

# 抽样对傅里叶变换轮廓术的影响\*

杨 虎\*\* 陈文静 陆成强 苏显渝  
(四川大学光电系, 成都 610064)

**摘 要** 以变形结构光场为研究对象, 分析抽样对傅里叶变换轮廓术测量范围的影响, 提出了实际测量中抽样频率选择的判断依据。计算机模拟和初步实验证明了理论的可靠性和可行性。

**关键词** 抽样, 频谱混叠, 傅里叶变换轮廓术。

## 1 引 言

傅里叶变换轮廓术(FTP)的工作原理由以下三步构成: 1) 光栅的结构光场对被测三维物体的面形进行光学编码, 使变形结构光场中携带三位面形的高度分布的信息; 2) 对连续分布的变形结构光场进行抽样, 获取离散信息以易于实现计算机处理; 3) 计算机对所得的离散信息进行快速傅里叶变换处理, 选择适当的滤波窗口从频谱中滤出基频分量, 对基频分量进行逆傅里叶变换还原出被测面形的高度分布。

在傅里叶变换轮廓术的前期工作中<sup>[1-4]</sup>, 人们一直按照连续函数的傅里叶变换方法来研究频谱混叠问题, 在此基础上确定了傅里叶变换轮廓术的测量范围。而在实际测量中, 傅里叶变换轮廓术方法处理的是离散分布的信息。离散信号的傅里叶谱具有周期形态, 频域中所需要的基频分量可能和相邻周期的高频分量发生混叠, 增加了重建三维面形的噪音。因此, 选择适当的抽样频率可以减少重建时的噪音。

本文着眼于变形结构光场的离散形态, 分析了抽样对傅里叶变换轮廓术的影响, 给出了抽样频率选择判断法则, 弥补了基于连续分布变形结构光场的傅里叶变换轮廓术的理论缺陷。计算机模拟和初步实验证明了理论的可靠性和可行性。

## 2 理论分析

图 1(a) 是傅里叶变换轮廓术的典型测量光路图, 图 1(b) 是测量框图。图 1(a) 中,  $P_1$  和  $P_2$  分别是投影装置的入瞳和出瞳,  $I_2$  和  $I_1$  分别是摄像装置的入瞳和出瞳,  $d$  是  $P_2$  与  $I_2$  间的距离,  $L_0$  是  $I_2$  到参考平面  $R$  间的距离,  $A$  和  $C$  是参考平面  $R$  上的两点,  $D$  是物面上的点, 光栅与图平面垂直。变形结构光场表示为

\* 国家自然科学基金资助项目。

\*\* 现通信地址: 山西师范大学物理系, 临汾 0410048。

收稿日期: 1998-01-07; 收到修改稿日期: 1998-05-27

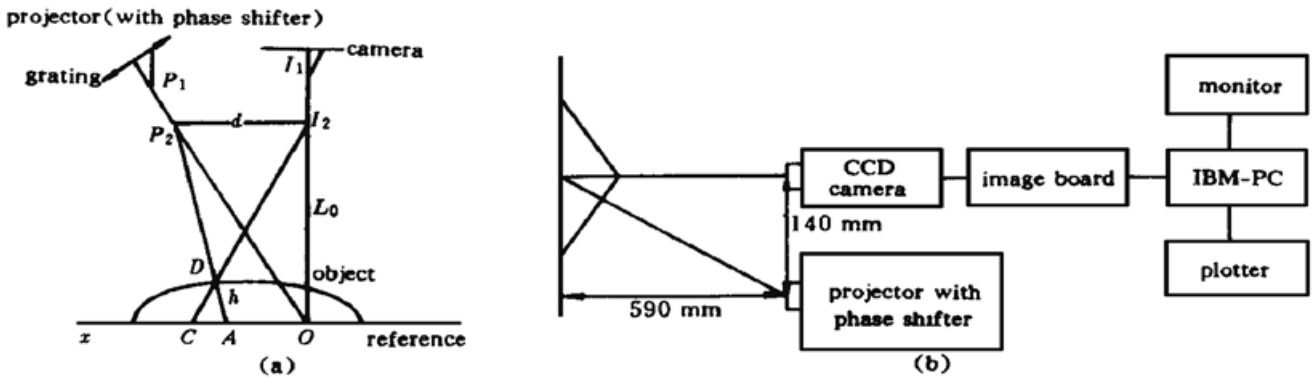


Fig. 1 (a) Optical geometry of FTP, (b) Experimental setup

$$g(x, y) = r(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp \{ i[ 2\pi n f_0 x + n\mathcal{Q}(x, y) ] \} \quad (1)$$

其中  $r(x, y)$  为物面非均匀反射率,  $\mathcal{Q}(x, y)$  为由物体高度分布  $h(x, y)$  引起的相位调制,  $b_n$  为傅里叶级数的系数;  $f_0$  为投影光栅的基频。在远心投影光路条件下, 考虑到实际测量中  $L_0 \gg h(x, y)$ , 被测物体的高度分布和调制位相的关系为<sup>[1]</sup>

$$\mathcal{Q}(x, y) \approx \Delta\mathcal{Q}(x, y) = - \frac{2\pi f_0 d}{L_0} h(x, y) \quad (2)$$

为了便于讨论  $g(x, y)$  的频谱特征, 把  $g(x, y)$  改写为

$$g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(x, y) \exp ( i2\pi n f_0 x ) \quad (3)$$

其中

$$q_n(x, y) = r(x, y) b_n \exp [ i n \mathcal{Q}(x, y) ] \quad (4)$$

而 CCD 记录下的是离散变形结构光场, 相当于是梳状函数  $\text{comb}(x/\Delta x)$  对  $g(x, y)$  的抽样, 离散分布的变形光场表示为

$$g_s(x, y) = g(x, y) \text{comb}(x/\Delta x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(x, y) \exp ( i2\pi n f_0 x ) \text{comb}(x/\Delta x) \quad (5)$$

其中  $\Delta x$  为抽样间隔,  $1/\Delta x$  即为抽样频率,  $1/\Delta x$  可以表示为  $m f_0$ ,  $m$  为一正数。对  $g_s(x, y)$  进行一维傅里叶变换得

$$G_s(f, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(f - n f_0, y) * | \Delta x | \text{comb}(f \Delta x) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(f - n f_0 - N m f_0, y) \quad (6)$$

其中  $Q_n(f, y)$  和  $G_s(f, y)$  分别是  $q_n(x, y)$  和  $g_s(x, y)$  的一维傅里叶频谱,  $N$  为频域中频谱周期的级次,  $n$  为光栅的傅里叶谱级次。(6) 式表明, 在频域内函数  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(f - n f_0, y)$  以

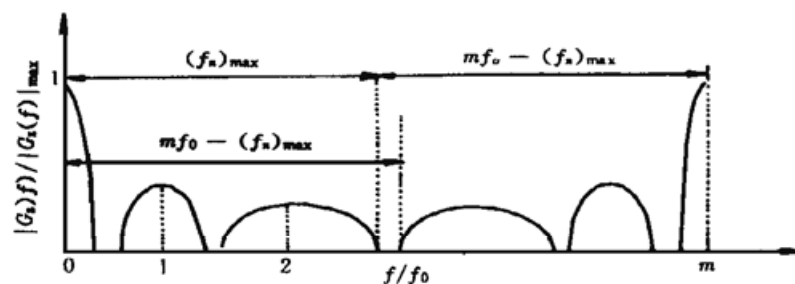


Fig. 2 Replicated spectrum distribution  $| G_s(f) |$

$m f_0$  为间隔周期性重复。可见  $m$  的取值决定了由  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(f - n f_0, y)$  表示的频谱同由  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(f - n f_0 - m f_0, y)$  表示的频谱是否发生混叠,  $m$  取得太小, 频谱间发生混叠。如图 2 所示, 粗线代表  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(f - n f_0, y)$  的右半部分, 细

线代表  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(f - nf_0 - mf_0, y)$  的左半部分。为了便于讨论, 引入一个瞬时频率<sup>[1]</sup>

$$f_n = nf_0 + \frac{n}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x} \quad (7)$$

它的最大值  $(f_n)_{\max}$  即是在  $f$  轴上  $Nmf_0$  点周围的频谱的半宽度。由频谱的对称性可知相邻周期内频谱不发生混叠的条件是

$$(f_n)_{\max} < mf_0 - (f_n)_{\max}.$$

### 3 抽样对傅里叶变换轮廓术测量范围的影响

首先考虑一个周期内基频分量与零级和高次频谱之间的分离条件<sup>[1]</sup>

$$(f_1)_{\min} > f_b \quad (8)$$

$$(f_1)_{\max} < (f_n)_{\min}, \quad n > 1 \quad (9)$$

式中  $f_b$  表示频率轴上零级频谱的最高频率,  $f_n$  表示第  $n$  级频谱。为了防止频谱出现混叠, 由高度调制引起的位相变化率必须满足

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{2}{3} \pi f_0 \quad (10)$$

将(2)式代入上式, 得到

$$\left| \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{1}{3} \frac{L_0}{d} \quad (11)$$

其次, 讨论由抽样引起的基频分量与来自相邻周期的高次频谱之间的分离条件。由于

$$(f_n)_{\max} < mf_0 - (f_n)_{\max},$$

那么

$$f_0 + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} < mf_0 - nf_0 - \frac{n}{2\pi} \left| \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} \quad (12)$$

即

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{m-n-1}{n+1} 2\pi f_0 \quad (13)$$

将(2)式代入上式, 得到

$$\left| \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{m-n-1}{n+1} \frac{L_0}{d} \quad (14)$$

可见, 最大测量范围不受高度分布  $h(x, y)$  本身的限制, 而是受到高度分布  $h(x, y)$  在与光栅栅线相垂直方向上的变化率的限制。虽然增加  $L_0/d$  可以增加测量范围, 但这意味着降低测量系统的精确度, 因此在保证测量系统的精度不变的前提下, 增加抽样频率可以提高测量系统的测量范围。

### 4 抽样频率的选择依据

基于前面的分析, 在频域内必须确保基频分量与本周期内的其他高频分量不发生混叠, 由于在一般情况下, 二次频谱的权重因子比高次频谱的权重因子大得多, 因此确保与二次频谱不发生混叠是重要的; 另一方面, 还必须确保基频分量与相邻周期的高次频谱不发生混叠。结合(11)式和(14)式, 并考虑(11)式的最大允许条件, 可以得到

$$\frac{1}{3} \frac{L_0}{d} < \frac{m - n - 1}{n + 1} \frac{L_0}{d} \quad (15)$$

即

$$m > \frac{4}{3}(n + 1) \quad (16)$$

其中  $m$  是抽样频率  $\Delta f$  相对于载波基频  $f_0$  的倍数,  $n$  是所需要考虑的影响基频分量的高次频谱级数。

由于考虑到变形结构光场的离散特性, 实际测量中, 傅里叶变换轮廓术的基本参数的选择和抽样频率选择判据归结于(11)式和(16)式, (11)式确定测量系统基本的结构参数, (16)式确定了实际测量过程中抽样频率选择, 满足(11)式和(16)式就保证了基频与本周期的二次频谱及相邻周期内的高次频谱分离。

根据(7)式和(10)式, 如基频分量的最大半宽度不超过  $f_0/3$ , 第  $n$  级频谱的最大半宽度不超过  $nf_0/3$ 。当考虑三级频谱, 即  $n = 3$  时, 根据(16)式, 有

$$m > \frac{16}{3} \approx 5.3 \quad (17)$$

当取  $m = 4$ , 不满足(16)式, 如图 3(a)所示, 相邻周期的三级频谱(虚线表示)与基频分量(实线表示)发生混叠; 当取  $m = 7$ , 满足(16)式, 如图 3(b)所示: 相邻周期的三级频谱与基频分量不发生混叠。

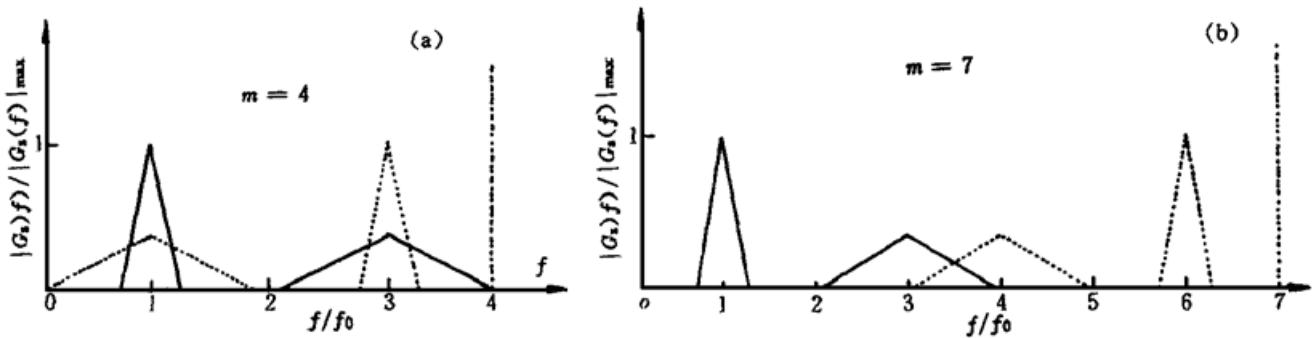


Fig. 3 Influence of sampling in FTP

## 5 模拟和实验结果

计算机模拟底边长 400 mm、高 60 mm、半径 200 mm 的球缺, 如图 4(a)所示, 罗奇(Ronchi)光栅投射到物体表面的周期为 7.1 mm, 系统的结构参数  $\frac{L_0}{d} = 5.2$ , 满足(11)式, 同一周期内频谱相互分离。由于罗奇光栅光场只有奇数级频谱分布, 取  $n = 3$ , 根据(16)式,  $m \approx 5.3$ 。当  $m = 4$ , 不满足(16)式, 相邻周期的三级频谱与基频分量发生混叠, 影响三维面形的重建, 测量的标准差  $\sigma = 2.25$ 。图 4(b)表示频谱分布, 4(c)是恢复的物体面形。当  $m = 7$ , 满足(16)式, 基频和相邻周期的三级频谱不发生混叠, 测量的标准差  $\sigma = 0.07$ , 较好地还原被测物体的面形。图 4(d)表示频谱分布, 4(e)是恢复的物体面形。

实际测量的简易装置图如 1(b), 被测物体是一个底边长 54 mm、高 27 mm 的三角形物体, 投影仪的功率为 100 W, 投影镜头的焦距为 80 mm, 罗奇光栅的周期为 2 l/mm, 图像传感器为低畸变 CCD 摄像机(MDCTM-560), 摄像镜头焦距为 16 mm, 测量系统的几何参数为:  $L = 590$  mm,  $d = 140$  mm, 摄像机所得数据经 A/D 转换后送 IBM PC586 进行处理, 恢

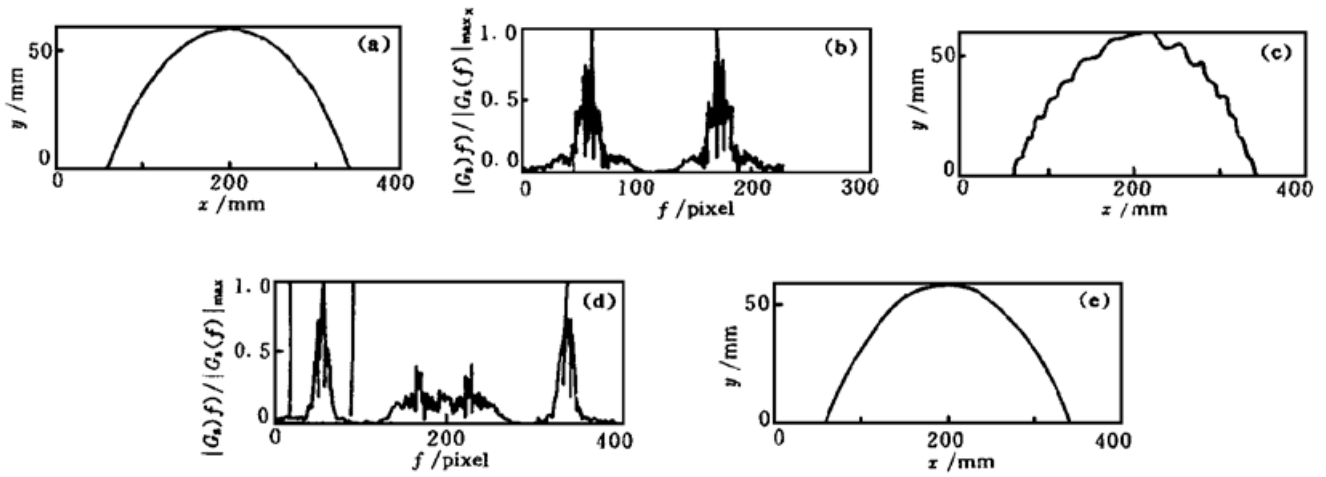


Fig. 4 (a) Simulation object, (b) Spectrum distribution when  $m = 4$ , (c) Retrieved shape when  $m = 4$ , (d) Spectrum distribution when  $m = 7$ , (e) Retrieved shape when  $m = 7$

复的面形由绘图仪绘出。(实验中采用相移技术消除变形条纹的零级傅里叶谱)。图 5 是  $m = 4$  时的频谱分布和恢复面形, 图 6 是  $m = 7$  时的频谱分布和恢复面形。

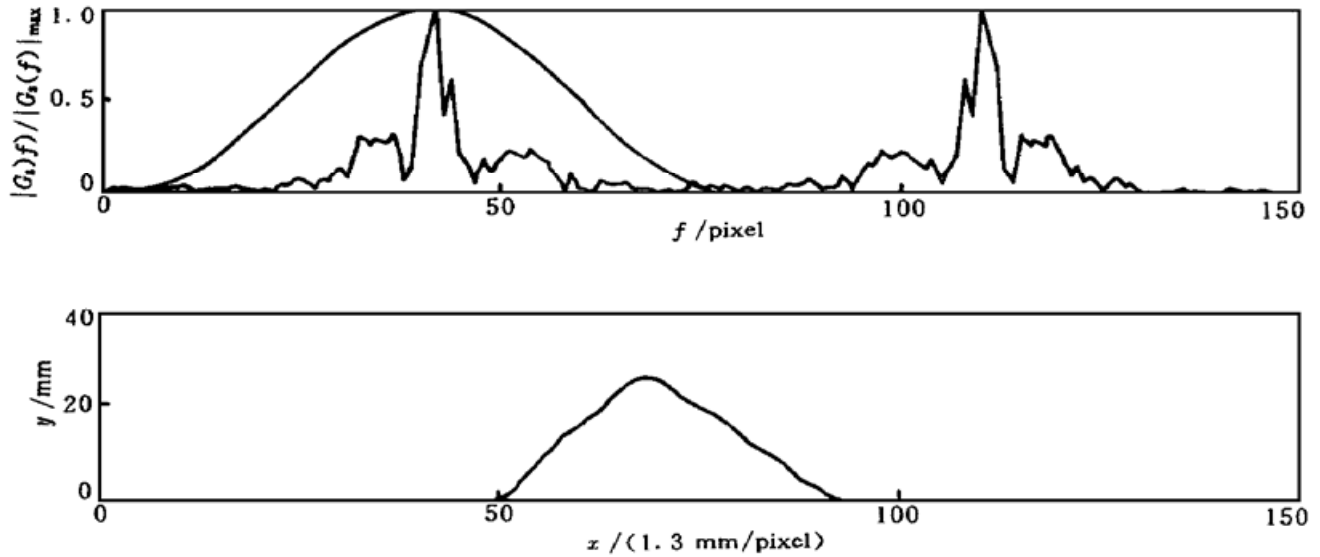


Fig. 5 Measured object's spectra and its retrieved shape when  $m = 4$

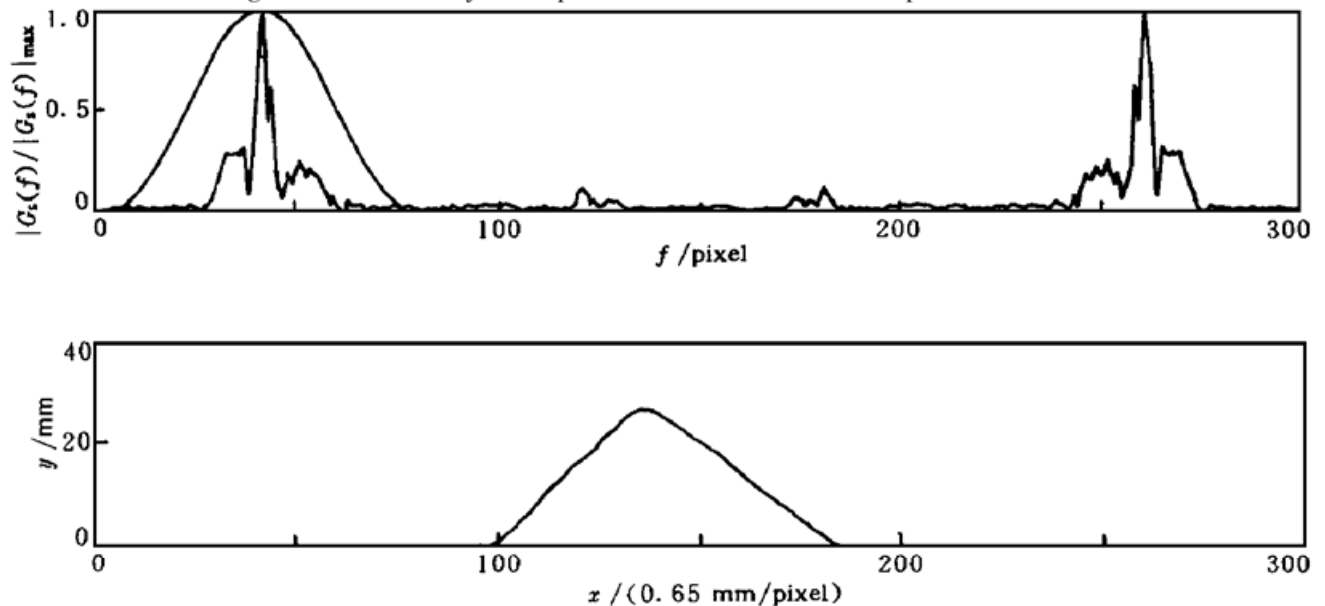


Fig. 6 Measured object's spectra and its retrieved shape when  $m = 7$

**结 论** 本文理论上分析了抽样对傅里叶变换轮廓术测量精度的影响, 提出了实际测量中抽样频率选择的判定法则, 计算机模拟和初步实验结果证明该法则在三维面形测量中具有实用价值。

### 参 考 文 献

- [1] Takeda M, Mutoh K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement 3-D object shapes. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24) : 3977~ 3982
- [2] Lin Jin-Feng, Su Xian-Lu. Two-dimensional Fourier transform profilometry for the automatic measurement of three-dimensional object shapes. *Opt. Engng.*, 1995, **34**(12) : 3297~ 3301
- [3] Su Xian-Yu, Li Jian, Guo Lu-Rong. Improved Fourier transform profilometry. *Proc. SPIE*, 1988, **954** : 32~ 35
- [4] Li Jian, Su Xian-Yu, Guo Lu-Rong. Improved Fourier transform profilometry of the automatic measurement of three-dimensional object shapes. *Opt. Engng.*, 1990, **29**(12) : 1439~ 1444

## Influence of Sampling on Fourier-Transform Profilometry

Yang Hu      Chen Wenjing      Lu Chengqiang      Su Xuanyu

(*Opto-Electronics Department, Sichuan University, Chengdu 610064*)

(Received 7 January 1998; revised 27 May 1998)

**Abstract** The phase error caused by sampling the fringe patterns in practical Fourier-transform profilometry is discussed. Another kind of spectrum overlapping is analysed that is caused by the discrete Fourier-transform (DFT). The criterion for the selection of sampling frequency is derived. The computer simulations and experiments verified the theories.

**Key words** sampling, spectrum overlapping, Fourier transform profilometry.