第 19 卷 第 6 期
1999 年 6 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 19, No. 6
June, 1999

非线性延时修正光纤孤子方程的稳态解问题 一. 静态扭结孤波解*

杨 理[1)] 刘颂豪[2)] 廖常俊[2)]

1), 中国科学技术大学研究生院(北京)信息安全国家重点实验室, 北京 100039
2), 华南师范大学量子电子学研究所, 广州 510631

摘 要 严格求解含非线性延时修正光纤孤立子方程, 得到一类完全不同于光纤中已知的亮孤子和暗孤子的新型光学孤波解, 并讨论了其物理含义及在光纤实验中观察这种扭结孤波的可能性。

关键词 石英光纤, 非线性延时, 严格解, 孤立波。

1 引 言

描述单模石英光纤中皮秒光脉冲非线性传输的基本方程为非线性薛定谔方程[1, 2]。当考虑更为快速的过程, 如飞秒光脉冲的演化, (简并)呼吸子的传输[3], 或光场包络线变化特征时间在亚皮秒尺度时, 需考虑三阶色散效应、自变陡效应和非线性延时效应[1], 其中非线性延时效应尤为重要, 原因来自物理和数学两个方面。从物理方面看, 非线性延时效应与石英介质非线性折射率的有限响应时间(~ 5.6 fs)有关, 由纤芯材料本身的非线性光学性质所决定, 其作用在三个修正效应中最为强烈[1]。目前人们主要讨论非线性延时效应造成的拉曼自频移[4]、拉曼串扰、拉曼放大和高阶孤子的衰变等问题, 这些在光纤孤立子的研究中都是十分重要的问题; 从数学方面看, 仅考虑三阶色散和自变陡效应时, 修正的光纤孤子方程仍是完全可积方程[4], 而考虑非线性延时效应后, 情况变得十分复杂。迄今为止, 对含非线性延时项光纤孤子方程的严格解析解了解甚少, 多数工作依赖于数值模拟和孤子微扰论[5]。显然, 由于非线性演化方程解的行为的复杂性, 仅有孤子微扰论是不够的。为了对这一重要方程解的性质有更全面的了解和对单模石英光纤中新的强光现象的认识, 设法求出一些有物理意义的严格解, 尤其是不能退化为非线性薛定谔方程解的严格解, 是很有必要的。本文将严格求解含非线性延时项的光纤孤立子方程, 得到与孤子微扰论解性质颇为不同的孤波解, 并讨论它的物理意义以及在光纤实验中观察这种孤波的可能性。

2 含非线性延时项光纤孤立子方程的严格解

反常色散区光纤孤子方程的一级修正形式为[4]

* 国家自然科学基金理论物理专款(19677207)和安徽省自然科学基金(95-电-01)资助项目。
收稿日期: 1997-09-30; 收到修改稿日期: 1998-04-24

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial Z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+|q|^2q+\mathrm{i}\beta\frac{\partial^3 q}{\partial T^3}+\mathrm{i}\alpha\frac{\partial}{\partial T}(|q|^2q)-\gamma\frac{\partial}{\partial T}(|q|^2)q=0$$

式中 β 项对应三阶色散效应, α 项对应自变陡效应, γ 项对应非线性延时效应。本文考虑 $\alpha=\beta=0$ 的情形, 此时上述方程简化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial Z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+|q|^2q-\gamma\frac{\partial}{\partial T}(|q|^2)q=0 \tag{1}$$

设方程(1)可如下分离变量:

$$q(T,Z)=y(T)\exp[\mathrm{i}\theta(Z)] \tag{2}$$

其中 $y(T)$ 为实函数, 代入方程(1)得

$$-y\theta_Z+y_{TT}/2+y^3-2\gamma y^2y_T=0$$

易知必有 $\theta_Z=\eta$(常数), 故有 $\theta(Z)=\eta Z+\theta_0$, 其中 η、θ_0 为待定常数。此时方程(1)化为二阶常微分方程:

$$y_{TT}+f(y)y_T+g(y)=0 \tag{3}$$

其中 $f(y)=-4\gamma y^2$, $g(y)=2y^3-2\eta y$, 函数下标表示微分。此方程属广义 Liénard 方程[6]。现设法将方程(3)降阶[7]。设存在待定函数 $\varphi(T)$ 满足

$$[\varphi(T)g(y)]_y=\{\varphi(T)[f(y)-\varphi_T(T)/\varphi(T)]\}_T \tag{4}$$

则根据可积性条件知, 此时存在函数 $\Psi(T,y)$ 满足

$$\Psi_T=\varphi(T)g(y),\qquad \Psi_y=\varphi(T)[f(y)-\varphi_T(T)/\varphi(T)]$$

由(4)得

$$\varphi(T)(6y^2-2\eta)=-4\gamma y^2\varphi_T(T)-\varphi_{TT}(T)$$

比较两边, 得

$$6\varphi(T)=-4\gamma\varphi_T(T),\qquad 2\eta\varphi(T)=4\gamma\varphi_{TT}(T).$$

故知

$$\varphi(T)=\varphi(0)\exp(-3T/2\gamma),\qquad \eta=9/(8\gamma^2)$$

不失一般性, 可令 $\varphi(0)=1$, 此时有 $\varphi(T)=\exp(-3T/2\gamma)$, 因而有

$$\Psi(T,y)=\int_{T_0}^{T}\Psi_T(T,y)\,\mathrm{d}T+\int_{y_0}^{y}\Psi_y(T_0,y)\,\mathrm{d}y=\left(-\frac{4\gamma}{3}y^3+\frac{3}{2\gamma}y\right)\exp(-3T/2\gamma)+C_1$$

不难验证方程(3)有下述等价形式

$$\mathrm{d}[\varphi(T)y_T(T)]+\varphi(T)g(y)\,\mathrm{d}T+\varphi(T)[f(y)-\varphi_T(T)/\varphi(T)]\,\mathrm{d}y=0$$

故知(3)可降阶为

$$\varphi(T)y_T(T)+\Psi(T,y)=C_2 \tag{5}$$

可以看出, 在 $\eta=9/(8\gamma^2)$ 条件下, 方程(3)与方程(5)解相同。方程(5)属于第一类阿贝尔方程, 仅在几种特例下可以求得显式解。将 $\varphi(T)$, $\Psi(T,y)$ 代入(5)式可得

$$y_T-\frac{4\gamma}{3}y^3+\frac{3}{2\gamma}y=C\exp(3T/2\gamma)$$

由于 $T\to\infty$ 时 $y(T)$ 有界, 故 $y_T(T)$ 不会是 T 的正指数函数, 上式左端必取 $C=0$, 此时方程简化为

$$y_T-\frac{4\gamma}{3}y^3+\frac{3}{2\gamma}y=0 \tag{6}$$

这是 $n = 3$ 的伯努利(Bernoulli)方程，可得到在整个 T 轴上解析的解

$$y_{1,2} = \pm \frac{\xi}{2} \exp\left[-\frac{\xi}{2}(T - T_0)\right] \operatorname{sech}^{1/2}[\xi(T - T_0)]$$

其中 $\xi = 3/(2\gamma)$。由此得方程(1)的严格解：

$$q(T, Z) = q_0(T) \exp[i(\xi^2 Z/2 + \theta_0)] \tag{7a}$$

其中

$$q_0(T) = \frac{\xi}{2} \exp\left[-\frac{\xi}{2}(T - T_0)\right] \operatorname{sech}^{1/2}[\xi(T - T_0)] \tag{7b}$$

解(7)式中常数 T_0，θ_0 由物理的初始条件确定。易见解(7)式属于满足边界条件 $q_T(T \to \pm \infty) = 0$ 类型的扭结孤波，与之相应的本征值为 $\eta = 9/(8\gamma^2)$。其所描述的实际上是在特定高能量下平坦宽脉冲下降沿的一种具有特殊稳定性的包络线(见下节讨论)。

3 解的极限性质和物理意义

考虑扭结孤波当 $\gamma \to 0^+$ 时的极限行为。易知，此时 $q(T - T_0 > 0, Z)$ 趋于0；$q(T - T_0 = 0, Z)$ 趋于保持振幅不变但频率无限增加的振荡；$q(T - T_0 < 0, Z)$ 则趋于振幅和频率都无限增加的振荡。即：$\gamma \to 0^+$ 时 $q(T, Z)$ 不存在极限。这表明解(7)式当 $\gamma \to 0^+$ 时不能退化为非线性薛定谔方程的解，所以无法通过取 γ 为小量的方式从对非线性薛定谔方程解的修正中获得对解(7)式的了解。人们也可以从解(7)式对守恒定律微扰修正形式偏离的方式清楚地看到这一点。

如所周知，非线性薛定谔方程有无穷多守恒量，其中与动量相对应的是[8]

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} q \frac{\partial q^*}{\partial T} \mathrm{d}T$$

式中 q^* 为 q 的复共轭。对于含修正项的方程，守恒定律不再严格成立。从基于反散射方法的微扰论出发，可得到动量守恒定律关于方程(1)的微扰修正形式[1,8]

$$i \frac{\partial}{\partial Z} M = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial T} |q|^2\right)^2 \mathrm{d}T$$

即对守恒定律偏离的领头项当小参数 γ 趋于零时也趋于零。将解(7)代入上式右端，有

$$\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial T} |q|^2\right)^2 \mathrm{d}T = \frac{81}{128\gamma^4} \tag{8}$$

此量与小参数 γ 成四次方反比关系，这表明解(7)式与孤子微扰论所得解颇为不同。扭结孤波解是性质上不同于方程(1)其它已知孤波解(微扰解)的新解。

由(7b)式知，$q_0(T)$ 与演化参量 Z 无关，由于 ξ 为正实数，有 $q_0(T \to +\infty) = 0$ 和 $q_0(T \to -\infty) = \xi/\sqrt{2}$，从(7)式可以看出，参数 T_0 决定 q_0 由 $\xi/\sqrt{2}$ 变为0的过渡区中心在延时坐标系中的位置，θ_0 为包络线初始相位，过渡区的大小由 ξ 决定，ξ 愈小，过渡愈平缓，$\xi \to 0$ 时扭结孤波趋于零解。如果定义过渡区宽度 ΔT 为 $q_0^2(T)$ 由 $\frac{\xi^2}{2}\frac{1}{1+e}$ 变为 $\frac{\xi^2}{2}\left(1 - \frac{1}{1+e}\right)$ 所对应的 T 的宽度，则 $\Delta T = 1/\xi = 2\gamma/3$。对于光纤上一固定点 x 而言，$\Delta T = \Delta t/\tau_0$，其中 Δt 为真实物理时间。故知 $\Delta t = \tau_0 \Delta T = \tau_0 2\gamma/3 = \tau_0 2\tau_R/(3\tau_0) = 2\tau_R/3$，其中 τ_R 为纤芯材料非线性折射率的响应时间。即按上述定义的过渡区宽度相当于真实物理时间 $\Delta t = 2\tau_R/3$。

从实验室坐标系看[1]，扭结孤波描述的是一个以群速度 v_g 沿光纤传播的行波。其所传播

的实际上是$|E| = E_0$的光场和$|E| = 0$的光场之间的过渡光场(或称边界层光场)的形态。确切地说,扭结孤波所描述的是这一边界层光场复包络线依演化参量Z的演化过程。解(7)式的存在表明,边界层光场如果调制成与(7)式相符,则其包络线在以群速度v_g向前传播时可保持自身形状不变,并且包络线相位能够整体地随传输距离Z线性增长。这是石英光纤在强光作用下的一个可能的新现象,值得从理论和实验两个方面进行探讨。

扭结孤波解需要特别讨论的,是$T \to -\infty$时光场极限场强的振幅E_0,即孤波左侧平台的高度。由上一节可知,$T \to -\infty$时,$q_0(T) \to \xi/\sqrt{2}$,此值单纯地随γ变化而改变,与非物理的约化因子ϵ有关。不过,真正的物理量E_0与ϵ无关,完全由光场波长λ及光纤的物理参数(诸如D、τ_R、n_2等)决定。对于普通单模石英光纤,$n_2 = 1.3\times10^{-22}(\mathrm{m/V})^2$,取参数$D = -1\ \mathrm{ps/(nm\cdot km)}$,$\lambda = 1.55\ \mu\mathrm{m}$,$S = 60\ \mu\mathrm{m}^2$,则孤子峰值功率为[9] $P_s(\mathrm{W}) = 1.73/\tau_s^2(\mathrm{ps})$。由解(7)式知,$T \to -\infty$时扭结孤波的极限功率为$P_{\mathrm{terrace}} = (\xi/\sqrt{2})^2 P_s$,由此得

$$P_{\mathrm{terrace}}(\mathrm{W}) = \frac{0.628}{\tau_R^2(\mathrm{ps})} \tag{9}$$

对普通单模石英光纤而言,$\tau_R = 5.6\ \mathrm{fs}$,由(9)式可知$P_{\mathrm{terrace}} = 20\ \mathrm{kW}$,这相当于场强$E_0 = 4.1\ \mathrm{MV/cm}$。考虑到这一情形下,孤波解的过渡区宽度$\Delta t$仅为4 fs,孤波解在此表示的是一个平台能量极高,极为峻陡的阶跃式行波。将此包络行波的相位用真实物理量表示为$\theta(x) = \kappa x + \theta_0$,则可以得到

$$\kappa = -\frac{9}{16\pi c}\frac{\lambda^2}{\tau_R^2}D \tag{10}$$

在上述光场波长和光纤参数下有$\kappa = 45.7\ \mathrm{m}^{-1}$,相应的低频相位调制频率为1.46 GHz。

4　结论与讨论

至此可以看到,本文解出的非线性延时修正光纤孤子方程的第一个精确孤波解具有很独特的性质:它不仅与各类修正光纤孤子方程的已知孤波解不属于同一类型($|q(T\to+\infty)| \neq |q(T\to-\infty)|$),而且当$\gamma\to0^+$时回不到$\gamma = 0$方程的解上去。尤其值得注意的是,这一孤波的平台功率和过渡区宽度等物理量仅与纤芯材料的非线性响应时间τ_R等光纤物理参数有关,因而是一种少见的"本征孤波"现象。

Smith等人测定熔融SiO_2在$\lambda = 1.06\ \mu\mathrm{m}$处的光击穿场强$E_b$为11.68 MV/cm[10]。$\lambda = 1.55\ \mu\mathrm{m}$是熔融$SiO_2$的最低损耗点,这里的$E_b$与上述值无大差异(不小于上述值),故原则上在单模石英光纤中观察扭结孤波现象是允许的。当然,目前在$\lambda = 1.55\ \mu\mathrm{m}$处的激光光源还无法达到这一功率。注意到在某些掺稀土光纤和半导体合金掺杂光纤中,n_2和τ_R都有若干量级的增加,选择适当的光纤有希望把P_{terrace}降至10 mW的水平,这将使在实验上研究这一新型光学孤波的性质并探讨其应用成为可能。

扭结孤波解的存在提示很小的修正项$\gamma(|q|^2)_T q$亦可能剧烈地改变非线性薛定谔方程的解空间。如果这样,关于方程(1)的数学研究将相当困难,而以方程(1)为基本方程的物理系统则将有更多的现象有待探索。关于此扭结孤波在小扰动下的稳定性,尤其是当α、$\beta\neq0$时和高阶拉曼修正项以及线性耗散项存在时该解的行为正在讨论之中。本文使用的方法可用于求解其它非线性演化方程。

感谢王仁川教授、程艺教授和黄建生博士的有益讨论。

参 考 文 献

[1] Hasegawa A. *Optical Solitons in Fibers*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 1~ 201

[2] 刘颂豪, 郭 旗, 廖常俊等. 光学孤子与孤子激光器. 科学通报, 1992, **37**(3): 193~ 197

[3] 杨 理, 张 杰, 闫沐霖等. 光孤子通信系统中编码孤子脉冲序列的演化问题. 中国科学(E), 1996, **26**(2): 122~ 133

[4] Kodama Y. Optical solitons in a monomode fiber. *J. Stat Phys*, 1985, **39**(5/6): 597~ 614

[5] Kodama Y, Hasegawa A. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1987, **QE-23**(5): 510~ 524

[6] 桑森 G, 康蒂 R. 非线性微分方程. 黄启昌等译. 北京: 科学出版社, 1983.

[7] 卡姆克 E. 常微分方程手册. 张鸿林译, 北京: 科学出版社, 1980.

[8] 黄念宁. 孤子理论和微扰方法. 上海: 上海科技教育出版社, 1996. 76

[9] Hasegawa A, Kodama Y. *Solitons* in *Optical Communications*, New York: Oxford University Press Inc. 1995. 39

[10] Smith W L, Bechtel J H, Bloembergen N. Dielectric-breakdown threshold and nonlinear-refractive-index measurements with picosecond laser pulses. *Phys. Rev.* (*B*), 1975, **12**(2): 706~ 714

Steady Solutions of Optical Soliton Equation with Nonlinear Response Delay Term Ⅰ. Static Kink Solution

Yang Li[1)] Liu Songhao[2)] Liao Changjun[2)]

1), *State Key Laboratory of Information Security, Graduate School at Beijing, University of Science and Technology of China, Beijing* 100039

2), *Institute of Quantum Electronics, Huanan Normal University, Guangzhou* 510631

(Received 30 September 1997; revised 24 April 1998)

Abstract The optical soliton equation with nonlinear response delay term has been solved exactly, and a new type of optical solitary wave, which is deeply different with bright and dark soliton solutions has been found. The physical meaning of the kink and the possibility to observe the kink solitary wave in optical fiber experiment have been discussed.

Key words silica optical fiber, nonlinear response delay, exact solution, solitary wave.