

# 大气湍流波前低阶模式的时间功率谱分析\*

饶长辉 姜文汉 凌 宁

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

**摘 要** 引入规格化的相位谱, 推导了大气湍流波前低阶模式(Z-倾斜和 G-倾斜、离焦、像散以及彗差)的时间功率谱, 并就水平大气传输、星体目标观测、空间目标监测等几种情况作了实际的数值计算及分析, 此外还给出了 G-倾斜功率谱的实验结果。分析结果表明: 对于水平大气传输模式, 倾斜功率谱曲线的低频段的指数下降因子为  $4/3 - 6\beta/11$  ( $\beta$  为相位谱空间频率的指数下降因子), 离焦、像散和彗差项的功率谱低频段指数下降因子为 0; 水平大气传输工作模式下, Z-倾斜、离焦和像散、彗差的时间功率谱的高频段均随频率的  $-(\beta + 2)$  次方下降, G-倾斜的功率谱随频率的  $-\beta$  次方下降; 大气湍流外尺度对低阶模式功率谱曲线的低频段影响显著, 大气湍流外尺度越小, 低频段下降越快。

**关键词** 自适应光学, 泽尼克多项式, 低阶模式, 空间功率谱, 时间功率谱, 大气湍流外尺度。

## 1 引 言

自适应光学技术能够实时测量并且校正受到大气湍流扰动的光学波前, 从而在天文学观测、激光传输等领域得到广泛应用<sup>[1-3]</sup>。

自适应光学系统主要由波前探测、波前复原、波前校正等几个部分组成。波前复原通常采用两种补偿方法: 区域法和模式法。在模式法补偿中, 波前通常被分解为一套正交基函数, 如泽尼克(Zernike)多项式、Karhunen-Loeve 函数。与 Karhunen-Loeve 函数相比, 泽尼克多项式具有统一解析表达式, 但模式间存在混淆, 不具备正交性。对于低阶模式, 泽尼克多项式和 Karhunen-Loeve 函数近乎一致, 模式间混淆可以忽略。在大气湍流引起的波前误差方差中, 一阶项(整体倾斜)占 86.9%, 二阶项(离焦和像散)占 6.7%, 三阶及三阶以上只占 6.4%, 因此在许多应用场合, 如低对比度扩展目标自适应光学系统中, 只要校正占主要成分的大气湍流波前低阶项, 就可以取得良好的校正效果。

在自适应光学系统设计和性能评价时, 为了确定各阶模式校正所需带宽以及系统带宽对系统性能的影响, 必须首先弄清楚大气湍流波前各阶模式的时间功率谱。在国内外文献中, 有关大气湍流功率谱方面讨论的文章很多, 但是关于大气湍流波前的泽尼克多项式展开各阶模式的时间功率谱的文章却很少, 且均建立在 Kolmogorov 谱基础上进行分析, 而且专门有

\* 国家科委 863 高科技项目。

收稿日期: 1998-04-08; 收到修改稿日期: 1998-07-02

关低阶模式的功率谱未见报道。各个观测台的站址不同, 大气湍流的强度和功率谱也不尽相同。在许多场合, 大气湍流波前并不服从 Kolmogorov 谱。本文通过引入规格化的相位谱(不一定为 Kolmogorov 谱), 推导了大气湍流波前低阶模式的时间功率谱, 并就水平大气传输、星体目标观测、空间目标监测等几种情况作了实际的数值计算及分析。

## 2 理论推导

在单位圆上定义的泽尼克多项式表示为<sup>[5]</sup>

$$\left. \begin{aligned} z_{\text{even}j} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta), & m \neq 0 \\ z_{\text{odd}j} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta), & m \neq 0 \\ z_j &= \sqrt{n+1} R_n^0(r), & m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2-s]! [(n-m)/2-s]!} \quad (2)$$

式中  $m$ 、 $n$  分别为轴向和径向级次。

对于口径为  $D$  的观测系统, 其波前可用泽尼克多项式表示为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j(\mathbf{r}) \quad (3)$$

其中

$$a_j = \int_{\mathcal{A}} z_j(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4)$$

式中  $\Phi(\mathbf{r})$  为孔径内波前;  $a_j$  为各阶模式系数, 对于低阶模式,  $j = 2, 3(n = 1)$ , 对应于倾斜项;  $j = 4(n = 2)$  对应于离焦项;  $j = 5, 6(n = 2)$  对应于像散项;  $j = 7, 8(n = 3)$  对应于彗差项。这里有必要指出的是, 根据 Tyler<sup>[8]</sup> 的定义, 按照以上泽尼克多项式展开得到的倾斜 ( $n = 1$ ) 属于 Z-倾斜。

根据 Taylor 湍流冻结假设理论并假设光波传输路径上存在风速  $\mathbf{v}$ , 则波前探测器探测到的信号为

$$s(t) = a_j(\mathbf{r}) = a_j(\mathbf{v}t) = \int_{\mathcal{A}} z_j(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) d\mathbf{r} \quad (5)$$

于是

$$a_j(\mathbf{r}) = z_j(\mathbf{r}) \circledast \Phi(\mathbf{r}) \quad (6)$$

式中  $\circledast$  表示卷积。

根据傅里叶变换定律,  $a_j(\mathbf{r})$  的空间功率谱为

$$W_{a_j}(\mathbf{f}) = W_{z_j}(\mathbf{f}) W_{\Phi}(\mathbf{f}) \quad (7)$$

式中  $W_{z_j}(\mathbf{f})$  和  $W_{\Phi}(\mathbf{f})$  分别为  $z_j(\mathbf{r})$  和  $\Phi(\mathbf{r})$  的空间功率谱。

$a_j(\mathbf{r})$  的空间协方差为

$$C_{a_j}(\rho) = \langle a_j(\mathbf{r}) a_j(\mathbf{r} + \rho) \rangle \quad (8)$$

式中  $\langle \cdot \rangle$  表示取整体平均。

根据 Wiener-Kinchen 理论,  $C_{a_j}(\rho)$  为  $W_{a_j}(\mathbf{f})$  的傅里叶逆变换

$$C_{a_j}(\rho) = \int W_{a_j}(\mathbf{f}) \exp(i2\pi\rho \cdot \mathbf{f}) d\mathbf{f} \quad (9)$$

泽尼克多项式各阶模式的时间协方差  $R(\tau)$  为

$$R(\tau) = \langle s(t)s(t + \tau) \rangle = \langle a_j(\mathbf{v}t) a_j(\mathbf{v}t + \mathbf{v}\tau) \rangle = C_{a_j}(\mathbf{v}\tau) \tag{10}$$

令  $\rho = (\xi, \eta)$ ,  $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ ,  $f = |\mathbf{f}|$ , 则

$$C_{a_j}(\rho) = C_{a_j}(\xi, \eta) = \iint W_{a_j}(f_x, f_y) \exp [i2\pi(\xi f_x + \eta f_y)] df_x df_y \tag{11}$$

又令  $V = |\mathbf{v}|$ ,  $v = Vf_x$ ,  $\mu = Vf_y$ , 于是泽尼克多项式各阶模式的时间协方差为

$$R(\tau) = C_{a_j}(V\tau, 0) = \iint W_{a_j}(f_x, f_y) \exp (i2\pi Vf_x \tau) df_x df_y = \frac{1}{V} \int \exp (i2\pi v \tau) dv \int W_{a_j}(\frac{v}{V}, f_y) df_y \tag{12}$$

因此大气湍流波前泽尼克多项式展开各阶模式的一维时间功率谱为

$$\Phi_j(v) = \frac{1}{V} \int W_{a_j}(\frac{v}{V}, f_y) df_y = \frac{1}{V} \int W_{z_j}(\frac{v}{V}, f_y) W_{a_j}(\frac{v}{V}, f_y) df_y \tag{13}$$

此式表明泽尼克多项式各阶模式的时间功率谱与大气湍流波前的空间功率谱以及泽尼克多项式各展开项的功率谱有关。

根据文献[5], 泽尼克多项式各展开项的功率谱为

$$\left. \begin{aligned} W_{z_{\text{even}}}(f) &= 4(n + 1) \left| \frac{J_{n+1}(\pi Df)}{\pi Df} \right|^2 2|\cos(m\theta)|^2, & m \neq 0 \\ W_{z_{\text{odd}}}(f) &= 4(n + 1) \left| \frac{J_{n+1}(\pi Df)}{\pi Df} \right|^2 2|\sin(m\theta)|^2, & m \neq 0 \\ W_{z_j}(f) &= 4(n + 1) \left| \frac{J_{n+1}(\pi Df)}{\pi Df} \right|^2, & m = 0 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

式中  $J_{n+1}(\cdot)$  为第一类  $n + 1$  阶贝塞尔函数。

对于任意的大气湍流波前空间谱, 其规格化表达式为<sup>[6]</sup>:

$$W_{a_j}(f) = \frac{A_\beta [f^2 + (R/L_0)^2]^{-\beta/2}}{\rho_0^{\beta-2}} \tag{15}$$

式中  $R$  为观测系统半径;  $L_0$  为大气湍流外尺度;  $\beta$  为相位谱空间频率的指数下降因子, 对于 Kolmogorov 谱,  $\beta = 11/3$ ;  $A_\beta$  为归化量;  $\rho_0$  是一个类似大气湍流相干长度  $r_0$  的量, 当  $\beta = 11/3$  时,  $\rho_0 = r_0$ 。

根据文献[6],  $A_\beta$  定义为  $D = \rho_0$  时, 去除整体平移(piston)的波前残余方差为  $1 \text{ rad}^2$  时所对应的归化量

$$A_\beta = \frac{2^{(\beta-2)} \Gamma[(\beta+2)/2]^2 \Gamma[(\beta+4)/2] \Gamma(\beta/2) \sin[\pi(\beta-2)/2]}{\pi^\beta \Gamma(\beta+1)} \tag{16}$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  为伽玛函数。根据(13)~(16)式, 已经可以得到 Z-倾斜、离焦和像散、彗差的时间功率谱。此外, 在很多自适应光学系统中, 整体倾斜通常由专门的跟踪器探测(如四象限探测器)或求平均波前斜率得到, 这类倾斜应为 G-倾斜。按照 G-倾斜的定义,  $x$  方向的倾斜为

$$\theta_G(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}/D) \odot \partial \Phi(\mathbf{r}) / \partial x \tag{17}$$

式中  $P(\mathbf{r}/D)$  为瞳函数

$$P(\mathbf{r}/D) = \begin{cases} 4/(\pi D^2), & |\mathbf{r}| \leq D/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{18}$$

与前面的推导类似, 可以得到 G-倾斜的时间功率谱为

$$\Phi_{\theta_c}(v) = \frac{1}{V} \int 2i\pi \frac{v}{V} |^2 W_p(\frac{v}{V}, f_y) W_q(\frac{v}{V}, f_y) df_y \quad (19)$$

式中

$$W_p(f_x, f_y) = 4J_1^2(\pi Df)/(\pi Df)^2 \quad (20)$$

下面就水平大气传输、星体目标观测以及空间目标监测等几种实际情况分别加以讨论。

### 2.1 水平大气传输

光学波前通过水平大气传输时, 假定风速方向与光线传输方向垂直, 即为横向风, 并假定风速大小恒定, 这时将(14)式和(15)式代入(13)式, 可以得到此时泽尼克多项式各阶模式的时间功率谱为

$$\Phi_j(v) = \frac{4A_\beta(n+1)}{\pi^2(V/D)} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx Q_j \left[ \left(\frac{v}{V/D}\right)^2 + x^2 + \left(\frac{1}{4L_0}\right)^2 \right]^{-\beta/2} \times \left[ |J_{n+1}\{\pi[(\frac{v}{V/D})^2 + x^2]^{1/2}\}|^2 / \left[ \left(\frac{v}{V/D}\right)^2 + x^2 \right] \right] \quad (21)$$

其中  $Q_j$  表示为

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{even}j} &= 2 \cos^2 m\theta, & m &\neq 0 \\ Q_{\text{odd}j} &= 2 \sin^2 m\theta, & m &\neq 0 \\ Q_j &= 1, & m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

对于  $G$ -倾斜, 其功率谱表示为

$$\Phi_j(v) = \frac{16A_\beta}{(V/D)} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \left(\frac{v}{V/D}\right)^2 + x^2 + \left(\frac{1}{4L_0}\right)^2 \right]^{-\beta/2} \times |J_1\{\pi[(\frac{v}{V/D})^2 + x^2]^{1/2}\}|^2 / \left[ \left(\frac{v}{V/D}\right)^2 + x^2 \right] \quad (23)$$

### 2.2 星体目标观测

在这种情况下, 为分析简化, 只考虑 Von-Karman 空间谱<sup>[7]</sup>, 重点分析大气湍流外尺度对泽尼克多项式各阶模式的时间功率谱的影响。

对于 Von-Karman 相位空间谱,  $\beta = 11/3$ ,  $A_\beta = 0.023$ ,  $\rho_0 = r_0$ 。对于高度为  $[h, h + \Delta h]$  的大气湍流薄层

$$\Phi_j(v) = \frac{0.0388(n+1)}{\pi^2 D^2} k^2 C_n^2(h) \Delta h \int_{-\infty}^{+\infty} dx Q_j \frac{\{[v/V(h)]^2 + x^2 + (R/L_0)^2\}^{-11/6}}{V(h)} \times |J_{n+1}(\pi D \{[v/V(h)]^2 + x^2\}^{1/2})|^2 / \{[v/V(h)]^2 + x^2\} \quad (24)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$  为波数;  $C_n^2(h)$  和  $V(h)$  分别为大气湍流折射率结构常数和风速大小模型。

因此对于整层大气, 湍流波前的泽尼克多项式各阶模式的时间功率谱为

$$F_j(v) = \frac{0.0388(n+1)}{\pi^2 D^2} k^2 \int_0^\infty dh C_n^2(h) \int_{-\infty}^{+\infty} dx Q_j \frac{\{[v/V(h)]^2 + x^2 + (R/L_0)^2\}^{-11/6}}{V(h)} \times |J_{n+1}(\pi D \{[v/V(h)]^2 + x^2\}^{1/2})|^2 / \{[v/V(h)]^2 + x^2\} \quad (25)$$

### 2.3 空间目标监测

与星体目标观测相比, 这种情况的信标光源位于有限高度  $L$  上, 到达观测系统的光波不能看作平面波, 而应看作球面波。此时只要将(25)式中的  $v(h)$  用  $v(h)/(1 - h/L)$  代替,

$C_n^2(h)$  用  $(1 - h/L)^{5/6} C_n^2(h)$  代替, 高度积分上限改为  $L$  即可。为避免重复, 这里不再赘述。

### 3 数值计算及分析

对于水平大气传输模式, 根据(21)式, 数值计算参数为:  $V/D = 10 \text{ Hz}$ ,  $D = \rho_0$ 。图 1、图 2 和图 3 分别给出了不同  $\beta$  (分别为 30/12、34/12、38/12、42/12) 时  $Z$ -倾斜、离焦与像散、彗差项的时间功率谱; 图 4 给出了大气湍流波前服从 Kolmogorov 谱 ( $\beta = 11/3$ ) 时,  $Z$ -倾斜、离焦和像散、彗差项的时间功率谱。

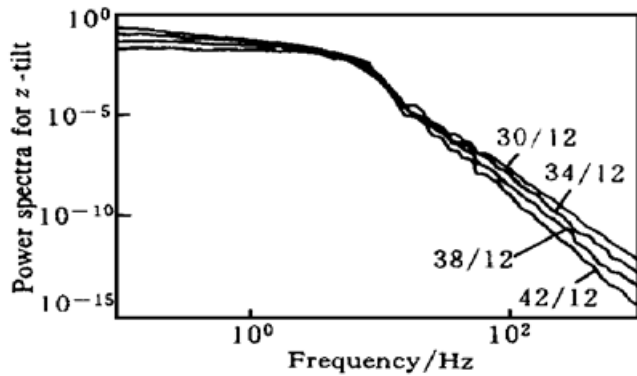


Fig. 1 Power spectra for Z-tilt

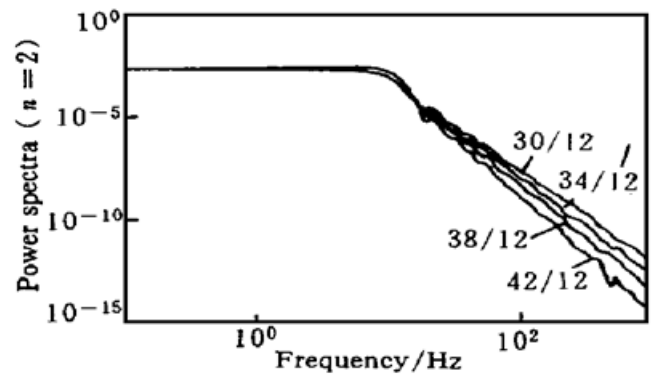


Fig. 2 Defocus and astigmatism power spectra

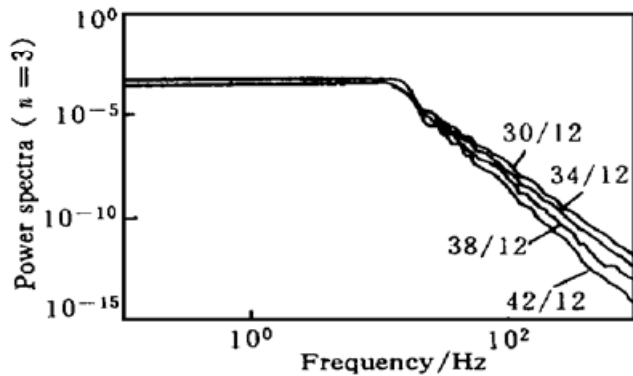


Fig. 3 Coma power spectra

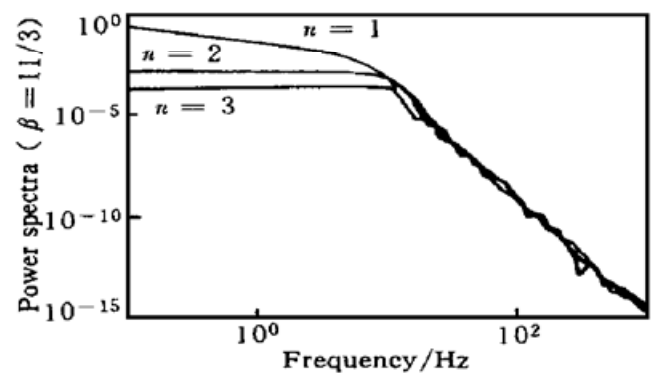


Fig. 4 Power spectra for tip and tilt, defocus and astigmatism, coma (Kolmogorov spectrum)

当  $2 < \beta < 4$  时, 大气湍流外尺度的影响很小, 数值计算中暂不考虑。从图中可以看出: 对于  $Z$ -倾斜, 随着  $\beta$  的增大, 低频段和高频段的频率指数下降因子越来越大; 对于离焦、像散和彗差项 ( $n = 2, 3$ ), 随着  $\beta$  的增大, 低频段基本保持不变, 高频段的频率指数下降因子也越来越大。为了研究功率谱曲线随  $\beta$  的变化关系, 作者对各种不同  $\beta$  时的功率谱曲线的低频段和高频段进行了几何曲线拟合。图 5 和图 6 分别给出了低频段和高频段各阶泽尼克项的功率谱随频率下降的指数因子随  $\beta$  变化的拟合结果。拟合结果表明; 对于  $Z$ -倾斜, 其功率谱曲线的低频段的指数下降因子为  $4/3 - 6\beta/11$ , 即

$$\Phi_j(v) \propto v^{4/3 - 6\beta/11}, \quad j = 2, 3 \tag{26}$$

对于离焦、像散和彗差项, 其功率谱低频段指数下降因子为 0, 即

$$\Phi_j(v) \propto v^0, \quad j = 4, 5, 6 \tag{27}$$

对于所有各泽尼克多项式展开项, 由于当  $x$  很大时,  $J_{n+1}(x) \rightarrow x^{-1/2}$ , 因此其功率谱高频段随频率的  $-(\beta + 2)$  次方下降, 即

$$\Phi(v) \propto v^{-\beta-2} \tag{28}$$

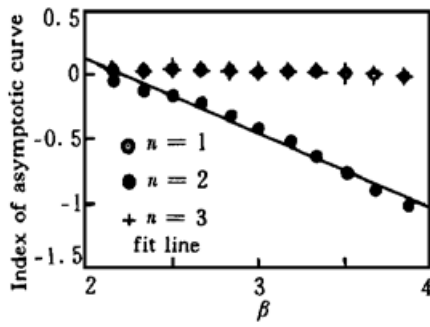


Fig. 5 Index of asymptotic curve versus  $\beta$  (for low frequency)

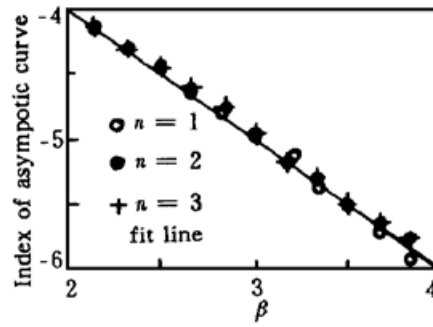


Fig. 6 Index of asymptotic curve versus  $\beta$  (for high frequency)

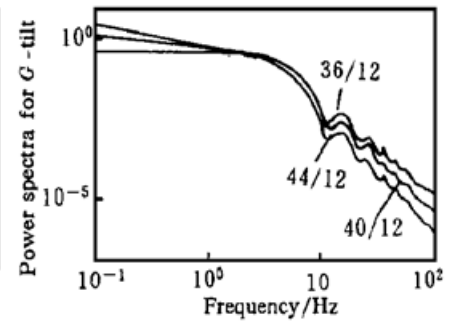


Fig. 7 Power spectra for G-tilt

对于 G-倾斜, 图 7 给出了根据(23)式  $\beta$  分别为 36/12、40/12、44/12 时 G-倾斜的功率谱曲线。不难分析, 其低频段同 Z-倾斜, 指数下降因子为  $4/3 - 6\beta/11$ , 但是高频段与 Z-倾斜不同, 其功率谱高频段随频率的  $-\beta$  次方下降, 即

$$\Phi_{\theta_G}(v) \propto v^{-\beta} \quad (29)$$

这里特别指出, 对于 Kolmogorov 相位谱, 如图 4 和图 7 所示, 倾斜(包括 G-倾斜和 Z-倾斜)、离焦和像散、彗差的功率谱曲线的低频段分别随频率的  $-2/3$  次方、0 次方、0 次方下降, 高频段除 G-倾斜随频率的  $-11/3$  次方下降外, 其余各项均随频率的  $-17/3$  次方下降。

当  $\beta > 4$  时, 必须考虑大气湍流外尺度对功率谱曲线的影响。图 8 和图 9 分别给出了当  $L_0 = 10D, 50D, 100D, 1000D, \beta = 4.5$  时 Z-倾斜和离焦与像散项的功率谱曲线。计算结果表明, 大气湍流外尺度对功率谱曲线的低频段影响显著, 而对高频段几乎没有影响; 大气湍流外尺度越小, 低频段下降越快。

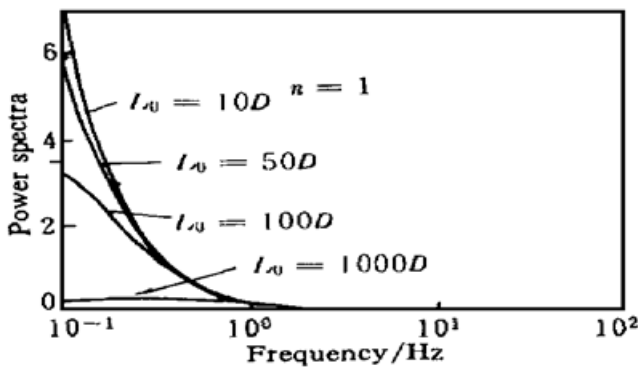


Fig. 8 Power spectra for Z-tilt ( $\beta = 4.5$ )

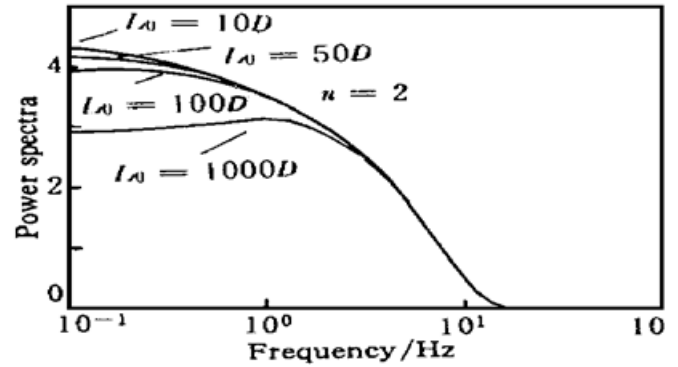


Fig. 9 Defocus and astigmatism power spectra ( $\beta = 4.5$ )

对于星体目标观测方式, 根据(25)式, 采用修改后的 Hufnagel-Valley(H-V) 湍流模型和 Bufton 风速模型进行数值计算, 取  $D = 1.2 \text{ m}$ 。H-V 湍流模型和 Bufton 风速模型表示如下

$$C_n^2(h) = 8.10 \times 10^{-54} h^{10} \exp(-h/1000) + 3.02 \times 10^{-7} \exp(-h/1500) + 1.90 \times 10^{-15} \exp(-h/100) \quad (30)$$

$$V(h) = 5 + 30 \exp\{-[(h - 9400)/4800]^2\} \quad (31)$$

图 10 和图 11 分别给出了 Z-倾斜、离焦和像散项在各种不同大气湍流外尺度 ( $L_0 = 10D, 50D, 100D, 1000D$ ) 情况下的功率谱曲线。这种观测条件下的功率谱曲线随大气湍流外尺度的变化关系与水平大气传输模式类似。

对于空间目标监测模式, 仍然采用修改后的 H-V 湍流模型和 Bufton 风速模型来进行仿真。目标高度取  $L = 10 \text{ km}$ , 观测系统口径  $D = 1.5 \text{ m}$ 。图 12 给出了在 Kolmogorov 谱情况

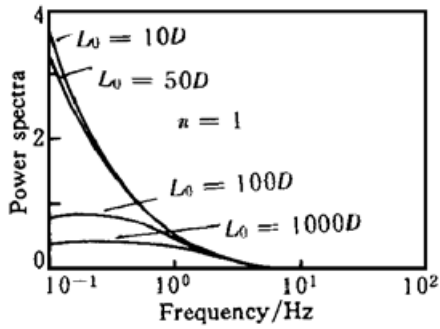


Fig. 10 Power spectra for Z-tilt

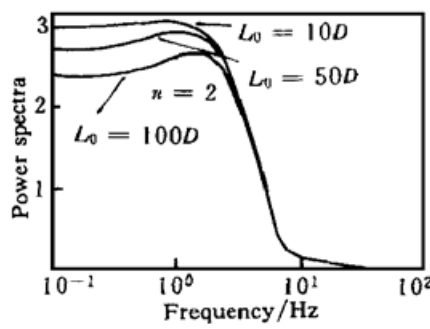


Fig. 11 Defocus and astigmatism power spectra

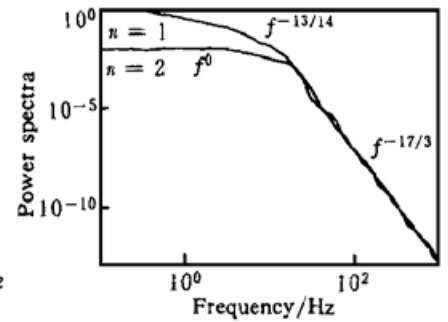


Fig. 12 Power spectra for Z-tilt, defocus and astigmatism

下, Z-倾斜、离焦和像散项的功率谱曲线。计算结果表明: 对于低频段, Z-倾斜的功率谱曲线随频率的 $-13/14$ 次方下降, 离焦和像散项功率谱随频率变化基本不变; 对于高频段, 功率谱均随频率的 $-17/3$ 次方下降。

### 4 实验结果

为了验证分析的正确性, 图 13 给出了实测的整体倾斜 ( $G$ -倾斜) 的功率谱曲线。该曲线是 61 单元自适应光学系统进行 500 m 水平大气传输校正时得到的。此系统采用哈特曼-夏克波前探测器实时探测波前斜率信号, 经过波前复原和控制算法, 为 61 单元变形镜和高速倾斜镜提供校正信号。该系统有效子孔径数为 48, 采用直接斜率法进行波前复原, 整体倾斜信号由各个子孔径的斜率平均得到。由于接收望远镜的机械抖动等因素对实测功率谱的低频段有一定影响, 而对高频段影响很小, 因此只对实测功率谱曲线的高频段进行拟合, 拟合结果表明实测功率谱曲线的高频段近似于随频率的 $-2$ 次方下降, 如图 13 所示。前面分析已经指出,  $G$ -倾斜功率谱高频段随频率的 $-\beta$ 次方下降。此实测数据与前面的分析相吻合, 并由此可以推断此时大气湍流波前并不服从 Kolmogorov 谱, 其对应的相位谱空间频率指数下降因子  $\beta$  近似于等于 2, 即  $W_d(f) \propto f^{-2}$ 。

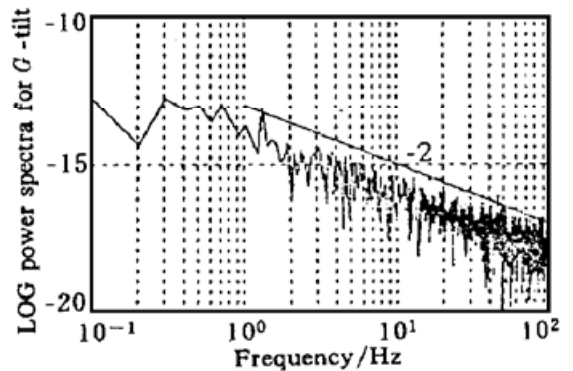


Fig. 13 Measured power spectra for G-tilt

**结 论** 通过以上的分析和数值计算, 可以得到以下主要结论:

- 1) 对于水平大气传输模式, 倾斜(包括 Z-倾斜和 G-倾斜)功率谱曲线的低频段的指数下降因子为  $4/3 - 6\beta/11$ , 离焦、像散和彗差项的功率谱低频段指数下降因子为 0;
- 2) 水平大气传输工作模式下, 泽尼克多项式各展开项系数的时间功率谱的高频段随频率的  $-(\beta + 2)$  次方下降,  $G$ -倾斜功率谱的高频段随频率的  $-\beta$  次方下降;
- 3) 大气湍流外尺度对泽尼克多项式各展开项系数功率谱曲线的低频段影响显著, 而对高频段几乎没有影响; 大气湍流外尺度越小, 低频段下降更快。

感谢李新阳提供了图 13 的功率谱实测数据。

## 参 考 文 献

- [1] Jiang Wenhan, Li Mingquan, Tang Guomao *et al.*. Adaptive optics image compensation experiments for star objects. *Opt. Engng.*, 1995, **34**(1) : 15~ 20
- [2] 姜文汉, 严佩英, 李明全等. 自适应光学实时大气湍流补偿实验. *光学学报*, 1990, **10**(6) : 558~ 564
- [3] 饶长辉, 姜文汉. 2.16 m 望远镜红外自适应光学系统的误差和性能分析. *天体物理学报*, 1996, **16**(4) : 428~ 437
- [4] Roddier F, Northcott M J, Groves J E *et al.*. One-dimensional spectra of turbulence-induced Zernike aberrations: Time-delay and isoplanicity error in partial adaptive compensation. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993, **10**(5) : 957~ 965
- [5] Noll R. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1976, **66**(3) : 207~ 211
- [6] Boreman G D, Dainty C. Zernike expansions for non-Kolmogorov turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **A13**(3) : 517~ 522
- [7] Tyson R K. *Principle of Adaptive Optics*, Boston: Academic Press, 1991.
- [8] Tyler G A. Bandwidth considerations for tracking through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1) : 358~ 367

## Temporal Power Spectra Analysis of Low-Order Modes of Atmospheric Turbulence Wavefront

Rao Changhui     Jiang Wenhan     Ling Ning

(*Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*)

(Received 8 April 1998; revised 2 July 1998)

**Abstract** Temporal power spectra of low-order modes [tilt (Z-tilt, G-tilt), defocus, astigmatism, coma] of atmospheric turbulent wavefront are deduced by introducing generalized phase spatial spectrum. Numerical results and analysis are given under the conditions of horizontal atmosphere, observation of star objects and monitoring of spatial objects. The results show in horizontal atmosphere, the temporal power spectra is proportional to the  $4/3 - 6\beta/11$  power ( $\beta$  is the power-law exponent of phase power spectrum) of the frequency  $v$  for tilts and  $v^0$  for defocus, astigmatism and coma for small  $v$  values respectively. For large  $v$  values, all the spectra have the same asymptotic behavior and decrease as  $v^{-\beta-2}$  except for G-tilt whose power spectra decrease as  $v^{-\beta}$  in horizontal atmosphere. The temporal power spectra is influenced by outer scale of atmospheric turbulence and with the decrease of outer scale, the spectra becomes steeper and steeper.

**Key words** adaptive optics, Zernike polynomials, low-order modes, spatial spectrum, temporal power spectra, outer scale of turbulence.