第 19 卷　第 6 期
1999 年 6 月

光　学　学　报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 19, No. 6
June, 1999

分数傅里叶变换全息图及其在防伪中的应用

郭永康　黄奇忠　杜惊雷
(四川大学物理系, 成都 610064)

摘　要　提出分数傅里叶变换全息图, 讨论了它的性质。拍摄了分数傅里叶变换彩虹全息图, 基于其再现条件的特殊性, 可建立一种新型的防伪全息术。

关键词　分数傅里叶变换,　分数傅里叶变换全息图,　分数傅里叶变换彩虹全息图,　防伪。

1　引　　言

1980 年 Namias 最先在量子力学中引入分数傅里叶变换(FRT)[1], 1993 年 Mendlovic 和 Ozaktas 发现输入光束的横向复振幅分布沿二次方型梯度折射率介质的传播, 恰可用分数傅里叶变换描述, 其分数阶与传播距离成正比[2]。紧接着 Lohmann 用 Wigner 分布函数的旋转定义了分数傅里叶变换, 并提出在宏光学中可用满足一定条件的单透镜或双透镜组合实现分数傅里叶变换[3]。由于分数傅里叶变换是一般傅里叶变换的推广, 藉之可以从一个全新的角度去认识光的传播、成像和信息处理, 从而可获得许多新的应用。有关分数傅里叶变换的应用, 可参见文献[4~ 7], 但尚未见分数傅里叶变换全息图的报导。本文提出利用光波经分数傅里叶变换后在分数域上的场分布与分数阶有关的性质, 可以记录一种既包含物体信息又包含有系统参量信息的分数傅里叶变换全息图, 并利用其分数阶作为其再现的一个新的约束条件和保密的自由度, 可建立一种新型的防伪全息术。

2　分数傅里叶变换和分数傅里叶变换全息图

2.1　分数傅里叶变换

函数 $g(x_0)$ 的分数傅里叶变换的定义为[1]

$$\mathscr{F}^{p}[g(x_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} B_p(x_0, x_1)\, g(x_1)\, \mathrm{d}x_1 \tag{1}$$

上式中核函数

$$B_p(x_0, x_1) = \frac{\exp[-\mathrm{i}(\pi\hat{\phi}/4 - \phi/2)]}{|\sin\phi|^{1/2}} \exp[\mathrm{i}\pi(x_0^2\cot\phi - 2x_0x_1\csc\phi + x_1^2\cot\phi)] \tag{2}$$

其中 $\phi = p\pi/2$, $\hat{\phi} = \mathrm{sgn}(\sin\phi)$, p 为分数傅里叶变换的分数阶。

由 Lohmann 提出的实现分数傅里叶变换的光学装置之一如图 1 所示, z 为输入面到透镜

收稿日期: 1998-01-19; 收到修改稿日期: 1998-04-15

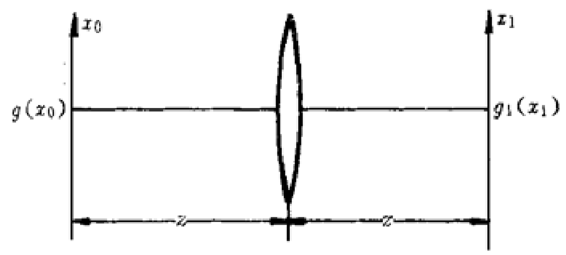

Fig. 1 Optical implement setup of FRT

的距离, f 为透镜的焦距, z 和 f 应满足如下的条件:

$$\left.\begin{aligned} f &= f_1/\sin(p\pi/2) \\ z &= f_1\tan(p\pi/4) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

基于图 1, (1) 式可以简化为

$$g_1(x_1) = \mathscr{F}^p[g_0(x_0)] = \int g_0(x_0)\ \exp[j\pi(x_0^2 + x_1^2)/(\lambda f_1\tan\phi)] \times \exp[-j2\pi x_1 x_2/(\lambda f_1\sin\phi)]\,dx_0 \tag{4}$$

其中 λ 是光波长, $f_1 = f\ \sin\phi$, f_1 称为标准焦距, 当变换系统一定时为常数。f 是透镜焦距。

特别地, 当 $p = 1$ 时, 上式为一般的傅里叶变换, 即一般傅里叶变换为分数傅里叶变换的一种特殊情况。当 $p = 2$ 时, 由(3) 式可得: $z = 2f$, 分数傅里叶变换为输入物本身, 只是发生了坐标反演, 即

$$g_1(x_1,\ y_1) = g_0(-\ x_0,\ -\ y_0) \tag{5}$$

分数傅里叶变换的另一重要特性是其分数阶的可加性, 如果连续两次实行分数阶分别为 p_1、p_2 的分数傅里叶变换, 则

$$\mathscr{F}^{p_1}\mathscr{F}^{p_2}[g_0(x_0] = \mathscr{F}^{p_1+p_2}[g_0(x_0)] \tag{6}$$

分数傅里叶变换的以上两个特性对分析全息记录、再现以及系统成像是非常方便和有效的。

2.2 分数傅里叶变换全息图

2.2.1 记 录

如图 2, 在系统的 p_1 阶分数傅里叶变换域上, 引入参考光和物体的分数傅里叶变换光场干涉, 得到物体的 p_1 阶分数傅里叶变换全息图, 其中 $g_0(x_0)$ 是物函数, $g_1(x_1) = \mathscr{F}^{p_1}[g_0(x_0)]$ 是对应的 p_1 阶分数傅里叶变换, R 为记录时所用参考光, 则全息图上记录的光强分布为

$$I_1(x_1) = |R + g_1(x_1)|^2 = |R|^2 + |g_1(x_1)|^2 + R^* g_1(x_1) + R g_1(x_1)^* \tag{7}$$

经线性处理后的全息图的振幅透过率和 $I_1(x_1)$ 成正比

$$t(x_1) = kI_1(x_1) \tag{8}$$

其中 k 为比例常数。

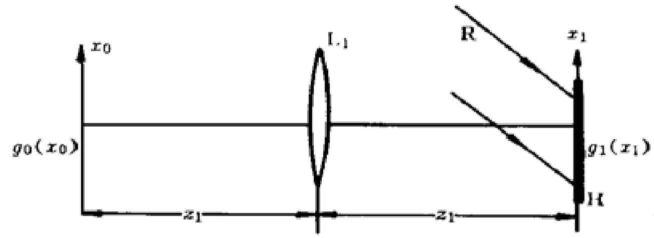

Fig. 2 Recording of FRTH

2.2.2 再 现

由原参考光照明全息图, 将再现出物光波的 p_1 阶分数傅里叶变换光场。为了得到物体的像, 可以采用以下两种再现方式:

1) 用原参考光照明分数傅里叶变换全息图再现的物体的 p_1 阶分数傅里叶变换光场, 再经一定距离的菲涅耳衍射, 可得到物体的再现像。再现像的大小和离全息图的距离由透镜成像公式决定。设 h 是物体的大小, h' 是像的大小, d 为再现像到全息图的距离, 则

$$h'/h = |1/\cos(p\pi/2)| \tag{9}$$

$$d = f|\sin(p\pi/2)\ \tan(p\pi/2)| \tag{10}$$

再现像的大小、位置和分数傅里叶变换的分数阶有关, 因而可以通过改变记录系统的分数阶来控制再现像的空间尺度大小。

2) 对分数傅里叶变换全息图再现的光场实行逆变换, 或实行与原变换 p_1 阶相匹配的另

一 p_2 阶变换, 如 $p_1 + p_2 = 2$ 时, 则在输出面上将获得与原物等大而倒立的像, 如图 3 所示, 这种再现方式较为特殊, 但却十分有用。此时再现分为两步:

i) 再现物体在分数域上的光场分布。当用记录时的参考光 R 照明全息图时, 再现光波场为 $Rt(x_1)$, 将(7) 式代入(8) 式, 其结果的第 3 项为

$$k|R|^2 g_1(x_1) = k|R|^2 \mathscr{F}^{p_1}[g_0(x_0)] \tag{11}$$

即将再现出原物的 p_1 阶分数傅里叶变换。

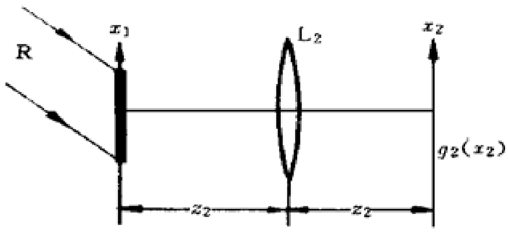

Fig. 3 Reconstruction of FRTH

ii) 再现物体的光场分布。从全息图 H_1 再现的物体的 p_1 阶分数傅里叶变换, 再经 p_2 阶分数傅里叶变换到达输出面, 其光场分布为

$$g_2(x_2) = \mathscr{F}^{p_2}\{k|R|^2 \mathscr{F}^{p_1}[g_0(x_0)]\} = k|R|^2 \mathscr{F}^{p_1+p_2}[g_0(x_0)] \tag{12}$$

当 $p_1 + p_2 = 2$ 时　$$g_2(x_2) \propto \mathscr{F}^2[g_0(x_0)] = g_0(-x_0) \tag{13}$$

即最后的再现光场是物光场的坐标反演。当然, 利用一透镜对上述再现方式 1) 所成像再次成像也可得到物体的像, 但这种成像过程都可以用一个分数傅里叶变换再加一个菲涅耳衍射来描述。在 $p_1 + p_2 = 2$ 这种特殊情况下, 讨论比较简单, 实际应用也比较方便。

从上述分数傅里叶变换全息图的记录过程可见, 分数傅里叶变换全息图与傅里叶变换全息图和菲涅耳全息图不同而又有相似之处。傅里叶变换全息图记录的是物的频谱, 菲涅耳全息图记录的是物光波前, 分数傅里叶变换全息图记录的则是物光波经分数傅里叶变换的波前。分数域上的场分布既与物函数有关, 又与分数阶有关, 而后者由(3) 式决定于距离 z 和透镜的焦距 f。从分数傅里叶变换全息图再现物体的像的方式上看, 它既可以用原参考光照明全息图, 在特定的距离处成像, 又可使全息图再现的波前再经一逆变换或与原记录系统的变换阶匹配的另一变换系统成像。前者的再现方式和菲涅耳全息图相同, 而后者则与一般的傅里叶变换全息图相同。分数傅里叶变换全息图从本质上讲是一种特殊的菲涅耳全息图。由于它既区别于一般的菲涅耳全息图, 又有别于一般的傅里叶变换全息图, 可以预料, 它必将有若干新的应用, 在第 3 节中将要指出的在防伪中的应用即是一例。

2.2.3　分数傅里叶变换全息图的特性

下面进一步讨论分数傅里叶变换全息图的线模糊和色模糊。和菲涅耳全息图类似, 对再现方式 1), 分数傅里叶变换全息图的线模糊和色模糊分别为

$$\Delta I = (\Delta R/l_R + dC/l_C)d = (\Delta R/l_R + \Delta C/l_C)\sin(p\pi/2)\tan(p\pi/2)f \tag{14}$$

$$\Delta I_\lambda = (d\theta/d\lambda)\Delta\lambda d = (d\theta/d\lambda)\Delta\lambda\sin(p\pi/2)\tan(p\pi/2)f \tag{15}$$

其中 l_R、l_C 分别是参考光、照明光到全息图的距离, ΔR、ΔC 分别为参考光、照明光源的线度, f 为透镜焦距, $d\theta/d\lambda$ 是分数傅里叶变换全息图的最大色散率。当 $p < 1$ 时, $d < 0$, 表示成像在分数傅里叶变换面前(虚像), 此时 p 越小, ΔI、ΔI_λ 越小, 对记录、再现全息图的光源大小、单色性要求较低。$p = 1$ 时, 成像于无穷远处。当 $1 < p < 2$ 时, ΔI_λ、ΔI 随 p 增大而减小; 当 $p = 2$ 时, $d = 0$, $\Delta I_\lambda = \Delta I = 0$, 即像面全息图的情形。

3　应　　用

3.1　分数傅里叶变换彩虹全息图的记录和再现

利用分数傅里叶变换全息图记录和再现方式的特殊性, 可用于防伪。为此本工作在前述

分数傅里叶变换全息图的基础上，制作了分数傅里叶变换彩虹全息图。在此，仅以二步彩虹全息图为例来说明其原理。首先用普通方法摄制一张菲涅耳全息图 H_1 作为主全息图，将其放入 p_1 阶分数傅里叶变换系统的输入面上，用原参考光照明，获得一虚像。在变换透镜 L_1 和输出面 x_1 之间适当位置放置一狭缝 S，将干板置于其输出面 x_1 处，同时记录再现光和狭缝的全息图 H_2，如图 4 所示。

再现时，将全息图置于 p_2 阶分数傅里叶变换的输入面 x_1，由沿记录时参考光方向的白光照明再现。记录和再现系统的分数傅里叶变换阶保持 $p_1+p_2=2$ 的关系，则在第 2 级输出面 x_2 可获得第 1 级输入 x_0 反演的光场分布。同时，在距输出面后适当位置处形成狭缝的像 S′，再现白光将受此狭缝像的限制，在此位置观察，则可获得一彩虹像。如图 5 所示。

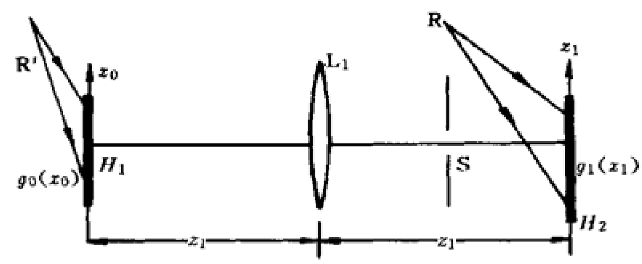

Fig. 4 The recording setup of FRTRH

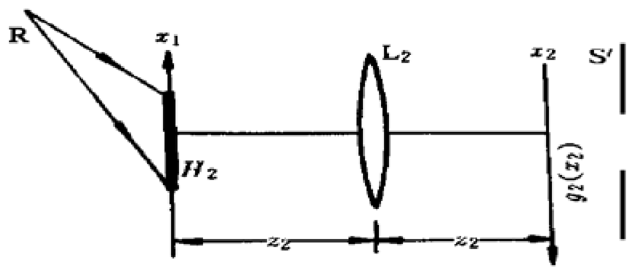

Fig. 5 Reconstruction setup of FRTRH

实验记录分数傅里叶变换彩虹全息图时所采用的参数为：$f=20.00$ cm，$p_1=1.25$，$p_2=0.75$，$z_1=27.65$ cm，$z_2=12.34$ cm，缝宽 0.20 cm。图 6 是实验结果照片，其中图 6(a) 为直接观察分数傅里叶变换彩虹全息图时的情况，从中无法读出所记录的图像。图 6(b) 是经分数傅里叶变换(即解码)后观察到的像，记录的物体为一玩具小马，观察者移动时，像的颜色随之改变，这和普通彩虹全息图是一样的。

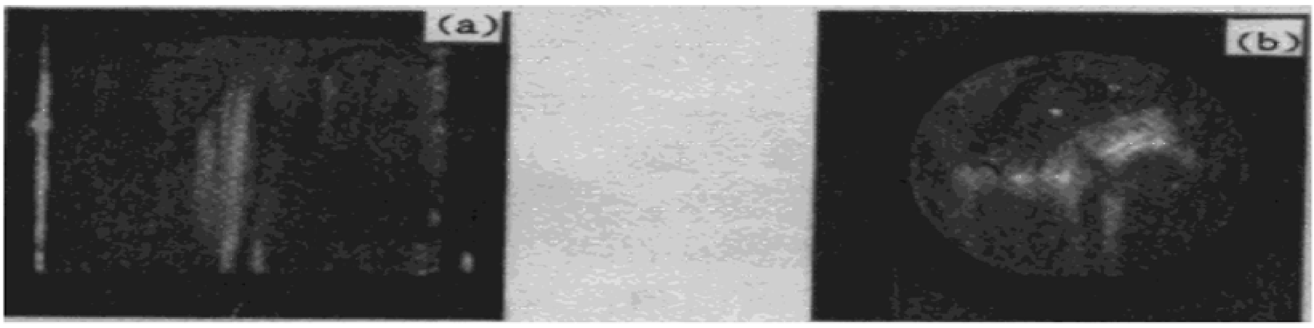

Fig. 6 Reconstruction result of FRTRH

3.2 分数傅里叶变换彩虹全息图的防伪特性

分数傅里叶变换彩虹全息图不仅记录了物的信息，而且还记录了系统的信息，如透镜的焦距 f、物体到透镜的距离 z。这点可以从分数傅里叶变换的定义式(1)清楚地看出。利用分数傅里叶变换彩虹全息图再现的像的位置、尺度的特征与再现系统分数阶有关的特性，可以将它应用于防伪，其防伪功能表现在以下两点上：

1) 在原参考光方向用白光再现时，人眼不能直接从分数傅里叶变换彩虹全息图读出所记录的图像。

2) 在记录分数傅里叶变换全息图时，可用多狭缝对物体各部分进行假彩色编码，或对物体进行尺度编码，为了读出经编码的物体信息，再现分数傅里叶变换系统的分数阶 p_2 必须与记录系统的分数阶 p_1 匹配，这里最简单的情况为 $p_1+p_2=2$，即若要在一个特定的 p_2 阶分

数傅里叶变换系统的输出面获得再现像，则记录系统必须为 p_1 阶分数傅里叶变换系统。因此，可以依据能否在特定的分数傅里叶变换系统的输出面再现出一定尺度或编码颜色的图像信息，来判断全息图的真伪。

将分数傅里叶变换彩虹全息图或它和一般的彩虹全息图合成的二重全息图作成模压全息图，由于分数傅里叶变换彩虹全息图是在特定条件下才能再现的"隐形"全息图，比之于一般的模压彩虹全息图具有多级防伪功能，因而具有更高的防伪力度，可广泛用于钞票、证件、商标的制作中。

结　论　本文提出了分数傅里叶变换全息图的概念，讨论了它的特性。制作了分数傅里叶变换彩虹全息图，讨论了它的防伪特性。实验结果表明这种全息图具有较高的防伪能力。

参 考 文 献

[1] Namias V. The fractional order Fourier transform and its applications in the quantum mechanics. *J. Inst. Math. Appl.*, 1980, **25**(2)：241~265

[2] Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implement: I. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993, **10**(9)：1875~1881

[3] Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993, **10**(10)：2181~2186

[4] Dorsch G, Adolf, Lohmann W. Fractonal Fourier transform used for a lens-design problem. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(20)：4111~4112

[5] Dorsch G, Adolf, Lohmann W. Chirp filtering in the fractional dormains. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(32)：7599~7602

[6] Berardo L M, Soares O D D. Fractional Fouier transforms and imaging. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(10)：2622~2626

[7] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier as a tool for analyzing beam propagation and spherical mirror resonators. *Opt. Lett.*, 1994, **19**(21)：1678~1680

Fractional Fourier Transform Hologram and Its Application in Anti-Counterfeiting

Guo Yongkang　　Huang Qizhong　　Du Jinglei

(*Department of Physics, Sichuan University, Chengdu* 610064)

(Received 19 January 1998; revised 15 April 1998)

Abstract　The fractional Fourier transform hologram is presented, its properties are discussed. A fractional Fourier transform rainbow hologram is made, based on its particularity in reconstruction, a new type of anti-counterfeiting hologram is obtained.

Key words　fractional Fourier transform (FRT), fractional Fourier transform hologram, fractional Fourier transform rainbow hologram, anti-counterfeiting.