

三次谐波系统在混沌状态下光场的统计特性*

张培琨

张纪岳

(西安应用光学研究所, 西安 710065) (西北大学物理系, 西安 710069)

摘 要 数值分析了三次谐波系统在混沌状态下光场的统计特性。三次谐波混沌状态下光场统计服从超泊松分布, 谐波光场涨落皆大于基波光场涨落, 这种光场涨落随系统最大李亚普诺夫 (Lyapunov) 指数增大而无规律地发生起伏变化。

关键词 三次谐波, 混沌, 光子统计, 超泊松分布。

1 引 言

光学系统的动力学行为(特别是混沌行为)是国内外学术界关注的课题。人们已提出大量的理论模型并进行了大量的实验观察和数值模拟^[1~3]。但至今人们对混沌状态中光场的特性还了解不多。研究混沌状态的光子统计特性, 对深入了解混沌有一定的意义。在对一典型光学模型——外调制作用下三次谐波系统的动力学行为进行定量研究后^[4], 本工作利用本文作者之一提出的研究混沌态下光子统计的一种数值方法^[5], 通过数值积分求解了三次谐波系统的动力学方程组, 并利用光子数的长时间平均来估计其系综平均。用光场的哈肯(Haken)因子来刻画混沌状态下光场的统计特性。

2 三次谐波系统混沌状态下的光子统计

三次谐波产生涉及到光学谐振腔内频率为 ω_p 的泵浦光、频率为 ω_s 的三次谐波及这两个模式与非线性介质之间的相互作用。系统的哈密顿量为(取 $\hbar/2\pi \equiv 1$):

$$H = \omega_p b_p^\dagger b_p + \omega_s b_s^\dagger b_s + g_3 b_p^\dagger b_s + g_3^* b_p b_s^\dagger + b_p^\dagger A \exp(-i\omega_p t) + b_p A^* \exp(i\omega_p t) \quad (1)$$

此处 b_p^\dagger 与 b_p 分别为基波光子的产生与湮灭算符, b_s^\dagger 和 b_s 分别为谐波光子的产生与湮灭算符, A 为泵浦参量, g_3 为三阶非线性耦合系数, 其值正比于介质的三阶非线性极化率。

运用海森堡方程, 并考虑到腔损耗, 得到算符 b_p^\dagger 和 b_s^\dagger 的运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{db_p^\dagger}{dt} &= (i\omega_p - \gamma_p) b_p^\dagger + i3g_3^* (b_p) b_s^\dagger + iA^* \exp(i\omega_p t) \\ \frac{db_s^\dagger}{dt} &= (i\omega_s - \gamma_s) b_s^\dagger + ig_3 (b_p^\dagger)^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

根据量子-经典对应原理, 从(2)式可直接写出半经典运动方程, 作变量代换^[6]且考虑到腔损

* 国家自然科学基金资助项目。

耗及泵浦调制得出系统动力学方程组^[4]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\Gamma_p x_1 + 3(x_1^2 - x_2^2)x_4 - 6x_1 x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\Gamma_p x_2 - 3(x_1^2 - x_2^2)x_3 - 6x_1 x_2 x_4 - F(1 + \alpha \cos x_5) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\Gamma_s x_3 + 3x_1^2 x_2 - x_2^3 \\ \frac{dx_4}{dt} &= -\Gamma_s x_4 + 3x_1 x_2^2 - x_1^3 \\ \frac{dx_5}{dt} &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $\Gamma_p = \gamma_p/3g_3$, $\Gamma_s = \gamma_s/3g_3$, $F = A/3g_3$, γ_p 和 γ_s 分别为基波与谐波的损耗系数, $x_5 = \omega t$, ω 为调制频率及 $F\alpha$ 为调制幅度。 x_1 和 x_2 分别为基波复振幅的实部和虚部, x_3 和 x_4 分别为谐波复振幅的实部和虚部, 而且存在如下关系:

$$n_p = x_1^2 + x_2^2, \quad n_s = x_3^2 + x_4^2 \quad (4)$$

这里 n_p 表示基波光场的光子数, n_s 表示三次谐波光场的光子数。

光子数 n 围绕其系综平均值的涨落

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle \quad (5)$$

反映了光场的光子统计分布, 式中 $\langle \rangle$ 表示对统计系综的平均。

引入哈肯因子定义式^[7]:

$$H = \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} \quad (6)$$

注意到理想激光的光子统计分布为泊松分布, 此时 H 等于 0。而对于热光场 H 等于 1。可见 H 是一种定量表征光子统计分布的指标。又因

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \quad (7)$$

所以获得 H 的关键在于求出光子数及其平方对统计系综的平均值 $\langle n \rangle$ 和 $\langle n^2 \rangle$ 。

另外特别注意到混沌运动具有遍历性^[8]。而遍历性具有这样一个结论, 即如果系统运动具有遍历性, 则其任何一个可观测量对统计系综的平均等价于该可观测量在系综中的任意一个系统演化过程中的无穷长时间平均

$$\langle n \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (8)$$

式中 $\langle \rangle$ 为统计系综平均, $x(t)$ 为系综中任选的一个系统的可观察量的演化函数, T 为采样时间, 其在计算中取为 (3) 式演化过程中略去瞬态过程后的总时间。

因此, 对于处在混沌状态下动力学系统 (3) 式, 就可从 (8) 式估算出光子数及其平方的系综平均 $\langle n \rangle$ 和 $\langle n^2 \rangle$ 。只要在数值求解 (3) 式中, 取足够长的积分时间和适当的积分步长并确保瞬态过程已被略去就能得到充分精确的光子统计分布。

一般三次谐波系统存在三类典型的系统参数, 它们主要是由基波和谐波在谐振腔中的损耗大小来描述。当基波腔损耗远小于谐波腔损耗即 $\Gamma_p \ll \Gamma_s$ 时, 系统中大量基波模式的能量被限制在腔内往返振荡并通过非线性效应转变成谐波耦合输出, 系统的谐波转换效率最高, 这时三次谐波系统的谐振腔称为优腔。当基波腔损耗和谐波腔损耗相差适中即 $\Gamma_p < \Gamma_s$ 时,

系统的谐波转换效率既不很高也不很低, 这类三次谐波系统的谐振腔称为居间腔。当基波腔损耗与谐波腔损耗相差无几即 $\Gamma_p \approx \Gamma_s$ 时, 系统基波能量损耗太大从而导致由非线性效应转换而来的谐波能量非常小, 系统的谐波转换效率最低, 这时三次谐波系统的谐振腔称为劣腔。

针对三次谐波系统不同类型的谐振腔, 在不同调制参数范围内系统都存在混沌态。相应光场的光子统计将被分别讨论并加以比较。图 1 是系统在不同腔型条件下系统最大李亚普诺夫指数与调制频率间的变化曲线。可以看出, 不同腔型的混沌区处于不同的调制频段。优腔的混沌频段处在低频范围内, 劣腔的混沌频段处在较高频范围内, 居间腔介于二者之间。

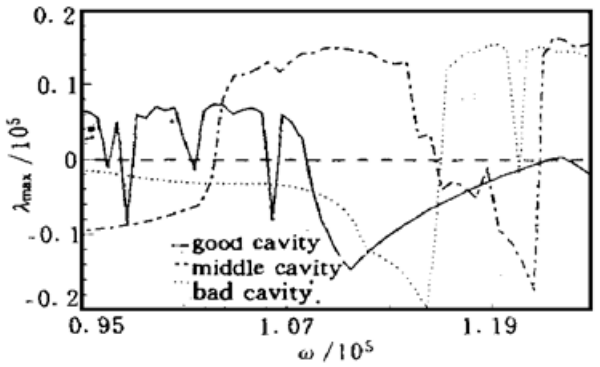


Fig. 1 The maximum Lyapunov exponent versus ω . The third-harmonic generation system with parameters: $\Gamma_p = 2 \times 10^2$, $\Gamma_s = 8 \times 10^4$, $F = 2 \times 10^7$, $\alpha = 0.58$ for good cavity; $\Gamma_p = 6 \times 10^3$, $\Gamma_s = 3 \times 10^4$, $F = 2 \times 10^7$, $\alpha = 0.58$ for middle cavity; $\Gamma_p = 1 \times 10^4$, $\Gamma_s = 3 \times 10^4$, $F = 2 \times 10^7$, $\alpha = 0.58$ for bad cavity

3 三类腔在混沌状态下的光子统计

对于优腔情形, 选取如下典型参数:

$$\Gamma_p = 2.0 \times 10^2, \quad \Gamma_s = 8.0 \times 10^4, \quad F = 2 \times 10^7, \quad \alpha = 0.58$$

当系统的最大李亚普诺夫指数为正时, 该系统一定处于混沌态。故从图 1 可以看出, 当调制频率 ω 在 1.02×10^5 至 1.05×10^5 区间内, 系统皆处在混沌态。取频率间隔为 0.0005×10^5 , 进一步详细计算该区间系统的最大正李亚普诺夫指数分布, 见图 2(a)。对应图 2(a) 的取值, 计算得到的系统基波和谐波光场的哈肯因子如图 2(b) 所示。其中 H_1 对应于基波光场的哈肯因子, H_2 对应于谐波光场的哈肯因子。从图 2(b) 可见, 在混沌区的整个频率范围内基波的 H 值都小于谐波的 H 值, 且两者皆小于 1 而大于 0。另外, 基波和谐波的 H 值起伏变化是完全同步的, 即基波的 H 值增大时谐波的 H 值也随之增大, 反之亦然。

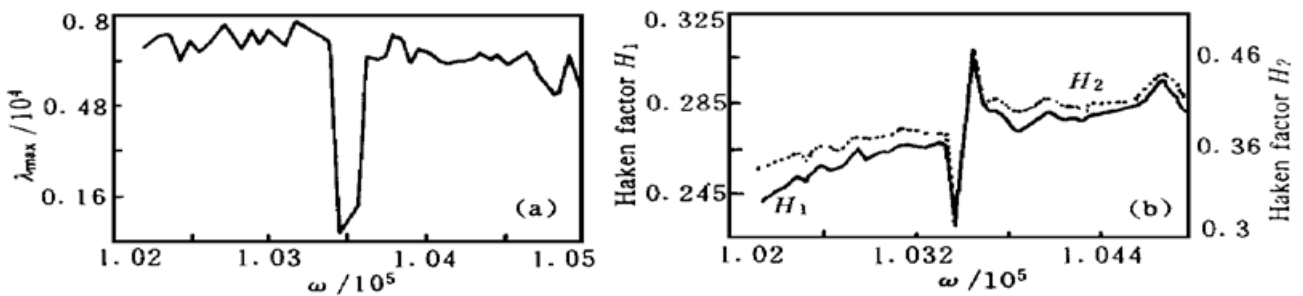


Fig. 2 The maximum positive Lyapunov exponent and Haken fractor of chaotic light field versus ω for the third-harmonic generation system with parameters: $\Gamma_p = 2 \times 10^2$, $\Gamma_s = 8 \times 10^4$, $F = 2 \times 10^7$, $\alpha = 0.58$. for the good cavity (a) The maximum positive lyapunov exponent versus ω ; (b) The Haken factor of chaotic light field versus ω

对于居间腔情形, 选取典型参数如下:

$$\Gamma_p = 6.0 \times 10^3, \quad \Gamma_s = 3.0 \times 10^4, \quad F = 2 \times 10^7, \quad \alpha = 0.58$$

在此参数下, 依图 1 所示, 对调制频率 ω 在 1.07×10^5 到 1.115×10^5 区间, 取频率间隔为 0.00075×10^5 , 计算系统最大正李亚普诺夫指数谱, 如图 3(a) 所示。同时计算相应混沌状态

下光场的哈肯因子，如图 3(b) 所示。显然基波的 H 值仍小于谐波的 H 值，但其同步性已不如图 2。在某些频率值处，两者的起伏正好相反。

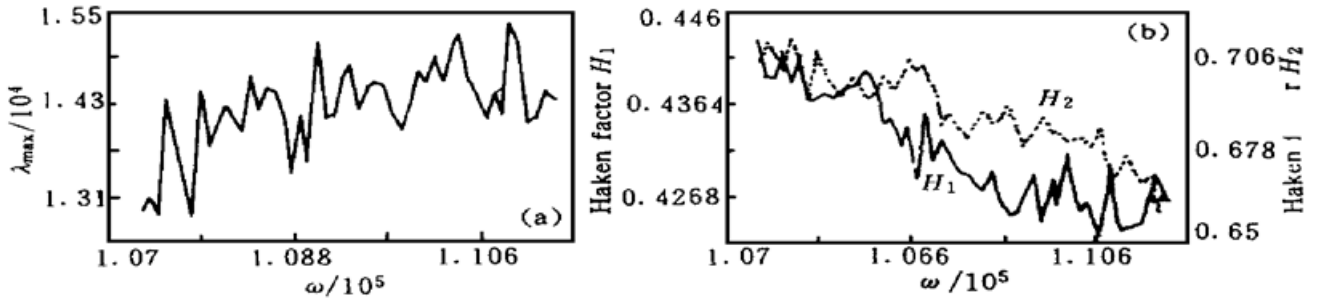


Fig. 3 The maximum positive Lyapunov exponent and Haken fractor of chaotic light field versus ω for the third-harmonic generation system with parameters: $\Gamma_p = 6 \times 10^3$, $\Gamma_s = 3 \times 10^4$, $F = 2 \times 10^7$, $\alpha = 0.58$. for the middle cavity (a) The maximum positive lyapunov exponent versus ω ; (b) The Haken factor of chaotic light field versus ω

对于劣腔情形，选取典型参数如下：

$$\Gamma_p = 1.0 \times 10^4, \quad \Gamma_s = 3.0 \times 10^4, \quad F = 2 \times 10^7, \quad \alpha = 0.58$$

将图 1 所示的调制频率 ω 从 1.16×10^5 到 1.19×10^5 范围间的系统最大正李亚普诺夫指数谱放大，并计算相应混沌状态下光场哈肯因子随 ω 变化的曲线[如图 4(a) 和图 4(b) 所示]。图中基波的 H 值仍小于谐波的 H 值，且两者起伏变化的同步性更差，在更多频率值处两者变化起伏相反。

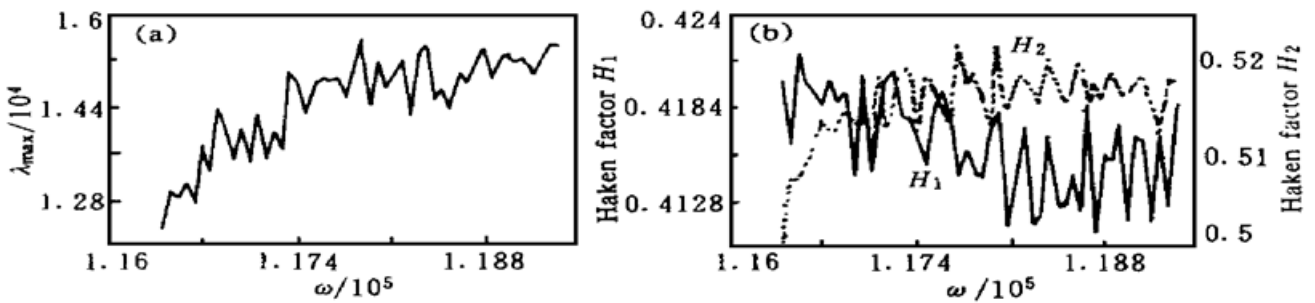


Fig. 4 The maximum positive Lyapunov exponent and Haken fractor of chaotic light field versus ω for the third-harmonic generation system with parameters: $\Gamma_p = 1 \times 10^4$, $\Gamma_s = 3 \times 10^4$, $F = 2 \times 10^7$, $\alpha = 0.58$. for the bad cavity (a) The maximum positive Lyapunov exponent versus ω ; (b) The Haken factor of chaotic light field versus ω

为了更进一步了解系统光场统计变化与系统混沌定量描述值间的关系，通过计算获得图 5 所示的结果。它反映系统混沌状态下光场的哈肯因子随系统最大正李亚普诺夫指数变化的趋势。当系统处在相同最大正李亚普诺夫指数所描述的混沌态时，优腔的 H 值最小，居间腔的 H 值最大，劣腔居中。同类腔中谐波的 H 值都大于基波的 H 值。各 H 值随系统最大正李亚普诺夫指数增大发生无明显规律的起伏变化。

结 论 针对三次谐波系统在外界泵浦调制作用下，对其在三类典型系统参数下的动力学行为进行定量研究发现它们都存在混沌态，而混沌状态下系统光场的统计行为具有如下一些特性：

- 1) 无论系统处在优腔、居间腔还是劣腔，混沌状态下光场的光子统计服从超泊松分布。混沌状态下光场的哈肯因子皆大于零。

2) 混沌状态下的光场, 无论基波还是谐波, 它们的光子数相对涨落都比热光场光子数相对涨落小, 混沌状态下光场的哈肯因子皆小于 1。

3) 无论系统取何类参数, 混沌状态下谐波的光子数相对涨落都大于基波的光子数相对涨落。但对于优腔情形, 基波和谐波的光子数相对涨落随调制频率同步发生变化。这种同步性变化对于居间腔情形而言要比优腔情形差, 对于劣腔情形则更差。

4) 对于相同的最大正李亚普诺夫指数所定量描述的混沌态, 基波或谐波的光子数相对涨落在优腔情形中最小, 劣腔情形中次之, 居间腔情形中最大。

5) 混沌状态下光场的光子统计值随混沌态定量描述值——系统最大正李亚普诺夫指数增大而发生起伏, 这种起伏没有明显的规律性。

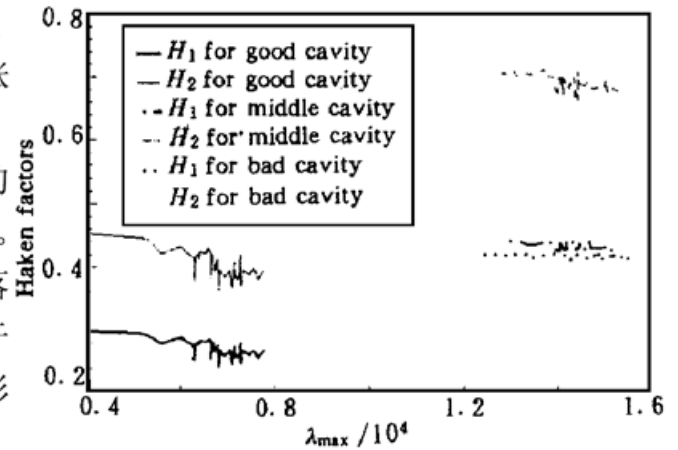


Fig. 5 The Haken factors of chaotic light field versus the maximum positive Lyapunov exponent of the third-harmonic generation system

参 考 文 献

[1] Tachikawa M, Hong F, Tanii K *et al.*. Deterministic chaos in passive Q-switching pulsation of a CO₂ laser with saturable absorber. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**(22) : 2266~ 2268

[2] Arecchi F T, Meucci R, Pezzati L. Chaos in a CO₂ waveguide laser due to transverse-mode competition. *Phys. Rev.*, 1990, **A42**(9) : 5791~ 5793

[3] Zhang Peikun, Lu Zhiguo. Dynamic behaviors of class D laser. *Proc. SPIE*, 1994, **2118** : 100~ 107

[4] 张培琨, 张纪岳. 三次谐波系统动力学行为的 Lyapunov 指数分析. *量子电子学报*, 1997, **14**(6) : 487 ~ 492

[5] 张纪岳, 高 卫. 二次谐波系统在混沌态下的光子统计. *光子学报*, 1997, **26**(5) : 385~ 389

[6] Zhang Jiyue, Haken H. Self-pulsing instabilities in the generation of higher harmonics. *Z. Phys.*, 1985, **B58**(4) : 337~ 343

[7] 李福利. 高等激光物理学, 合肥: 中国科技大学出版社, 1992. 4~ 6

[8] 陈予恕. 非线性动力学中的现代分析方法. 北京: 科学出版社, 1992. 第五章

Photon Statistics of the Chaotic Light Field in Third-Harmonic Generation

Zhang Peikun

(Xi'an Applied Optic Institute, Xi'an 710065)

Zhang Jiyue

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069)

(Received 15 December 1997; revised 27 July 1998)

Abstract The numerical results about the photon statistics of the chaotic light field in third-harmonic generation are given. The photon statistics of the chaotic light field obeys the super-Poisson distribution. In all cases, the photon statistic fluctuation of third-harmonic wave is always stronger than that of the fundamental wave. This fluctuation vary irregularly with the increase of the the maximum Lyapunov exponent of the system.

Key words third-harmonic, chaos, photon statistics, super-Poisson distribution.