

改进 WKB 方法与相移值的修正

余守宪

(北方交通大学物理系, 北京 100044)

摘 要 利用非均匀波导的多层分割法, 对传统 WKB 法的相移值进行修正, 导出了改进的 WKB 计算公式, 并给出相移修正值的计算公式。对常见的典型折射率剖面(指数型、高斯型、余误差型、截断线型)的数值计算表明, 该方法所得公式的精度远高于传统的 WKB 近似, 在接近截止时仍与精确数值十分吻合。

关键词 非均匀波导, WKB 方法, 相移。

1 引 言

传统的 WKB 近似法常用于计算渐变折射率平面波导导模的传播常数。但这仅在折射率缓变及波导线度远大于光波长的情况下才能给出合理的精度, 而在截止区误差却较大^[1, 2]。已有关于改进 WKB 近似法的一些报道^[3~6], 但一般不便于实际应用^[3~5], 或未能给出较简明的类似于 WKB 近似的改进公式。近年来, 曹庄琪等人^[7~9]的研究表明, 考虑一次反射波对相位的贡献, 所导出的一种改进 WKB 近似的新方法, 在近截止区能给出合理的精度。

本文按照非均匀波导导模特性分析的多层分割分析法^[2, 10](等效于转移矩阵法)的思路, 对传统 WKB 法所采用的相移值进行修正, 给出了任意折射率剖面情况下计算相移修正值的公式, 从而导出了计算传播常数的改进的 WKB 法计算公式。

对常见的典型折射率剖面(指数型、高斯型、余误差型、截断线型)的非对称平面波导及截断线型对称平面波导进行了数值计算。结果表明, 本文方法所求得的结果在十分宽广的范围内(直到接近截止), 均与精确数值计算结果十分吻合, 其精度远高于传统的 WKB 近似。

2 WKB 近似的改进——相移值的修正

图 1 表示非对称渐变折射率平面波导的折射率剖面, n_0 、 n_2 分别为波导覆盖层与衬底的折射率, n_1 为波导表面处的折射率, $n_1 > n_2 > n_0$, 折射率的分布可用统一的表达式表示为

$$\left. \begin{aligned} n^2(x) &= n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)f\left(\frac{x}{d}\right), & x > 0 \\ n^2(x) &= n_0^2, & x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $f(x/d)$ 为 x 的单调下降函数, $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$, d 标志折射率渐减的特征长度。几

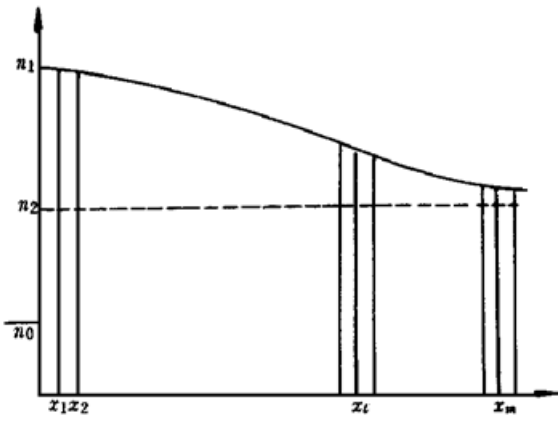


Fig. 1 Refractive index profile for asymmetric planar waveguides

种常见的典型的折射率剖面为: 1) 指数型: $f(x/d) = \exp(-x/d)$; 2) 高斯型: $f(x/d) = \exp(-x^2/d^2)$; 3) 余误差型: $f(x/d) = \operatorname{erfc}(x/d)$; 4) 线型(截断): $f(x/d) = 1 - x/d, x \leq d; f(x/d) = 0, x > d$ 。

为使所导出的结果有通用性, 定义归一化参数如下

$$\begin{aligned} v &= k_0 d (n_1^2 - n_2^2), & (\text{归一化波导宽度}) \\ b &= (N^2 - n_2^2) / (n_1^2 - n_2^2), & (\text{归一化传播常数}) \\ \alpha &= (n_2^2 - n_0^2) / (n_1^2 - n_2^2), & (\text{波导非对称参数}) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 为真空中光波的波长, $N = \beta/k_0$ 为波导导模的模折射率(有效折射率), β 为传播常数, $(n_2^2 - n_0^2) \gg (n_1^2 - n_2^2)$ 时, 非对称参数 $\alpha \gg 1$, 相应于强非对称波导情况。

将渐变折射率波导看作折射率逐层改变的无限多层均匀薄膜, 以下按照多层分割法(与转移矩阵法等效)的思路, 导出改进 WKB 法的导模色散特性的计算公式。

如图 1 所示, 取转折点处的 x 坐标为 x_t , x_t 为方程 $N^2 - [n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)f(x_t/d)] = 0$ 之解, 并设当 $x \geq x_m$ 时波导折射率可认为是均匀的[即 $x \geq x_m$ 时, $f(x/d) \approx 0$, 例 m 可取 $f(x_m/d) = \epsilon, \epsilon = 10^{-4}$]。将区间 $(0, x_t)$ 分成宽度为 h 的 l 等分, 则各分界面的坐标为 $x_i = ih (i = 1, 2, \dots, l)$, 并将区间 (x_t, x_m) 也分成宽度为 h 的 m 等分, 把 $x > x_t$ 各层分界面的坐标取为 $x_i = x_t + ih (i = 1, 2, \dots, m)$ 。令

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= k_0 \sqrt{N^2 - n_0^2}, & k(x) &= k_0 \sqrt{n^2(x) - N^2}, & p(x) &= k_0 \sqrt{N^2 - n^2(x)} \\ K_i &= k\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), & p_i &= p\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

于是场分布函数可写为

$$\left. \begin{aligned} E &= A_0 \exp p_0 x, & x &\leq 0 \\ E &= A_i \cos [K_i(x - x_i) + \theta_i], & (i-1)h &\leq x \leq ih, & (i = 1, 2, \dots, l) \\ E &= C_i \{ \exp [-p_i(x - x_i)] - \delta_i \exp [p_i(x - x_i)] \}, & x_t + (i-1)h &\leq x \leq x_t + ih \\ & & (i = 1, 2, \dots, m) \\ E &= C_{m+1} \exp [-p_{m+1}(x - x_m)], & x &\geq x_t + mh \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

为对 TE 模推导改进 WKB 法的计算公式, 可由 E 及 dE/dx 的连续条件得出以下递推公式(TM 模可仿此进行, 从略)

$$\theta_1 = M\pi + K_1 h - \arctan \frac{p_0}{K_1}, \quad M = 0, 1, 2, \dots \quad (5a)$$

$$\theta_2 = K_2 h + \theta_1 - [\theta_1 - \arctan \left(\frac{K_1}{K_2} \tan \theta_1\right)] \quad (5b)$$

...

$$\theta_i = K_i h + \theta_{i-1} - [\theta_{i-1} - \arctan \left(\frac{K_{i-1}}{K_i} \tan \theta_{i-1}\right)], \quad (i = 2, 3, \dots, l) \quad (5c)$$

$$\theta_l = \arctan \left[\frac{p_l \exp(2p_l h) + \delta_l}{K_l \exp(2p_l h) - \delta_l} \right] \quad (5d)$$

$$\delta_i = \frac{p_{i+1} p_{i+1} Z_{i+1} - p_i}{p_i p_{i+1} Z_{i+1} + p_i}, \quad Z_{i+1} = \frac{\exp(2p_{i+1}h) + \delta_{i+1}}{\exp(2p_{i+1}h) - \delta_{i+1}}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5e)$$

$$\delta_m = \frac{p_{m+1} - p_m}{p_{m+1} + p_m} \quad (5f)$$

$M = 0, 1, 2, \dots$ 分别相应于 TE_0, TE_1, TE_2, \dots 模。

(5b)、(5c) 式中列出括弧项 $[\theta_{i-1} - \arctan(\frac{K_{i-1}}{K_i} \tan \theta_{i-1})]$ ($i = 2, 3, \dots, l$), 是为了便于对 WKB 法中的相移计算进行修正。注意到, 这些小项 $\theta_{i-1} - \tan^{-1}(\frac{K_{i-1}}{K_i} \tan \theta_{i-1})$ 是波导折射率渐变所附加的相移值(在均匀波导情况下, $K_{i-1} = K_i$, 这些项均等于零), 故可借助微扰法求得它们的近似值, 从而对 WKB 法所采用的相移近似公式进行修正, 为简便计, 仅以 TE_0 模为例。

将(5a)、(5b)、(5c) 各式相加(对 TE_0 模, 取 $M = 0$), 得

$$\theta_i = \sum_{j=1}^i K_j h - \arctan \frac{p_0}{K_1} - \varphi \quad (6)$$

其中
$$\varphi = \sum_{j=2}^i [\theta_{j-1} - \arctan(\frac{K_{j-1}}{K_j} \tan \theta_{j-1})] \quad (6a)$$

用微扰法计算各个相移修正值 φ 。在零级近似中, 取 θ_i 的零级近似值

$$\theta_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i K_j h - \arctan \frac{p_0}{K_1}$$

代入(6a) 式即得 φ 的零级近似值

$$\varphi^{(0)} = \sum_{j=2}^i [\theta_{j-1}^{(0)} - \arctan(\frac{K_{j-1}}{K_j} \tan \theta_{j-1}^{(0)})]$$

为提高计算精度, 可再取 θ_i 的一级近似值

$$\theta_i^{(1)} = \sum_{j=1}^i K_j h - \arctan \frac{p_0}{K_1} - \varphi^{(0)}$$

从而求得 φ 的一级近似值

$$\varphi^{(1)} = \sum_{j=2}^i [\theta_{j-1}^{(1)} - \arctan(\frac{K_{j-1}}{K_j} \tan \theta_{j-1}^{(1)})]$$

其余类似。实际计算表明, 求至一级或二级近似已能保证必要的计算精度, 且计算较简便。这样, 就求得了 θ_i 的计算式

$$\theta_i = \sum_{j=1}^i k_j h - \arctan \frac{p_0}{k_1} - \varphi \quad (7)$$

其中
$$\varphi = \sum_{j=2}^i [\theta_{j-1} - \arctan(\frac{K_{j-1}}{K_j} \tan \theta_{j-1})] \quad (7a)$$

可由微扰近似法求得。另一方面, 由(5f)、(5e)、(5d) 各式, 对选定的 m 值依次求得 $\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1$, 最后得到 θ_i 值, 它应与由(7) 式、(7a) 式算得的 θ_i 值相符。这样, 若所取模折射率 N 的尝试值能满足上述场分布与连续条件的要求, 即可求得本征值问题的解。

所以, 当波导参数 (n_0, n_1, n_2, d) 或相应的归一化波导参数 (v, α) 给定时, 即可按上述方法(对各种折射率剖面) 求得相应的模折射率 $N = \beta/k_0$ 或相应的归一化传播常数 b , 得到所求的色散关系。

将(7) 式与 WKB 近似中的相应公式(对于 TE_0 模, 取 $M = 0$)

$$\int_0^{x_1} K(x) dx = \arctan \frac{p_0}{K_1} + \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

对比(对强非对称渐变波导, $\arctan(p_0/K_1) = \pi/2$, 上式右边等于 $3\pi/4$), 可以看出, $\sum_{j=1}^l K_j h$ 与 $\arctan(p_0/K_1)$ 之差即为对 WKB 近似法所给出的相移值 $\pi/4$ 的修正值。具体实例计算(见后面)表明, 仅在远离截止情况下, 相移值才近似于 $\pi/4$ 。通常, 该值大体在 $\pi/6$ 与 $\pi/4$ 之间。离截止点越近, 相移值越小, 而修正的情况则因折射率剖面的不同而不同。大体说来, 折射率的空间变化率越大, WKB 法所得结果偏离精确越大, 因而相移值的修正对近截止区十分重要。

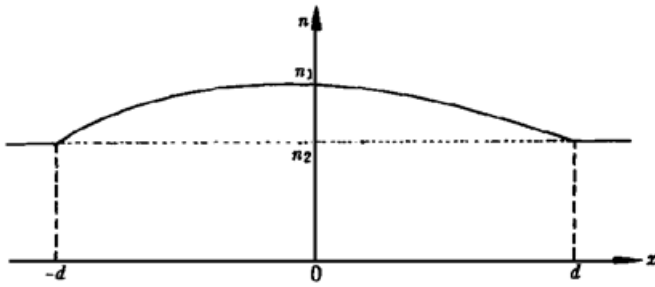


Fig. 2 Refractive index profile (truncated) for symmetric planar waveguides

以上是对非对称渐变波导而言的。不难看出, 如图 2 所示的对称渐变波导, 对于偶模, 只须对 (4) 式所给区间 $(0, h)$ 内场函数式中取 $\theta_1 = M\pi + K_1 h$ (对 TE 模, 取 $M = 0$), 并相应地在以上各公式中将 $\arctan(p_0/K_1)$ 换为零进行计算; 对于奇模(例如 TE₁ 模), 可取 $\theta_1 = M\pi + K_1 h + \pi/2$, 并相应地在以上各式中将 \arctan

p_0/K_1 换为 $\pi/2$ 进行计算, 即可求得色散关系。

3 数值结果与讨论

为了检验用本文方法求色散关系的精确度, 对几种典型的折射率剖面进行了实例计算。为简明起见, 基于基模的重要性, 仅对 TE₀ 模给出计算结果。对于非对称渐变折射率波导, 取参数 $n_0 = 1.0$ (空气), $n_2 = 2.177$, $n_1^2 - n_2^2 = 0.187$, 即非对称参数 $\alpha = 20.00$, 使之便于与已有文献[11] 报道的结果进行比较。应指出, 所给结果, 对 $\alpha = 20.00$ 的波导都是通用的, 与折射率 n_0 、 n_1 、 n_2 的具体数值无关。对于强非对称渐变折射率波导, 取 $\arctan(\beta_0/k_1) = \pi/2$ 。

表 1 至表 5 分别给出由本法所得 $b-v$ 曲线的计算值与精确数值解^[1, 2, 10] 及其它近似解法

Table 1. Exponential profile (TE₀)

v	$\alpha = 20.00$					$\alpha = \infty$		
	b					b		
	exact	this paper	AF	WKB	WKBj	exact	this paper	WKB
1.5	0.0350	0.0351	0.0350	0.0378	0.0337	0.0178	0.0178	0.0205
2.0	0.1050	0.1050	0.1050	0.1086	0.1040	0.0791	0.0791	0.0831
2.5	0.1714	0.1714	0.1715	0.1753	0.1710	0.1433	0.1433	0.1476
3.0	0.2292	0.2292	0.2293	0.2331	0.2291	0.2010	0.2010	0.2054
3.5	0.2787	0.2787	0.2787	0.2829	0.2789	0.2513	0.2513	0.2556
4.0	0.3212	0.3212	0.3212	0.3249	0.3216	0.2950	0.2950	0.2992
5.0	0.3903	0.3903	0.3904	0.3939	0.3911	0.3666	0.3666	0.3706
6.0	0.4441	0.4441	0.4441	0.4474	0.4451	0.4226	0.4226	0.4263
7.0	0.4872	0.4872	0.4873	0.4904	0.4883	v _c	1.30	1.20
8.0	0.5228	0.5228	0.5228	0.5228	0.5239			

Table 2. Gaussian profile (TE₀)

ν	α = 20.00					α = ∞		
	b					b		
	exact	this paper	CE	WKB	WKBJ	exact	this paper	WKB
2.0	0.0817	0.0817	0.0785	0.0453	0.0923	0.0376	0.0376	0.0105
3.0	0.2750	0.2746	0.2699	0.2538	0.2747	0.2267	0.2267	0.2076
4.0	0.4133	0.4133	0.4079	0.4008	0.4125	0.3745	0.3745	0.3635
5.0						0.4786	0.4786	0.4716
ν _c						1.80	1.80	1.91

Table 3. Complementary error profile (TE₀)

ν	α = 20.00						α = ∞		
	b						b		
	exact	this paper	WKB	WKBJ	CE	HG	exact	this paper	WKB
3.0	0.0675	0.0677	0.0282	0.784	0.0642	0.0154	0.0374	0.0374	0.0281
3.5							0.0855	0.0855	0.0783
4.0	0.1694	0.1695	0.1293	0.1678	0.1644	0.1211	0.1331	0.1331	0.1293
4.5							0.1787	0.1787	0.1768
5.0	0.255	0.2556	0.2199				0.2210	0.2210	0.2199
ν _c							2.61	2.61	2.58

Table 4. Linear profile (truncated) (TE₀)

ν		3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	ν _c
b	exact	0.0056	0.0476	0.1030	0.1580	0.2090	2.80
	this paper	0.0056	0.0476	0.1030	0.1580	0.2090	2.80
	WKB	$b = 1 - (9\pi/8\nu)^{2/3}$		0.0792	0.1488	0.2065	3.53

Table 5. Symmetric linear profile (truncated) (TE₀)

ν		0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	ν _c
b	exact	0.0025	0.098	0.0560	0.1738	0.2897	0.3843	0.5149	0.5967	0.00
	this paper	0.0025	0.0098	0.0560	0.1738	0.2897	0.3843	0.5149	0.5967	0.00
	WKB	$b = 1 - (3\pi/8\nu)^{2/3}$				0.1488	0.2973	0.4638	0.5573	1.18

(WKB 法^[11]、WKBJ 法^[11]、爱里函数(AF)法^[12]、余弦指数(CE)法^[13]、厄米高斯(HG)法^[14]) 所得结果的比较。它们包括指数型、高斯型、余误差型非对称渐变折射率波导(α = 20 及 α = ∞)、线型(截断)强非对称渐变波导与对称渐变波导。

由各表可以看出, 本文方法所得结果在宽广的 ν 值范围内, 直至十分接近截止频率, 均与精确数值解完全吻合(均在 4 位或 3 位有效数字内), 本法不仅优于 WKB 法和 WKBJ 法, 而且也优于其它近似方法(非对称指数型情况与 AF 法有同一精度, 但 AF 法对其它折射率剖面是否适用, 尚未得到验证), 截止频率 ν_c 值也与精确数值解符合, 这说明了本文方法的有效性与高精度。

由各表可见, 传统的 WKB 法所求得的 b 值偏低; 但非对称指数型 b 值偏差较小且略高于精确值; 指数型与余误差型传统 WKB 法 b 值偏差较小; 而高斯型、线型则 b 值偏差较大。这种情况说明, WKB 相移值的修正与折射率的空间变化率的大小有关, 缓变程度越差, WKB

法所导致的偏差越大。

由计算结果求得 TE₀ 模(各种典型折射率剖面)的相移修正值 φ 与 WKB 法的相移值 $\pi/4$ 之比, 如表 6 所示。可见这比值(即 $4\varphi/\pi$) 一般小于 1, 仅在远截止区才接近于 1, 离截止点越近, φ 值与 $\pi/4$ 之差也越大。高斯型、余误差型及指数型, φ 值随 ν 减小而减小的程度比线型(截断)剖面要小, 这显然与在线型情况下折射率的空间变化率较大有关。

Table 6. Corrected phase shift φ

1. exponential profile										
$\alpha = 20.00, \nu_c = 1.22$										
ν	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0		
b	0.0350	0.1050	0.1714	0.2292	0.2787	0.3212	0.3903	0.4441		
$4\varphi/\pi$	1.0381	1.0357	1.0348	1.0342	1.0339	1.0337	1.0335	1.0334		
$\alpha = \infty, \nu_c = 1.30$										
ν	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0		
b	0.0178	0.0791	0.1433	0.2010	0.2513	0.2950	0.3666	0.4226		
$4\varphi/\pi$	1.0532	1.0457	1.0425	1.0410	1.0401	1.0388	1.0376	1.0372		
2. Gaussian profile										
$\alpha = 20.00$					$\alpha = \infty$					
ν	2	3	4	5	2	3	4	5		
b	0.0817	0.2750	0.4133	0.5095	0.0376	0.2267	0.3745	0.4786		
$4\varphi/\pi$	0.7908	0.8922	0.9275	0.9450	0.7759	0.8964	0.9333	0.9510		
3. Complementary error profile										
$\alpha = 20.00, \nu_c = 2.37$				$\alpha = \infty, \nu_c = 2.61$						
ν	3	4	5	3	4	5				
b	0.0677	0.1695	0.2555	0.0374	0.1331	0.2210				
$4\varphi/\pi$	0.9189	0.9694	0.9888	0.9069	0.9702	0.9921				
4. Linear profile (truncated)										
$\alpha = \infty$			symmetric							
ν	3.0	4.0	5.0	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0
b	0.0056	0.1030	0.2090	0.0025	0.0098	0.0560	0.1733	0.3843	0.5149	0.5967
$4\varphi/\pi$	0.5255	0.8848	0.9861	0.0846	0.1673	0.3894	0.6382	0.8204	0.8607	0.8699

为供实际应用, 根据所得结果得到了各种类型剖面情形下, 相移 φ 与归一化参数 ν 的依赖关系的经验公式及色散关系($b-\nu$ 依赖关系)的经验公式(适用于 TE₀ 模)。文中不再赘述。

参 考 文 献

- [1] Gedeon A. Comparison between rigorous theory and WKB-analysis of modes in graded-index waveguides. *Opt. Commun.*, 1974, **12**(4): 329~ 332
- [2] Adams M J. An Introduction to Optical Waveguides. New York: Chichester, 1981. Chapter 4, 5
- [3] Qiao Li, Wang Jingyi. A refined WKB method for planar waveguides with asymmetric graded-index profile. *Opt. Commun.*, 1991, **83**(1, 2): 144~ 153
- [4] Wang Jingyi, Qiao Li. A refined WKB method for symmetric waveguides with truncated-index profiles and graded-index profiles. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1991, **QE-27**(4): 878~ 883
- [5] Qiao Li, Jingyi Wang. A modified ray-optic method for arbitrary dielectric waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, **QE-28**(12): 2721~ 2727

- [6] Feng Xiang, Gar Lam Yip. A modified WKB method for the improved phase shift at a turning point. *J. Lightwave Technol.*, 1994, **LT-12**(3) : 443~ 452
- [7] 曹庄琪. 非均匀平板波导的色散方程. 光学学报, 1994, **14**(11) : 1223~ 1226
- [8] 曹庄琪, 詹黎, 陈英礼. 渐变折射率光波导的精确分析. 光学学报, 1994, **14**(12) : 1240~ 1243
- [9] 曹庄琪, 詹黎, 陈英礼. 改进 WKB 近似的新方法. 光学学报, 1997, **17**(11) : 1554~ 1558
- [10] 余守宪, 谢峰潮. 求解非均匀平面波导导模的一种新方法. 量子电子学, 1992, **9**(2) : 181~ 185
- [11] Ikuno H. Analysis of wave propagation in inhomogeneous dielectric slab waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, 1978, **MTT-26**(4) : 261~ 266
- [12] Goyal I C, Gallawa R L, Ghatak A K. Methods of analyzing planar optical waveguides. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(1) : 30~ 32
- [13] Mishra K, Sharma A. Analysis of single mode inhomogeneous planar waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 1986, **LT-4**(2) : 201~ 204
- [14] Korotky S K, Minford W J, Luhl L L *et al.*. Mode size and method for estimating the propagation constant of single-mode Ti:LiNbO₃ strip waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, **QE-18**(10) : 1796~ 1801
- [15] Adams M J. The claded parabolic index profile waveguide: Analysis and application to strip-geometry lasers. *Opt. & Quant. Electron.*, 1978, **10**(1) : 17~ 29
- [16] Srivastava R, Kao C K, Ramaswamy R V. WKB analysis of planar surface waveguides with truncated index profiles. *J. Lightwave Technol.*, 1987, **LT-5**(11) : 1605~ 1609

An Improved WKB Method and Correction of Phase Shift

She Shouxian

(Department of Physics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)

(Received 13 April 1998; revised 8 June 1998)

Abstract In accordance with the multilayer approach for analyzing graded-index waveguide, the WKB method is improved by correction of the phase shift term. Formulas for the improved WKB method and for calculation of phase shift are derived. Numerical results for typical refractive-index profiles (exponential, Gaussian, erfc, truncated linear) demonstrate that the present method is highly accurate up to near cut-off region.

Key words inhomogeneous waveguides, WKB method, phase shift.