第 19 卷　第 6 期
1999 年 6 月

光　学　学　报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 19, No. 6
June, 1999

非线性延时修正光纤孤子方程的稳态解问题 Ⅰ. 漂移型扭结孤波解*

杨　理[1)]　刘颂豪[2)]　廖常俊[2)]

1)，中国科学技术大学研究生院(北京)信息安全国家重点实验室，北京 100039
2)，华南师范大学量子电子学研究所，广州 510631

摘　要　利用一种与 Bäcklund 变换有关的方法严格求含非线性延时项光孤立子方程，得到了该方程的漂移型扭结孤波解，并讨论了解的极限性质和相关物理问题。最后指出了该方程在 $\gamma = 0$ 处的参数不稳定性问题。

关键词　石英光纤，　非线性延时，　严格解，　孤立波。

1　引　　言

含非线性延时项 $-\gamma(|q|^2)_T q$ 的修正非线性薛定谔方程是单模石英光纤中非线性光场的基本演化方程[1]，主要用于描述光场包络线变化特征时间在亚皮秒尺度的现象[2]，也用于讨论皮秒简并孤子(呼吸子)的衰变问题[3]。引入这一项的最初动机是解释飞秒孤子的自频移现象[4~6]，但逐渐发现其效应较其它同阶修正项更为丰富且强烈而成为最重要的非线性修正项[1]。在文献[7]中作者通过分离变量的方法获得了非线性延时修正光纤孤子方程

$$\mathrm{i}q_Z + q_{TT}/2 + |q|^2 q - \gamma(|q|^2)_T q = 0 \tag{1}$$

的静态扭结孤波严格解，讨论了扭结孤波的宽度和平台功率等物理参量。本文将考虑方程(1)下述形式的稳态解

$$q(Z, T) = y(\zeta)\exp[\mathrm{i}\Phi(\xi)] \tag{2}$$

其中

$$\zeta = T - V_{\mathrm{m}}Z, \qquad \xi = T - V_{\mathrm{p}}Z$$

下面通过严格推导获得可沿 T 轴漂移的运动型扭结孤波解，并讨论相关的物理问题。

2　稳态包络线方程及其降阶问题

对方程(1)的解 $q(Z, T)$ 作行波变换(2)，得到关于 $y(\zeta)$，$\Phi(\xi)$ 的方程

$$y'' + 2\mathrm{i}(\Phi' - 2V_m)y' - 4\gamma y^2 y' + 3y^3 + \mathrm{i}\Phi'' y + (2V_p\Phi' - \Phi'^2)y = 0 \tag{3}$$

* 国家自然科学基金理论物理专款(批准号: 19677207)和安徽省自然科学基金(95-电-01)资助项目。
收稿日期: 1997-10-01; 收到修改稿日期: 1998-03-31

令(3)式左侧的虚部和实部分别等于0，给出下述两个方程

$$2(\Phi' - 2V_m)y' + \Phi'' y = 0 \tag{4a}$$

$$y'' - 4\gamma y^2 y' + 3y^3 + (2V_p\Phi' - \Phi'^2)y = 0 \tag{4b}$$

由(4a)可知，若 $\Phi' \neq 2V_m$，则有

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\Phi''}{2(\Phi' - 2V_m)} \xlongequal{\text{记}} \lambda \tag{5}$$

由于 y 仅为 ζ 的函数，而 Φ 仅为 ξ 的函数，故知 λ 必为一常数(实)。将 $y' = \lambda y$ 代入(4b)，有

$$\lambda^2 y - 4\gamma\lambda y^3 + 2y^3 + (2V_p\Phi' - \Phi'^2)y = 0 \tag{6}$$

(6)式等价于下述两个方程

$$\lambda^2 + 2V_p\Phi' - \Phi'^2 = 0 \tag{7a}$$

$$2 - 4\gamma\lambda = 0 \tag{7b}$$

由(7b)得 $\lambda = \frac{1}{2\gamma}$，但由(7a)定出 $\Phi' =$ 常数，故知 $\Phi'' = 0$，这导致 $\lambda = 0$，与 $\lambda = \frac{1}{2\gamma}$ 矛盾，故知必有 $\Phi' = 2V_m$。所以(4b)化为

$$y'' + f(y)y' + g(y) = 0 \tag{8}$$

$$f(y) = -4\gamma y^2, \qquad g(y) = 3y^3 + 4V(V_p - V_m)y$$

方程(8)为广义 Liénard 方程[8]。现将方程(8)降阶。设存在待定函数 $\varphi(\zeta)$ 满足

$$[\varphi(\zeta)g(y)]_y = \{\varphi(\zeta)[f(y) - \frac{\varphi_\zeta(\xi)}{\varphi(\zeta)}]\}_\zeta \tag{9}$$

则方程(8)的下述等价形式

$$\mathrm{d}[\varphi(\zeta)y_\zeta(\zeta)] + \varphi(\zeta)g(y)\mathrm{d}\zeta + \varphi(\zeta)[f(y) - \frac{\varphi_\zeta(\zeta)}{\varphi(\zeta)}]\mathrm{d}y = 0 \tag{10}$$

为恰当微分方程。此时存在函数 $\Psi(\zeta, y)$ 满足

$$\Psi_\zeta(\zeta, y) = \varphi(\zeta)g(y), \qquad \Psi_y(\zeta, y) = \varphi(\zeta)[f(y) - \frac{\varphi_\zeta(\zeta)}{\varphi(\zeta)}] \tag{11}$$

易见，(11)式是方程(9)到 Ψ 所满足方程的 B chlund 变换[9]。下面将证明(11)式为方程(9)本身的 B chlund 变换(自 BT)。将方程(9)展开即得

$$\varphi_{\zeta\zeta} - f(y)\varphi_\zeta + g_y\varphi = 0 \tag{12}$$

代入 $f(y)$、$g(y)$ 的具体形式，可定出

$$4V_m(V_p - V_m) = -\frac{9}{4\gamma^2} \tag{13}$$

$$\varphi(\zeta) = \exp\left(-\frac{3\zeta}{2\gamma}\right) \tag{14}$$

由(11)式可得 Ψ 满足的方程

$$\Psi_{\zeta\zeta} - [f + (\ln g)_\zeta]\Psi_\zeta + g\Psi_y = 0 \tag{15}$$

要证明(11)式为(9)式的自身的 B chlund 变换，就是要证明方程(15)与方程(12)同解。这相当于要求 Ψ 同时满足(12)式和下式

$$(\ln g)_\zeta\Psi_\zeta + (g_y - f_\zeta)\Psi - g\Psi_y = 0 \tag{16}$$

由于 $g_\zeta = f_\zeta = 0$，(16)式化为

$$g_y\Psi - g\Psi_y = 0 \tag{17}$$

故有

$$\Psi(\zeta, y) = C(\zeta) g(y),$$

$C(\zeta)$ 为待定函数。由(11)式知

$$C_\zeta = \varphi_1, \qquad C g_y = \varphi_1 f - \varphi_2 \tag{18}$$

此为 $C(\zeta)$ 必须满足的超定方程组，其可解条件给出关于 φ 的方程

$$\varphi_1 = \frac{(\varphi_1 f - \varphi_2)_\zeta}{g_y} \tag{19}$$

即只有当 φ 满足(19)式时，由(11)式确定的 Ψ 才能满足(16)式，而不论 φ 怎样，都有 Ψ 满足(15)式，从而知当 φ 满足(19)式时 Ψ 必满足(12)式，不难看出，方程(19)正是(12)式。综上所述知(11)式是(12)式自身的 B chlund 变换，同时由(18)式可得

$$\Psi(\zeta, y) = \frac{\varphi_1 f - \varphi_2}{g_y} g \tag{20}$$

于是方程(10)积分为下述一阶方程

$$\varphi_1(\zeta) y_\zeta(\zeta) + \frac{\varphi_1(\zeta) f(y) - \varphi_2(\zeta)}{[\ln g(y)]_y} = C_1 \tag{21}$$

其中 C_1 为积分常数。

3　漂移型扭结孤波解

物理方面要求 $y(\zeta) < \infty (\zeta \to \infty)$，对于方程(8)这一特例而言，这导致要求 $C_1 = 0$. 于是求方程(8)物理解问题化为求伯努利方程

$$y_\zeta - \frac{4\gamma}{3} y^3 + \frac{3}{2\gamma} y = 0 \tag{22}$$

的有界解问题。不难得到方程(22)在整个 ζ 轴上有界的光滑解

$$y_{1,2} = \pm \frac{\eta}{2} \exp\left[-\frac{\eta}{2}(\zeta - \zeta_0)\right] \operatorname{sech}^{1/2}[\eta(\zeta - \zeta_0)] \tag{23}$$

其中 $\eta = \frac{3}{2\gamma}$。易知

$$y_{1,2} \to \pm \frac{\eta}{\sqrt{2}} (\zeta \to -\infty)$$

和

$$y_{1,2} \to 0 (\zeta \to +\infty),$$

所以 y_1 对应于方程(1)的反扭结解，y_2 对应于方程(1)的扭结解。考虑到初始相角 Φ_0 的任意性，方程(1)的扭结孤波解可以统一地写成

$$q(Z, T) = q_0(\zeta - \zeta_0) \exp[\mathrm{i}[2V_m(\xi - \xi_0)]] \tag{24}$$

其中 $q_0(\zeta) = y_1(\zeta)$，ζ_0、ξ_0 由光场的初始条件确定。

由(2)式可知，扭结孤波解(24)式描述的是一个在延时坐标系[1]中以速度 V_m 沿 T 轴正向漂移的包络行波。在这个漂移的慢变包络线上，调制了一个慢变(与载频相比)的平面相位波，相速度为 V_p。

由(13)式可知，当 $V_m \neq 0$ 时，有

$$V_p = V_m - \frac{9}{16 V_m \gamma^2} \tag{25}$$

因此有

$$\Phi(\xi) = 2V_{\mathrm{m}}T - \left(2V_{\mathrm{m}}^2 - \frac{\eta^2}{2}\right)Z + \Phi_0 \tag{26}$$

易见，当 $V_{\mathrm{m}} = 0$ 时，V_{p} 无意义，而(26)式则表示

$$\Phi(\xi) = \eta^2 Z/2 + \Phi_0,$$

即相位整体地随演化参量 Z 线性增长，这正是前文[8]所得到的静态扭结孤波解的情形。

在实验室坐标系中看，漂移扭结孤波(24)式描述的是一类以速度 V_{s} 沿光纤传播的行波，其宽度和平台高度同静态解，而速度 V_{s} 与群速度略有差异。由(26)式及 Z、T 与真实物理量 x、t 的关系[1]可知

$$\zeta = \frac{1}{t_0}\frac{v_g t - x}{v_{\mathrm{g}}} - \frac{V_{\mathrm{m}}x}{x_0} = \frac{1}{t_0}\left[t - \left(\frac{1}{v_{\mathrm{g}}} + \frac{t_0 V_{\mathrm{m}}}{x_0}\right)x\right]$$

故孤波速度为

$$V_{\mathrm{s}} = \frac{1}{1/v_{\mathrm{g}} + t_0 V_{\mathrm{m}}/x_0} = \frac{1}{1 + t_0 V_{\mathrm{m}} v_{\mathrm{g}}/x_0} v_{\mathrm{g}} \tag{27}$$

反解之，有

$$V_{\mathrm{m}} = \frac{x_0}{t_0}\left(\frac{1}{V_{\mathrm{s}}} - \frac{1}{v_{\mathrm{g}}}\right) \tag{28}$$

由(27)式可知，当 $V_{\mathrm{m}} > 0$ 时，$V_{\mathrm{s}} < v_{\mathrm{g}}$，即孤波可以"慢化"。当 $V_{\mathrm{m}} < 0$ 时，$V_{\mathrm{s}} > v_{\mathrm{g}}$，孤波速度超过介质的群速度。单从(27)式看，当 $1 + \frac{t_0 V_{\mathrm{m}} v_{\mathrm{g}}}{x_0} < 0$，即 $V_{\mathrm{m}} < -\frac{x_0 v_{\mathrm{g}}^{-1}}{t_0}$ 时，$V_{\mathrm{s}} < 0$，孤波退行。但实际上这是不可能的，从下面关于相位波的分析中可以看出这一点。

将 $\Phi(\xi)$ 用真实物理量表示，记

$$\Phi(x, t) = k_{\mathrm{p}}x - \omega_{\mathrm{p}}t \tag{29}$$

由(26)式并利用(28)式可得

$$\omega_{\mathrm{p}} = (1/v_{\mathrm{g}} - 1/v_{\mathrm{s}})x_0/t_0^2 \tag{30a}$$

$$k_{\mathrm{p}} = (1/2)(1/v^{\partial} - \mathrm{g} - 1/b_{\mathrm{s}}^2)x_0 t_0^2 + (9t_0^2/8x_0)(1/\tau_{\mathrm{R}}^2) \tag{30b}$$

将 $k'' = D\frac{\lambda^2}{2\pi c}$，$t_0 = \frac{(-\lambda k'')^{1/2}}{\epsilon}$，$x_0 = \frac{\lambda}{\epsilon^2}$ 代入，有

$$\omega_{\mathrm{p}} = -\frac{2\pi c}{x^2}\left(\frac{1}{v_{\mathrm{g}}} - \frac{1}{V_{\mathrm{s}}}\right)\frac{1}{D} \tag{31a}$$

$$k_{\mathrm{p}} = -\frac{\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{1}{v_{\mathrm{g}}^2} - \frac{1}{V_{\mathrm{s}}^2}\right)\frac{1}{D} - \frac{9}{16\pi c}\frac{\lambda^2}{\tau_{\mathrm{R}}^2}D \tag{31b}$$

易见当 $V_{\mathrm{s}} = v_{\mathrm{g}}$ 时，有 $\omega_{\mathrm{p}} = 0$ 和

$$k_{\mathrm{p}} = -\frac{9}{16\pi c}\frac{\lambda^2}{\tau_{\mathrm{R}}^2}D \tag{32}$$

(32)式正是文献[7]中关于静态扭结孤波包络沿光纤的整体相位改变。

从方程(1)的推导知略去的光纤光场快变部分为 $\exp[\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)]$，将其与慢变包络上的相因子 $\exp[\mathrm{i}(k_{\mathrm{p}}x - \omega_{\mathrm{p}}t)]$ 合并而得总相因子 $\exp\{\mathrm{i}[(k_0 + k_{\mathrm{p}})x - (\omega_0 + \omega_{\mathrm{p}})t]\}$，总相速度 V_{p} 为

$$V_{\mathrm{p}} = (\omega_0 + \omega_{\mathrm{p}})/(k_0 + k_{\mathrm{p}}) \tag{33}$$

对于慢变包络而言，其"慢变"是指 $\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{\omega_0} \ll 1$，

即
$$(1/\omega_0)(1/v_g - 1/v_s)(x_0/t_0^2) \ll 1 \tag{34}$$
并令 $\Delta V = V_s - v_g$, (34) 化为
$$\frac{|\Delta V|}{V_s} \ll 1\frac{t_0^2}{x_0}\omega_0 v_g = - D\lambda v_g \tag{35}$$
将 $D = -1$ ps/(nm·km), $\lambda = 1.55\ \mu$m 和 $v_g = 2.0\times10^8$ m/s 代入, 得
$$\frac{|\Delta V|}{V_s} \ll 13.1\times10^{-4} \tag{35}$$
因此, 漂移扭结孤波的漂移速度应在 $10^{-4}v_g$ 量级以下, 即 $|\Delta V_s| < 2\times10^4$ m/s。这正是取"漂移"这一名字的原因。由此也可知道孤波退行是不可能实现的, 因为退行就必然有
$$|\Delta V| > v_g$$
现考虑一种简单情形, 取 $\frac{\omega_0}{k_0} = V_p = v_g$, 此时有 $\frac{\omega_p}{k_p} = v_g$, 由(31) 式可得
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{V_s}\right)^2 = \frac{9}{32\pi^2c^2}\frac{\lambda^4}{\tau_R^2}D^2 \tag{36}$$
从而得
$$\frac{1}{v_g} - \frac{1}{V_s} = \pm\frac{3}{4\pi c}\frac{\lambda^2}{\tau_R}D \tag{37}$$
代入(30) 式可得
$$\omega_p = \pm\frac{3}{2}\frac{1}{\tau_R} = \pm 2.7\times10^{14}\ \text{Hz} \tag{38}$$
由(28), (37) 可得
$$V_m = -\frac{1}{\epsilon}\sqrt{-\frac{\lambda^3}{2\pi c}D}\,\omega_p = \mp\eta \tag{39}$$
$\lambda = 1.55\ \mu$m 对应于 $\omega_0 = 12.6\times10^{14}$ Hz, 可见慢变振幅条件 $\omega_p \ll \omega_0$ 在本例中仅粗略成立。

由(38)、(39) 两式可知, 当孤波包络附加相位调制频率为 $\pm2.7\times10^{14}$ Hz 时, 相应孤波的漂移速度为 $\mp\eta$。由此可知, 通过控制调制频率, 可以控制扭结孤波的漂移速度。

4　结论与讨论

本文所得漂移型扭结孤波解已将文献[7] 得到的静态扭结孤波解作为特例包括进来。漂移型扭结孤波解同样有 $\gamma\to0^+$ 时解的极限不存在的问题。后续的工作表明, 在 $\gamma = 0$ 附近, 方程(1) 是依参数 γ 不稳定的。现已证明[10] 形如(2) 式的稳态解中, 不存在亮孤子和暗孤子解, 这提示方程(1) 在 $\gamma = 0$ 处存在分岔行为。这些结论表明将 $\gamma = 0$ 的解作为首项、依小参数 γ 的任何摄动(包括奇异摄动) 所得结果一般而言不能给出 $\gamma\neq0$ 方程的所有类型的解。

从物理的角度看, 这一极限性质是不难理解的: 在不调整无量纲化单位大小的前提下, $\gamma\to0^+$ 相当于 $\tau_R\to0^+$, 即非线性响应延迟趋于零, 这相当于介质的原子、分子耦合强度趋于无穷。一个物理解在这一非物理的极限下发散是自然的。如果仅由于改变约化参量 ϵ 而导致 $\gamma\to0^+$, 则不难发现由真实物理量构成的扭结孤波解表达式无任何变化, 完全不存在发散问题。

本文用一定的篇幅证明了变换(11) 为方程(12) 的 B chlund 变换。尽管本文并未直接利用这一结论, 但估计这一并非显然的数学结构对于理解、发展和使用这一独特的数学方法将

起到积极作用。

从本质上讲，考虑非线性延时效应的光纤孤子方程应是非线性延时偏微分-积分方程，这是极为复杂的典型无穷维系统，即使作变换(2)讨论其稳态解问题，这仍是一个延时系统，其实还是一个无穷维问题。本文仅是在光纤孤子有关文献中普遍采用的方程(1)的框架下讨论严格解问题，其结论与真实光纤非线性光场的演化结果必然会有相当的距离，因而本文和文献[7]所得扭结孤波解的意义在于对方程(1)解的行为和参数不稳定性的了解以及提示光纤中还可能会存在这样一类明显地区别于通常的亮孤子和暗孤子的典型孤波现象。有待实验研究。

感谢$\boxed{\text{王仁川}}$教授、徐燕候教授、陈祖墀教授和宣本金博士的有益讨论。

参　考　文　献

[1] Hasegawa A.　*Optical Solitons in Fibers*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1990

[2] Kodama Y.　Optical solitons in a monomode fiber. *J. Stat Phys.*, 1985, **39**(5/6)：597~614

[3] 杨　理，张　杰，闫沐霖等.　光孤子通信系统中编码孤子脉冲序列的演化问题. 中国科学(E)，1996，**26**(2)：122~133

[4] Kodama Y, Nogaki K.　Soliton interaction in optical fibers. *Opt. Lett.*, 1987, **12**(12)：1038~1040

[5] Kodama Y, Hasefawa A.　Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. *IEEE J Quantum Electron.*, 1987, **23**(5)：510~524

[6] Grodon J P.　Theory of the soliton self-frequency shift. *Opt. Lett.*, 1986, **11**(10)：662~664

[7] 杨　理，刘颂豪，赵　　等.　非线性延时修正光纤孤子方程的稳态解问题Ⅰ. 静态扭结孤波解. 光学学报，1999，**19**(6)：746~750

[8] 桑森 G，康蒂 R.　非线性微分方程. 黄启昌等译. 北京：科学出版社，1983

[9] 谷超豪.　孤立子理论与应用. 杭州：浙江科学技术出版社，1990

[10] 杨　理，　光纤孤子序列，稳态孤波及相关通信问题. 合肥：中国科技大学[博士学位论文]，1997.

Steady Solutions of Optical Soliton Equation with Nonlinear Response Delay Term Ⅱ. Drifting Kink Solution

Yang Li[1)]　　Liu Songhao[2)]　　Liao Changjun[2)]

1), *State Key Laboratory of Information Security, Graduate School at Beijing, University of Science and Technology of China, Beijing* 100039

2), *Institute of Quantum Electronics, Huanan Normal University, Guangzhou* 510631

(Received 1 October 1997; revised 31 March 1998)

Abstract　By a method related to B chlund transformation, the optical soliton equation with nonlinear response delay term has been solved exactly and a drifting kink solution has been found. The limit property of the kink solution and related physical problems has been discussed in details. At the end, it is pointed out that this equation is parametrically unstable at $\gamma = 0$.

Key words　silica fiber,　nonlinear response delay,　exact solution,　solitary wave.