第 19 卷 第 9 期
1999 年 9 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 19, No. 9
September, 1999

非线性薄膜波导 TE 模色散特性的多层分割法计算

佘守宪
(北方交通大学物理系, 北京 100044)

摘 要 对于芯区为非线性介质、衬底及包层为线性介质的平板波导, 提出用多层分割法分析芯区的模场, 采用递推公式(等效于推广的传递矩阵法)求解传播常数与光功率间的依赖关系。该法适用于克尔型或非克尔型介质及芯区折射率非均匀的一般情形。实例计算结果与已有的精确数值计算结果十分符合。

关键词 非线性光波导, 色散关系, 多层分割法。

1 引 言

由于非线性波导在光信息处理中有重要应用, 所以其特性研究颇受关注[1, 2]。对于芯区为克尔型非线性介质、衬底与包层为线性介质的平板波导, 精确解析方法及数值计算结果已有报道[3, 4], 但计算涉及雅可比椭圆函数、椭圆积分等较复杂的计算, 工作量大, 不便实际应用。陈智浩[5]及本文作者[6, 7]曾报道了适用于克尔型薄膜波导 TE 模分析的微扰方法。本文提出一种新方法, 考虑到薄膜(芯区)内折射率依赖于场强的非线性特性, 可以采用分析渐变折射率波导用的多层分割法[8, 9]分析芯区的模场, 其要点是将分析多层波导所采用的传递矩阵(转移矩阵)法或与之等价的递推方法推广, 用以导出传播常数与光波功率之间的依赖关系。用多层分割法较之常用的有限元法[10]或幂级数近似法[11]等数学表达及运算步骤将均较简单明晰, 便于计算。这一方法, 适用于一般的非克尔型介质及薄膜内折射率(线性部分)非均匀的情形, 有较大的普适性。

本文给出对称与非对称三层非线性薄膜波导 TE 模的分析方法与计算公式, 所用方法也适用于 TM 模。用两个典型实例进行了数值计算, 与已有的精确数值计算结果比较, 证明计算结果完全相符, 因而本文方法是一种有效且精确的新方法。

2 理论分析与计算方法

2.1 对称非线性薄膜波导的 TE 膜

考虑半厚度为 d 的非线性薄膜, 两侧(衬底与包层)均是折射率为 n_1 的线性介质, 薄膜的折射率为 $\tilde{n}_0$, 电容率 $\tilde{n}_0^2 = n_0^2 + f(\alpha E^2)$, 其中 n_0^2 为电容率的线性项, $f(\alpha E^2)$ 为非线性项, E 为

收稿日期: 1998-01-04; 收到修改稿日期: 1998-07-03

本地的场强振幅，α 为介质的非线性系数。在一般情形下，n_0^2 可以是以坐标为自变量的函数，而函数 $f(\alpha E^2)$ 可为任意形式，对克尔型非线性介质，$f(\alpha E^2)=\alpha E^2$，其中对自聚焦介质 $\alpha>0$，对自散焦介质 $\alpha<0$。

取 x 轴垂直于薄膜－衬底的分界面，原点在薄膜中央处，于是模场场强振幅 E 所满足的亥姆霍兹方程可写为

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}^2E/\mathrm{d}x^2+k_0^2(n_1^2-N^2)E=0, && x\geqslant d\\ &\mathrm{d}^2E/\mathrm{d}x^2+k_0^2[n_0^2+f(\alpha E^2)-N^2]E=0, && d\geqslant x\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 $k_0=2\pi/\lambda$，λ 为自由空间的波长，$N=\beta/k_0$ 为模折射率(亦称有效折射率)，β 为传播常数，由对称性，上面仅写出右半区($x\geqslant 0$) 的方程。

为简化数学表达式并便于应用到一般情形，引入无量纲参数。

$$\tilde{E}=\sqrt{a}\,E,\qquad \xi=k_0x \tag{2}$$

$\tilde{E}$ 为无量纲场强振幅，ξ 为无量纲坐标，将方程(1)改写为无量纲形式:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}^2\tilde{E}/\mathrm{d}\xi^2+(n_1^2-N^2)\tilde{E}=0, && \xi\geqslant k_0d\\ &\mathrm{d}^2\tilde{E}/\mathrm{d}\xi^2+[n_0^2+f(\tilde{E}^2)-N^2]\tilde{E}=0, && k_0d\geqslant\xi\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &q^2=n_0^2+f(\tilde{E}^2)-N^2\\ &p=\sqrt{N^2-n_1^2}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

并将区间 $(0,d)$ 分割成 s 层，每层厚度均为 $b=d/s$，各界面的坐标各为 $x_j=jb(\xi_j=jk_0b)$，$(j=0,1,\cdots,s)$。因 q^2 是场强振幅的函数，一般情况下无法写出薄膜内场分布函数的显示式。不过，当层数 s 足够大时，可以近似认为各层内折射率为常数，折射率值依赖于层内的场强(平均) 值，于是，薄膜内的场分布函数即可分层写出，在这种多层分割近似下，场分布函数 $\tilde{E}(\xi)$ 可以写成:

薄膜区内 $(\xi\leqslant k_0d)$

$q^2>0$ 情形下

$$\tilde{E}_j(\xi)=A_j\cos q_j[\xi-(j-1)k_0b]+B_j\sin q_j[\xi-(j-1)k_0b] \tag{5a}$$

其中

$$q_j=[n_0^2+f(\tilde{E}^2)-N^2]^{1/2}$$

$q^2<0$ 情形下

$$\tilde{E}_j(\xi)=\bar{A}_j\cosh\bar{q}_j[\xi-(j-1)k_0b]+\bar{B}_j\sinh\bar{q}_j[\xi-(j-1)k_0b] \tag{5b}$$

其中

$$\bar{q}_j=\sqrt{N^2-n_0^2-f(\tilde{E}^2)},\qquad (j=1,2,3,\cdots,s)$$

在包层区 $(\xi\geqslant k_0d)$

$$\tilde{E}_s(\xi)=C\exp[-p(\xi-k_0d)],\qquad \xi\geqslant k_0d \tag{5c}$$

方程组(5)可用递推法借助边界条件求解。这里应指出，本文采用的方法是把适用于线性波导的传递矩阵法或与之等价的递推算法推广应用到非线性波导导模的分析，其不同处只是各矩阵元或相应地各个系数 A_j、B_j($\bar{A}_j$、$\bar{B}_j$) 是本地场强振幅 $\tilde{E}$ 的函数，故不妨称为多层分割法或推广的传递矩阵法。

本文首次提出将多层分割法推广于非线性波导，其合理性可能引起怀疑，认为各薄层内的折射率为场强的函数，因而列出方程组(5)不合理。解释如下。对于特定的模场，波导各点场强振幅均有相应的确定值，从而各处的折射率亦有确定值。因此，可以设定某一点的场强

振幅值以求出各处的场强振幅值, 例如, 将薄膜内场强振幅最大值 E_m[或薄膜 – 衬底界面上的场强振幅值 $E(0)$] 作为已给值(自变量), 于是, 由场强及其导数的连续性, 即可近似地把紧邻该点在右侧的一薄层看作均匀介质, 其(平均) 折射率取为场强振幅等于 E_m[或 $E(0)$] 时折射率之值, 由连续条件[参看后面的(6) 式、(7) 式] 求得该薄层内的 $q_j(\bar{q}_j)$ 值及系数 A_j、$B_j(\bar{A}_j$、$\bar{B}_j)$, 然后由此求得该薄层右端的场强振幅, 用以得了下一个薄层内平均折射率的近似值, 以求得 $q_{j+1}(\bar{q}_{j+1})$ 值及系数 A_{j+1}、$B_{j+1}(\bar{A}_{j+1}$、$\bar{B}_{j+1})$, 依次递推, 即可由已给的 E_m[或 $E(0)$] 值逐层地求得各薄层的 $q_j(\bar{q}_j)$、A_j 和 $B_j(\bar{A}_j$ 和 $\bar{B}_j)$ 值。显然, 当每一薄层足够薄时, 这种递推算法可以得到足够精确的结果。这里可以指出, 这一递推方法在数学上等价于用分段积分法求解非线性微分方程, 因而在数学上是严格地成立的。事实上, 后面给出的计算实例也验证了本文方法的适用性与精度。

为求相应于给定导波功率值的模折射率 N 及模场分布, 可把薄膜内最大场强振幅 E_m 作为自变量进行计算, 当求得模折射率 N 以后, 即可由场分布求出导波总功率 P 以得出 N–P 依赖关系, 为节省篇幅, 以下仅给出求解模折射率 N 与薄膜内最大功率密度(相对值) $W_m = \alpha E_m^2/2 = \tilde{E}_m^2/2$ 之间依赖关系的方法。

对于偶模(TE_0, TE_2, ……), E_m 即等于薄膜中央($x = 0$) 处的场强振幅, 为计算 N–W_m 依赖关系, 对给定的 W_m, 可取 $x = 0$ 处 $E = E_m$, 即 $\xi = 0$ 处 $\tilde{E} = \tilde{E}_m$, 于是 $q_1^2 = N^2 - n_0^2 - \tilde{E}_m^2$, 而

$$A_1 = \tilde{E}_m, \qquad B_1 = 0, \qquad (q_1^2 > 0) \tag{6}$$

或

$$\bar{A}_1 = \tilde{E}_m, \qquad \bar{B}_1 = 0, \qquad (q_1^2 < 0)$$

利用分界面处 $\tilde{E}$ 及 $d\tilde{E}/d\xi$ 均连续的边界条件, 在 $q_j^2 > 0$ 情况下, 可得

$$\left.\begin{aligned} A_{j+1} &= A_j \cos k_0q_jb + B_j \sin k_0q_jb \\ B_{j+1} &= \frac{q_i}{q_{j+1}}(-A_j \sin k_0q_jb + B_j \cos k_0q_jb) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中

$$q_j = \sqrt{n_0^2 + f(\tilde{E}_j^2) - N^2}$$

对于克尔型介质, $f(\tilde{E}_j^2) = \tilde{E}_j^2$。在层数 s 足够大的情况下, 由(5) 式可得第 $j+1$ 层的场强振幅近似值。

$$\tilde{E}_{j+1} = \tilde{E}_j(jk_0b) = A_j \cos k_0q_jb + B_j \sin k_0q_ib = A_{j+1}$$

于是由 A_1、B_1、q_1 可得 A_2、B_2、q_2, 由 A_j、B_j、q_j 可得 A_{j+1}、B_{j+1} 及 q_{j+1}, ……。在 $q_j^2 < 0$ 情况下, 同样可得

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_{j+1} &= \bar{A}_j \cosh k_0\bar{q}_jb + \bar{B}_j \sinh k_0\bar{q}_jb \\ \bar{B}_{j+1} &= \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_{j+1}}(\bar{A}_j \sinh k_0\bar{q}_jb + \bar{B}_j \cosh k_0\bar{q}_jb) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$\bar{q}_j = \sqrt{N^2 - n_0^2 - f(\tilde{E}_j^2)}, \qquad \tilde{E}_{j+1} = \bar{A}_{j+1}$$

于是由 $\bar{A}_1$、$\bar{B}_1$、$\bar{q}_1$ 可得 $\bar{A}_2$、$\bar{B}_2$、$\bar{q}_2$, 由 $\bar{A}_j$、$\bar{B}_j$、$\bar{q}_j$ 可得 $\bar{A}_{j+1}$、$\bar{B}_{j+1}$、$\bar{q}_{j+1}$, …($j = 2, 3, \cdots, s-1$) 。

在薄膜–包层分界面处 ($x = d$, $\xi = k_0\alpha$), 由 $\tilde{E}_m$ 及 $d\tilde{E}_m/d\xi$ 连续的条件得到

$$\frac{B_s}{A_s} = -\frac{p - q_s \tan(q_sk_0b)}{q_s + p\tan(q_sk_0b)}, \qquad (q_s^2 > 0) \tag{10a}$$

或

$$\frac{\bar{B}_s}{\bar{A}_s} = \frac{p + \bar{q}_s \tanh(\bar{q}_sk_0b)}{q_s + p\tanh(\bar{q}_sk_0b)}, \qquad (q_s^2 < 0) \tag{10b}$$

这样, 对已给的 $k_0d = 2\pi d/\lambda$ 及最大功率密度 W_m, 若所取的模折射率 N 的尝试值能使由递推

法求得的 B_s/A_s(或 $\bar{B}_s/\bar{A}_s$) 值满足上式，即得到所求的模折射率，于是导膜的本征方程得解。

对于奇模(TE_1 等)，在 $x=0$ 处 $E=0$，场强振幅极值 E_m 是在 $(0, d)$ 区间内，计算方法可作适当改动。先设场强极值 E_m 位于 $x=s_1d/s(s_1<s)$ 处，由 $q_{s_1}^2=N^2-n_0^2-\tilde{E}_m^2ey$ $A_{s_1}=\tilde{E}_m$，$B_{s_1}=0$(或 $\bar{A}_{s_1}=\tilde{E}_{s_1}$，$\bar{B}_{s_1}=0$) 用递推法，由模折射率 N 的尝试值依次求出 q_{j-1}、A_{j-1}、B_{j-1}(或 $\bar{q}_{j-1}$、$\bar{A}_{j-1}$、$\bar{B}_{j-1}$)$(j=s_1, s-1, \cdots, 2)$ 以满足在 $x=0$ 处 $E_1=0$ 时的 s_1 值，然后用递推法依次求出 q_{j+1}、A_{j+1}、B_{j+1}(或 $\bar{q}_{j+1}$、$\bar{A}_{j+1}$、$\bar{B}_{j+1}$) 以满足在薄膜-包层分界面处 B_s/A_s(或 $\bar{B}_s/\bar{A}_s$) 的关系式(10)。

2.2　非对称非线性薄膜波导的 TE 模

考虑三层非线性平板波导，设非线性薄膜厚度为 d，折射率为 $\tilde{n}_0[\tilde{n}_0^2=n_0^2+f(\alpha E^2)]$，线性衬底及线性包层的折射率各为 n_1 与 n_2。为分析 TE 模，可仿照前述方法列出亥姆霍兹方程，计算方法基本相同，区别处只是在非对称情况下，坐标原点可取在薄膜-衬底界面处并以该处的场强振幅 $E(0)$ 或相应的功率密度(相对值) $W_0=\alpha[E(0)]^2/2=[\tilde{E}(0)]^2/2$ 为自变量进行计算较为便利，场分布函数 $\tilde{E}(\xi)$ 在薄膜区的表达式不变，而衬底与包层区的场分布函数则可分布写为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{E}_0(\xi)&=C_1\exp p_1\xi, && \xi\leqslant 0\\ \tilde{E}_{s+1}(\xi)&=C_2\exp[-p_2(\xi-k_0d)], && \xi\geqslant k_0d\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中，

$$p_1=\sqrt{N^2-n_1^2},\qquad p_2=\sqrt{N^2-n_2^2}$$

而

$$A_1=\tilde{E}(0)=\sqrt{2W_0},\qquad \text{或}\qquad \bar{A}_1=\tilde{E}(0)=\sqrt{2W}\tag{12}$$

在 $\xi=0$ 处的连续性条件给出

$$B_1=(p_1/q_1)A_1=(p_1/q_1)\sqrt{2W_0},\qquad q_1^2>0\tag{13a}$$

或

$$\bar{B}_1=(p_1/\bar{q}_1)\bar{A}_1=(p_1/q_1)\sqrt{2W_0},\qquad q_1^2<0\tag{13b}$$

在 $\xi=k_0d$ 处的连续性条件给出

$$\frac{B_s}{A_s}=-\frac{p_2-q_s\tan(q_sk_0b)}{q_s+p_2\tan(q_sk_cb)},\qquad q_s^2>0\tag{14a}$$

或

$$\frac{\bar{B}_s}{A_s}=\frac{p_2+\bar{q}_s\tanh(\bar{q}_sk_0b)}{q_s+p_2\tanh(q_sk_0b)},\qquad q_s^2<0\tag{14b}$$

用基本上相同的递推方法即可得到 N-W_0 的依赖关系，并进而求得相应的模场分布及总功率 P，得出模折射率 N 随总功率变化的 N-P 关系。

3　计算实例

对两个典型实例，给出非线性薄膜波导 TE 波传播特性的一些数值结果，并与其它方法进行比较，以说明本文方法的有效性与精确性。所举实例中，薄膜均为克尔型的、折射率均匀分布的非线性介质，但本文方法同样适用于折射率渐变的非克尔型薄膜波导，因而较之其它仅适用于克尔型、可饱和型等非线性介质的方法有较大的适用性，而无需对特定情况采用特定的计算公式。

3.1　对称克尔型薄膜波导

取非线性薄膜的线性折射率 $n_0=1.52$，衬底与包层的折射率 $n_1=1.50$，分别对自聚焦情形及自散焦情形进行实例计算。取薄膜内光功率密度最大值 $W_m=|\alpha|E_m^2/2=0.01, 0.02,$

对偶模和奇模的色散特性进行计算，求得模折射率 N 与归一化频率 k_0d(d 为薄膜的半厚度)的依赖关系，并与文献[4, 6, 7]中(采用重整化微扰方法)的数值结果进行比较，结果完全一致，相差在 10^{-4} 以内，如表 1(自聚焦情形)与表 2(自散焦情形)所给(部分)数值结果所示。

Table 1. Dispersion characteristics of a symmetric waveguide with Kerr-type core ($\alpha > 0$), $n_0 = 1.52$, $n_1 = 1.50$, $W_m = \alpha E_m^2/2$ relative value of maximum power denslty, d: half-width of the film. (1) The present method, (2) Methods used in Ref. [4] and [6]

TE₀ mode $W_m = 0.010$

k_0d	2.5	5.0	7.5
(1)	1.5080	1.5151	1.5188
(2)	1.5080	1.515	1.5188

TE₀ mode $W_m = 0.020$

k_0d	2.5	5.0
(1)	1.5110	1.5194
(2)	1.5110	1.5193

TE_1 mode $W_m = 0.010$

k_0d	7	7.5	10.0	12.5	15.0
(1)	1.5021	1.5035	1.5094	1.5135	1.5161
(2)	1.5020	1.5033	1.5091	1.5132	1.5159

TE_1 mode $W_m = 0.020$

k_0d	6.0	7.0	7.5	10.0
(1)	1.5014	1.5048	1.5068	1.5134
(2)	1.5013	1.5046	1.5062	1.5131

TE_2 mode $W_m = 0.010$

k_0d	12.0	12.5	13.75	15.0
(1)	1.5004	1.5012	1.5036	1.5059
(2)	1.5004	1.5012	1.5036	1.5057

TE_2 mode $W_m = 0.020$

k_0d	11.5	12.5	13.75	14.0	15.0
(1)	1.5018	1.5043	1.5073	1.5079	1.5100
(2)	1.5016	1.5041	1.5071	1.5073	1.5097

Table 2. Dispersion characteristics of a symmetric wave guide with Kerr-type core ($\alpha < 0$)

TE_0 mode $k_0d = 15$

W_m	0.010	0.020	0.030
(1)	1.5151	1.5092	1.5002
(2)	1.5156	1.5090	1.5007

TE_1 mode $k_0d = 15$

W_m	0.010	0.015	0.020	0.025
(1)	1.5067	1.5043	1.5021	1.5004
(2)	1.5069	1.5047	1.5027	1.5007

3.2 非对称克尔型薄膜波导

取薄膜折射率 $\tilde{n}_0$ 的线性部分 $n_0 = 2.00$，衬底折射率 $n_1 = 1.50$，包层折射率 $n_2 = 1.00$，对自聚焦情形下的 TE_0 模及 TE_1 模的色散特性进行了实例计算。取 $k_0d = 2\pi\lambda/d = \pi$(即薄膜厚度 $d = 2\lambda$)，令衬底－薄膜交界面处的光功率密度(相对值) $W_0 = \alpha E_0^2/2$，其中 E_0 为该交界面处的场强振幅，计算了相应于 $W_0 = 0.005, 0.010, 0.015, 0.020, 0.025$ 五个给定值的 TE_0 模及 TE_1 模的模折射率 $N = \beta/k_0$，并与文献[7]中已有的数值结果进行比较，如表 3 所示，可见数值结果符合甚好。

Table 3. Disperison characteristics of an asymmetric waveguide with Kerr-type core ($\alpha > 0$), $n_0 = 2.00$, $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1.00$, $k_0d = \pi$, $W_0 = \alpha E_0^2/2$: relative value of power density at substrate-film interface. (1) The present method, (2) Methods used in Ref [7]

mode	$W_0 = \alpha E_0^2/2$	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
TE_0	(1)	1.8830	1.8910	1.8980	1.9070	1.9150
	(2)	1.8330	1.8910	1.8980	1.9065	1.9144
TE_1	(1)	1.5249	1.5260	1.5277	1.5290	1.5305
	(2)	1.5248	1.5263	1.5276	1.5289	1.5303

参 考 文 献

[1] Seaton C T, Mai Xu, Stegeman G I *et al.*. Nonlinear guided wave applications. *Opt. Engng.*, 1985, **24**(4): 593~ 599

[2] Mihalache D, Bertolotti M, Sibilia C. Nonlinear wave propagation in planar guides. *Progress in Optics* [illegible], New York: Elsevier Publishers, 1989. chapter [illegible], 252~ 274

[3] Boardman A D, Egan P. Optically nonlinear waves in thin films. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1986, **QE-22**(2): 319~ 324

[4] Ogusu K. TE waves in a symmetric dielectric slab waveguides with a Kerr-like nonlinear permittivity. *Opt. & Quantum Electron.*, 1987, **19**(1): 65~ 72

[5] 陈智浩. 非线性对称平板波导 TE 模色散特性的近似计算. 光子学报, 1993, **22**(1): 77~ 83

[6] 余守宪. 对称非线性薄膜波导 TE 模的色散特性. 量子电子学, 1996, **13**(1): 81~ 85

[7] 余守宪. 克尔型非线性薄膜波导的 TE 模. 光学学报, 1997, **17**(12): 1703~ 1708

[8] Adams A J. *An Introduction to Optical Waveguides*. New York: John Wiley, 1981

[9] 余守宪, 谢峰潮. 金属包层渐变折射率介质光波导的传输特性. 光学学报, 1993, **13**(4): 356~ 361

[10] Hayata K, Nagai H. Koshiba. Finite element formulation for nonlinear slab-guided waves. *Microwave Theory & Technique*, 1988, **MTT-36**(7): 1207~ 1215

[11] Sammut B A. Nonlinear planar wareguides with graded-index core: Power series solution. *Opt. & Quant. Electron.*, 1994, **26**(1): S301~ S310

Dispersion Characteristics of TE Modes in Nonlinear Slab Guides: Stratification Method

She Shouxian

(*Department of Physics, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044)

(Received 4 January 1998; revised 3 July 1998)

Abstract A novel stratification method (staircase approximation method) is presented to analyse dispersion characteristics of nonlinear slab sandwitched between linear substrate and linear cladding. Recursion formulas which are equivalent to extended transfer matrix method are used to calculate the dependence of propagation constant on power density. The method can be applied to non-Kerr type films as well as slab guide with graded-index. Computed results for typical examples are in good agreement with the exact results reported in literatures.

Key words nonlinear optical waveguides, dispersion relations, stratification method.