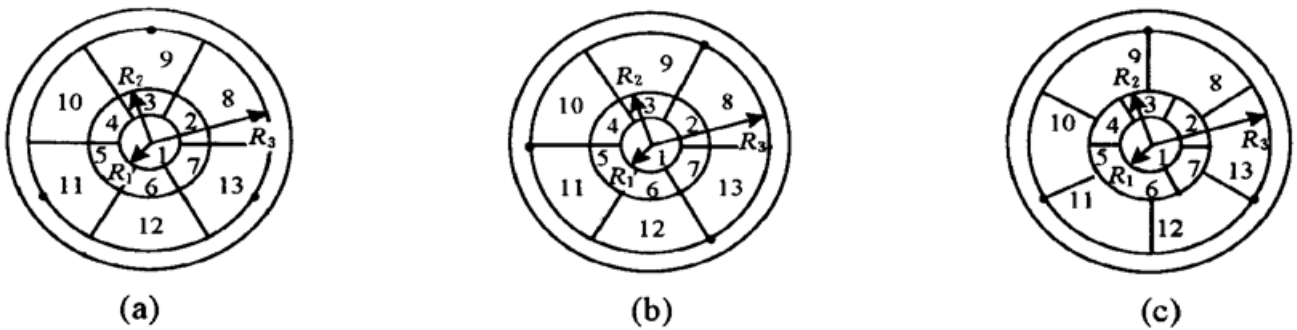


Fig. 5 Different arrangement of three positioning points (dots in Fig.) and different electrode patterns for comparison of fitting errors

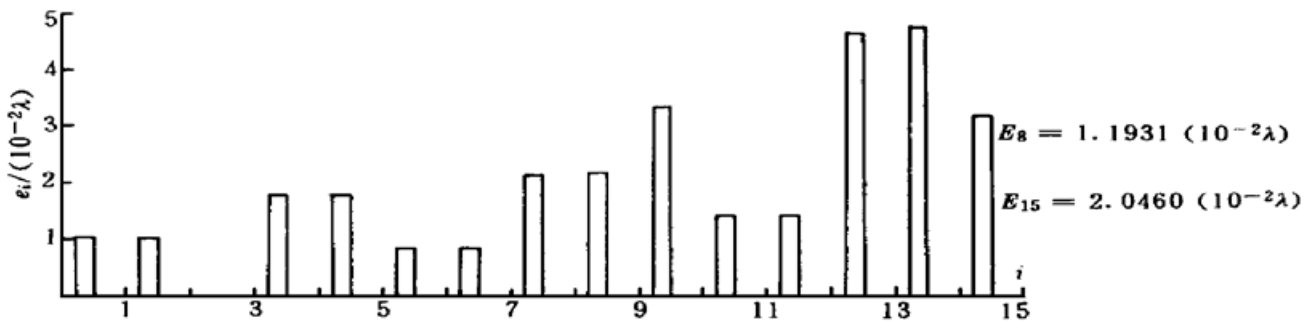


Fig. 6 The distribution of correction error of the 13-electrode birmorph deformable mirror shown in Fig. 5 (a) at correcting each Zernike model aberrations. Where E_8 and E_{15} are corresponding to the weighted average error for correcting the first 8th and 15th Zernike model aberrations respectively

由图 6 看出, 13 单元变形镜适合于校正泽尼克多项式的低阶模式像差, 对于高阶模式像差, 其校正能力较差。为了进一步提高变形镜的校正能力, 可适当增加其校正电极的数量, 如分别采用图 7(a)和图 7(b)所示的 19 单元变形镜方案, 其中图 7(a)所示的通光口径为 R_3 , 增加的 6 个电极位于通光口径之内, 图 7(b)所示的通光口径为 R_2 , 增加的 6 个电极位于通光口径之外。在对它们的控制电极各自进行优化设计之后, 分别计算了它们校正各项泽尼克模式像差时的残余均方差 e_i 和同时校正前 8 项或 15 项时的残余均方差的加权平均值 E_8 和 E_{15} , 如图 8 所示。



Fig. 7 Two different electrode patterns of 19-segment bimorph mirror

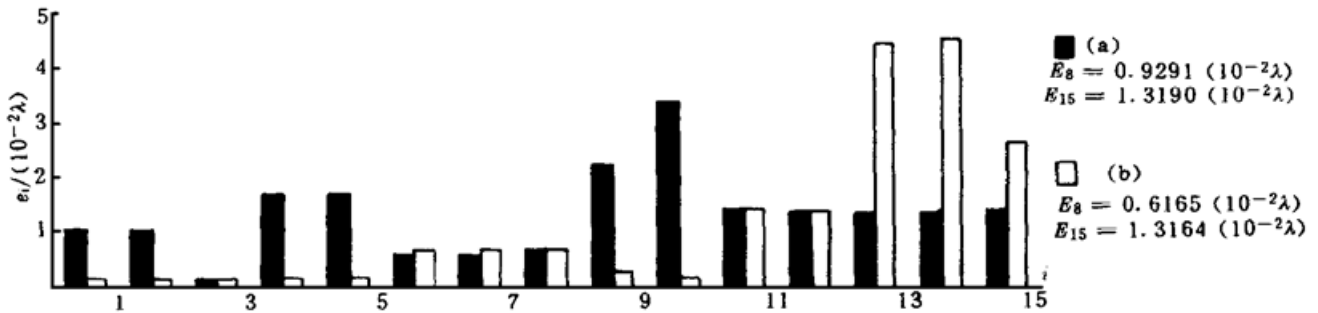


Fig. 8 The comparison of correction error of the 19-electrode bimorph deformable mirrors with different electrode pattern shown in Fig. 7 at correcting each Zernike model aberrations. Where E_8 and E_{15} are corresponding to the weighted average errors for correcting the first 8th and 15th Zernike model aberrations respectively

可见，如采用图 7(a) 所示的 19 单元电极分布形式，变形镜校正泽尼克模式像差前 15 项的残余均方差的加权平均值从 13 单元时的 2.0460 减小到 1.3190，其校正能力得到较大的改善。值得注意的是，由于只增加了控制变形镜镜面曲率的内部电极数，而控制其边界条件的外部电极数并没有增加，这时变形镜校正高阶项像差的能力虽有较大的提高，但对低阶项像差的校正效果并无大的改进。

如采用图 7(b) 所示的形式。其中电极 1~ 7 对应有效通光口径，8~ 19 都用于控制边界条件。与图 7(a) 相比，其校正低阶模式像差的能力有明显提高，且校正高阶模式像差的能力差别不大。

结 论 1) 若被校波前畸变中各基元模式像差所占的统计权重不同，影响变形镜校正能力的各控制电极半径比的优化值也不同。考虑到用于校正大气湍流造成的波前畸变的自适应光学系统，13 单元双压电变形镜的控制电极的最佳半径比为 $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 0.8 \cdot 2.0 \cdot 4.0$ 。

2) 当变形镜分别采用理论上的整圈装夹定位方式和现实可行的三点装夹定位方式时，变形镜的校正能力有所不同；在采用三点装夹定位方式时，三定位点相对控制电极的分布位置不同，变形镜的校正能力也有所不同，但它们的差别都不很大。

3) 19 单元的双压电变形镜比 13 单元的有更强的校正能力。若所增加的校正电极分布在通光口径之内，对高阶模式像差的校正能力有显著提高，但对低阶模式像差作用不大；若所增加的校正电极分布在通光口径之外，对高阶和低阶模式像差的校正能力都有显著提高。

参 考 文 献

- [1] Roddier F, Northcoti M. A simple low-order adaptive optics system for near-infrared application. *Publication of the Astronomical Society of the Pacific*, 1991, **103**: 131~ 149
- [2] Gaffard J P, Jagourel P. Adaptive Optics: Description of available components at LASERDOT. *Proc. SPIE*, 1994, **2201**: 608~ 702
- [3] Kudryashov A V, Shmalhousen V L. Semipassive bimorph flexible mirrors for atmospheric adaptive optics applications. *Opt. Engng.*, 1996, **35**(11): 3064~ 3073
- [4] Kokorowski S A. Analysis of adaptive optical elements made from piezoelectric bimorphs. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(1): 181~ 187
- [5] 杨 强, 曹根瑞. 13 单元双压电晶片变形镜控制电极的优化设计. *光学技术*, 1996, **5**: 15~ 20
- [6] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~ 211

The Optimization Design of Bimorph Deformable Mirror

Yang Qiang Zhu Jianping Cao Genrui

(*Optoelectronic Engineering Department, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*)

(Received 7 April 1998; revised 14 July 1998)

Abstract Based on the partial differential equation related to the displacement of bimorph deformable mirror with free boundary condition and its applied voltage deduced by S. A. Kokorowski, a matrix of static response functions $f(r, \theta)$ of mirror is derived with Gaussian iteration. Considering the statistical weight factors of different Zernike model aberrations caused by atmospheric turbulence, and the different arrangements of mirror positioning, the optimization of the bimorph deformable mirror is analyzed. The results indicate that, the correction capability of bimorph deformable mirror is greatly dependent on the statistic weight function of the corrected Zernike model wave aberrations induced by atmospheric air turbulence, so far as to the optimization design of mirror. And the different ways of mirror positioning will slightly affect its correction capability.

Key words adaptive optics, deformable mirror, optimization design, response function.